

4. Даревский В. М.—ПММ, 1952, 16, 2.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
6. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, М., 1951.
7. Осадчук В. А., Подстригач Я. С.—МТТ, 1973, 3.
8. Подстригач Я. С., Осадчук В. А.—ФХММ, 1968, 4, 4.
9. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
10. Ярема С. Я., Саврук М. П.—ДАН УРСР. Сер. А, 1969, 8.
11. Erdogan F.—J. Appl. Math., 1969, 17, 6.
12. Folias E. S.—J. Math. and Phys., 1965, 44, 2.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1973 г.

УПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ С ТОНКОСТЕННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Д. В. Грилицкий, Г. Т. Сулим

Изучению напряженного состояния однородной и кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины посвящены работы [1, 5, 6]. При исследовании этой задачи основное внимание в работах [5, 6] уделялось определению разности касательных напряжений на противоположных берегах включения в предположении равенства перемещений на них. Вследствие этого, решение интегрального уравнения Прандтля, к которому свелась задача, пригодно только для достаточно жесткого включения.

Несколько иной подход к решению рассматриваемой задачи для однородной плоскости намечен в работе [1], где учитывается расхождение берегов включения, но пренебрегается разностью касательных напряжений на них.

Настоящая работа посвящена исследованию упругого состояния плоскости, состоящей из двух спаянных изотропных полуплоскостей, с тонкостенным упругим включением конечной длины на прямой линии раздела материалов в точной постановке. Это исследование приводит к системе трех сингулярных интегро-дифференциальных уравнений типа Прандтля, решения которых пригодно для любой жесткости включения: от нерастяжимого до абсолютно податливого (разреза). Этим установлена тесная связь между теорией трещин в упругих телах и теорией тонкостенных включений.

1. Рассмотрим упругое равновесие плоскости, состоящей из двух спаянных изотропных полуплоскостей, с тонкостенным упругим включением длины $2a$ и толщины $2h$ на прямой линии раздела материалов, находящейся под воздействием сосредоточенных силовых факторов и однородного поля напряжений на бесконечности (рис. 1).

Учитывая малую толщину включения, граничные условия на линии $y = 0$ запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{y1} - i\tau_{xy1}) - (\sigma_{y2} - i\tau_{xy2}) &= -if_0(x) = \begin{cases} -if_0^*(x) & (|x| \leq a); \\ 0 & (|x| > a); \end{cases} \\
 (u_1' + iv_1') - (u_2' + iv_2') &= f_1(x) + if_2(x) = \begin{cases} f_1^*(x) + if_2^*(x) & (|x| \leq a); \\ 0 & (|x| > a). \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1}$$

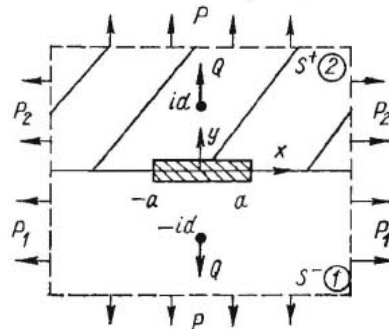


Рис. 1.

Еще три условия на линии $y = 0$ получаем из формулы (1.11) из работы [7]:

$$\begin{aligned} u_1' + u_2' &= 2k_0 \left(\frac{X_1 - X_2}{2h} + N_- \right) - 2k_1 \sigma_{y1}; \\ u_2 - u_1 &= \frac{h}{\mu_0} (\tau_{xy1} + \tau_{xy2}) - h(v_1' + v_2'); \quad (|x| \leq a) \\ v_2 - v_1 &= 2k_0 h \sigma_{y1} - k_1 (X_1 - X_2 + 2hN_-). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее индекс «1» относится к нижней полуплоскости, индекс «2» — к верхней; τ_{xyi} , σ_{yi} , σ_{xi} — касательные и нормальные напряжения; u_i , v_i — компоненты вектора перемещений; E_0 , ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала включения; N_- равно нормальному напряжению на левом торце включения; $f_j(x)$ ($j = 0, 1, 2$) — функции, подлежащие определению; X_i — главный вектор касательных напряжений, приложенных к i -й полуплоскости ($i = 1, 2$) на отрезке $[-a, x]$;

$$k_0 = \frac{1}{E_0}; \quad k_1 = \frac{\nu_0}{E_0}; \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}; \quad X_1 - X_2 = \int_{-a}^x f_0(t) dt.$$

2. Пусть на рассматриваемую упругую плоскость действует поле однородных нормальных напряжений ($\sigma_y^\infty = P$, $\sigma_{x1}^\infty = P_1$, $\sigma_{x2}^\infty = P_2$) и система из p сосредоточенных сил $Q_j = Q_{xj} + iQ_{yj}$ ($j = 1, 2, \dots, p$), приложенных в точках z_j соответственно. Предположим, что первые m сил ($m \leq p$) приложены в точках нижней полуплоскости, остальные $p - m$ — в верхней. Включение свободно от внешних нагрузок.

Напряжения и перемещения можно выразить через две функции комплексной переменной [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_{yj} - i\tau_{xyj} &= \Phi_{0j}(z) + \overline{\Phi_{0j}(z)} + z\overline{\Phi'_{0j}(z)} + \overline{\Psi_{0j}(z)}; \\ 2\mu_j(u_j' + iv_j') &= \kappa_j\Phi_{0j}(z) - \overline{\Phi_{0j}(z)} - z\overline{\Phi'_{0j}(z)} - \overline{\Psi_{0j}(z)} \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{0j}(z) &= \sum_i S_{i,k}(z) + \Gamma_j + \Phi_j(z); \quad \Psi_{0j}(z) = \sum_i R_{i,k}(z) + \Gamma_j' + \Psi_j(z); \\ S_{i,k}(z) &= -\frac{e_j Q_k}{z - z_k}; \quad R_{i,k}(z) = e_j \left[\frac{\kappa_j \bar{z}_k Q_k}{z - z_k} - \frac{\bar{z}_k Q_k}{(z - z_k)^2} \right]; \\ \sum_1 &= \sum_{k=1}^m; \quad \sum_2 = \sum_{k=m+1}^p; \quad e_j = \frac{1}{2\pi(1 + \kappa_j)}; \\ \kappa_j &= \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j}; \quad \mu_j = \frac{E_j}{2(1 + \nu_j)}; \quad \Gamma_j = \frac{P + P_j}{4}; \\ \Gamma_j' &= \frac{P - P_j}{2} \quad (j = 1, 2); \end{aligned} \quad (4)$$

$\Phi_j(z)$ и $\Psi_j(z)$ — голоморфные вне отрезка $[-a, a]$ функции, исчезающие на бесконечности.

Определим $\Phi_1(z)$ в верхней полуплоскости S^+ , а $\Phi_2(z)$ — в нижней полуплоскости S^- по формуле

$\Phi_j(z) = -\overline{\Phi_j(z)} - z\overline{\Phi_j'(z)} - \overline{\Psi_j(z)}$ ($z \in S_k$; $k \neq j$; $k, j = 1, 2$; $S_1 = S^-$, $S_2 = S^+$) и, поступая, как в работе [3], из формул (3) и (4) на действительной оси получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{y1} - i\tau_{xy1} &= \Phi_1^-(x) - \Phi_1^+(x) + A_1(x); \quad 2\mu_1(u_1' + iv_1') = \kappa_1\Phi_1^-(x) + \\ &+ \Phi_1^+(x) + B_1(x); \quad \sigma_{y2} - i\tau_{xy2} = \Phi_2^+(x) - \Phi_2^-(x) + A_2(x); \\ 2\mu_2(u_2' + iv_2') &= \kappa_2\Phi_2^+(x) + \Phi_2^-(x) + B_2(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_j(x) &= A_j + \sum_k [S_{j,k}(x) + \overline{S_{j,k}(x)} + x\overline{S'_{j,k}(x)} + \overline{R_{j,k}(x)}]; \quad A_j = \Gamma_j + \overline{\Gamma_j} + \overline{\Gamma'_j}; \\ B_j(x) &= B_j + \sum_k [\kappa_j S_{j,k}(x) - \overline{S_{j,k}(x)} - x\overline{S'_{j,k}(x)} - \overline{R_{j,k}(x)}]; \\ B_j &= \kappa_j \Gamma_j - \overline{\Gamma_j} - \overline{\Gamma'_j} \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (6)$$

Используя соотношения (5) и решая соответствующие задачи сопряжения, из условий (1) после некоторых преобразований находим

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(x) &= \frac{\mu_1}{c_2} [2\mu_2 X^+(x) + \kappa_2 Y^+(x)]; \quad \Phi_1^-(x) = \frac{\mu_1}{c_1} [-2\mu_2 X^-(x) + Y^-(x)]; \\ \Phi_2^+(x) &= \frac{\mu_2}{c_2} [-2\mu_1 X^+(x) + Y^+(x)]; \quad \Phi_2^-(x) = \frac{\mu_2}{c_1} [2\mu_1 X^-(x) + \kappa_1 Y^-(x)], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} X^\pm(x) &= \pm \frac{1}{2} D^0(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D^0(t) dt}{t-x}; \\ Y^\pm(x) &= \pm \frac{1}{2} [if_0(x) + \Omega(x)] + M(x); \\ M(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(t) dt}{t-x} + \frac{1}{2} t_0(x); \quad t_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_0(t) dt}{t-x}; \\ \omega(x) &= \frac{B_2(x)}{4\mu_2} - \frac{B_1(x)}{4\mu_1}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= A_1(x) - A_2(x); \quad D^0(x) = D_2^0(x) + D_3^0(x); \quad D_2^0(x) = D_2(x) + f_1(x); \\ D_3^0(x) &= D_3(x) + if_2(x); \quad D_1(x) = \Omega(x) + \overline{\Omega(x)}; \quad D_2(x) = \omega(x) + \overline{\omega(x)}; \\ D_3(x) &= \omega(x) - \overline{\omega(x)}; \quad D_4(x) = \Omega(x) - \overline{\Omega(x)}; \quad c_1 = \mu_1 + \kappa_1 \mu_2; \quad c_2 = \mu_2 + \kappa_2 \mu_1. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (7) в формулы (5) и разделяя действительные и мнимые части, получим выражения для напряжений и производных от перемещений:

$$\begin{aligned} \sigma_{y1}(x) &= \sigma_{y2}(x) = \sigma_y^0(x) + l_1 f_1(x) + m_{12} t_0(x) - l_2 t_2(x); \\ \tau_{xy1}(x) &= \tau_{xy}^0(x) + c_{12} f_0(x) - l_1 f_2(x) - l_2 t_1(x); \quad \tau_{xy2}(x) = \tau_{xy1}(x) - f_0(x); \quad (9) \\ \sigma_{x1}(x) &= \sigma_{x1}^0(x) + e_{12} f_1(x) + n_{12} t_0(x) - r_{12} t_2(x); \\ \sigma_{x2}(x) &= \sigma_{x2}^0(x) - e_{21} f_1(x) + n_{21} t_0(x) - r_{21} t_2(x); \\ u_1'(x) &= u^{0'}(x) + c_{21} f_1(x) + q t_0(x) + m_{21} t_2(x); \quad u_2'(x) = u_1'(x) - f_1(x); \\ v_1'(x) &= v^{0'}(x) - r f_0(x) + c_{21} f_2(x) - m_{21} t_1(x); \quad v_2'(x) = v_1'(x) - f_2(x), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \sigma_y^0(x) &= I_1(x) + \operatorname{Re} [l_1 D_2(x) + c_{21} A_1(x) + c_{12} A_2(x)]; \\ \tau_{xy}^0(x) &= I_2(x) - \operatorname{Im} [l_1 D_3(x) + c_{21} A_1(x) + c_{12} A_2(x)]; \\ \sigma_{x1}^0(x) &= I_{12}(x) + e_{12} D_2(x) + 2 \operatorname{Re} [2 \sum_k S_{1,k}(x) + 2\Gamma_1 + q_{21} A_1(x) + p_{12} A_2(x)]; \\ \sigma_{x2}^0(x) &= I_{21}(x) - e_{21} D_2(x) + 2 \operatorname{Re} [2 \sum_k S_{2,k}(x) + 2\Gamma_2 + p_{21} A_1(x) + q_{12} A_2(x)]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u^{0'}(x) &= I_3(x) + \operatorname{Re} \left[\frac{c_{12}}{2\mu_1} B_1(x) + \frac{c_{21}}{2\mu_2} B_2(x) - r\Omega(x) \right]; \\ v^{0'}(x) &= I_4(x) + \operatorname{Im} \left[\frac{c_{12}}{2\mu_1} B_1(x) + \frac{c_{21}}{2\mu_2} B_2(x) - r\Omega(x) \right]; \end{aligned}$$

$$I_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_{12}D_4(t) - 2l_2D_3(t)}{t-x} dt; \quad I_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_{12}D_1(t) - 2l_2D_2(t)}{t-x} dt;$$

$$I_3(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{qD_4(t) + 2m_{12}D_3(t)}{t-x} dt; \quad I_4(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{qD_1(t) + 2m_{12}D_2(t)}{t-x} dt;$$

$$I_{kj}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_{kj}D_4(t) - 2r_{kj}D_3(t)}{t-x} dt; \quad t_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_i(t) dt}{t-x};$$

$$r_{kj} = \mu_1\mu_2 \frac{3c_j - c_k}{c_1c_2}; \quad e_{kj} = \mu_1\mu_2 \frac{3c_j + c_k}{c_1c_2}; \quad q_{kj} = -\left(\frac{\mu_j}{c_i} + \frac{c_{kj}}{2}\right);$$

$$p_{kj} = \frac{\mu_k}{c_k} - \frac{c_{kj}}{2}; \quad c_{kj} = \mu_k \frac{c_j + c_k\alpha_j}{2c_1c_2}; \quad m_{kj} = \mu_k \frac{c_j - c_k\alpha_j}{2c_1c_2};$$

$$n_{kj} = \mu_k \frac{3c_j + c_k\alpha_j}{2c_1c_2}; \quad r = \frac{c_2\alpha_1 - c_1\alpha_2}{4c_1c_2}; \quad q = \frac{c_2\alpha_1 + c_1\alpha_2}{4c_1c_2};$$

$$l_1 = \mu_1\mu_2 \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right); \quad l_2 = \mu_1\mu_2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) \quad (i = 0, 1, 2; k, j = 1, 2);$$

$\sigma_y^0, \sigma_{x1}^0, \sigma_{x2}^0, \tau_{xy}^0, u^{0'}, v^{0'}$ — соответствующие напряжения и производные от перемещений на линии сая полуплоскостей при отсутствии включения.

Подстановка выражения (9) в условия (2) дает систему сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций $f_i(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_0(t) dt}{t-x} + \frac{n_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_2(t) dt}{t-x} + n_2 f_1(x) - n \int_{-a}^x f_0(t) dt = F_0(x);$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_1(t) dt}{t-x} + a_1 f_0(x) + a_2 f_2(x) + a_3 \int_{-a}^x f_1(t) dt = F_1(x); \quad (|x| \leq a) \quad (11)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_2(t) dt}{t-x} + \frac{b_1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f_0(t) dt}{t-x} + b_2 f_1(x) + b_3 \int_{-a}^x f_0(t) dt + b_4 \int_{-a}^x f_2(t) dt = F_2(x).$$

Здесь

$$F_0(x) = [k_0 N_- - u^{0'}(x) - k_1 \sigma_y^0(x)]/B'; \quad F_1(x) = \frac{\mu_0}{a_4} \left[v^{0'}(x) - \frac{\tau_{xy}^0(x)}{\mu_0} - \frac{c_1^-}{2h} \right];$$

$$F_2(x) = \left[\sigma_y^0(x) + \frac{c_2^-}{2hk_0} - v_0 N_- \right]/l_2;$$

$$B' = q + m_{12}k_1; \quad n = \frac{k_0}{2hB'}; \quad n_1 = \frac{m_{21} - k_1 l_2}{B'}; \quad n_2 = \frac{k_1 l_1 + n_3}{B'};$$

$$n_3 = c_{21} - \frac{1}{2}; \quad a_1 = -\frac{r\mu_0 - n_3}{a_4}; \quad a_2 = -\frac{l_1 + n_3\mu_0}{a_4}; \quad a_3 = \frac{\mu_0}{2ha_4}; \quad (12)$$

$$a_4 = m_{12}\mu_0 - l_2; \quad b_1 = -\frac{r\mu_0}{l_2}; \quad b_2 = -\frac{l_1}{l_2}; \quad b_3 = \frac{v_0}{2hl_2}; \quad b_4 = -\frac{1}{2hk_0 l_2}.$$

Напряжения на бесконечности P, P_1, P_2 удовлетворяют соотношению

$$\mu_2 B_1 = \mu_1 B_2, \quad (13)$$

а функции $f_i(x)$ — условиям

$$\int_{-a}^a f_0(t) dt = 2h(N_+ - N_-); \quad \int_{-a}^a f_1(t) dt = c_1^+ - c_1^-; \quad \int_{-a}^a f_2(t) dt = c_2^+ - c_2^-. \quad (14)$$

Нормальные напряжения на торцах включения определяются из формулы

$$N_{\pm} = \frac{1}{2} [\eta_1 \sigma_{x1}^0(x) + \eta_2 \sigma_{x2}^0(x)]|_{x=\pm a}; \quad \eta_i = \left[\frac{\min(\mu_0, \mu_i)}{\mu_i} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (i = 1, 2), \quad (15)$$

которая более предпочтительна, чем (2.15) из работы [5]. Величины c_1^+ и c_2^+ характеризуют перемещение нижнего края торца включения $x = \pm a$ относительно верхнего края того же торца в направлении осей x и y соответственно, т. е.

$$c_1^{\pm} + ic_2^{\pm} = [(u_1 - u_2) + i(v_1 - v_2)]|_{x=\pm a}$$

и вычисляются по приближенным формулам

$$\begin{aligned} c_1^{\pm} &= -2h \left\{ (1 + \nu_0) \tau_{xy}^0(x) \left[\frac{1}{\max(E_0, E_1)} + \frac{1}{\max(E_0, E_1)} \right] - v^{0'}(x) \right\} \Big|_{x=\pm a}; \\ c_2^{\pm} &= -h \left[\frac{\sigma_y^0(x) - \nu_0 \sigma_{x1}^0(x)}{\max(E_0, E_1)} + \frac{\sigma_y^0(x) - \nu_0 \sigma_{x2}^0(x)}{\max(E_0, E_2)} \right] \Big|_{x=\pm a}. \end{aligned} \quad (16)$$

В случае гибкого нерастяжимого включения ($E_0 \rightarrow \infty$) система уравнений (11) дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f_0(t) + i f_1(t)}{t-x} dt + \frac{rl}{m_{12}} \left[f_0(x) + i f_1(x) \right] &= \frac{l}{m_{12}} v^{0'}(x) + \frac{i}{q} u^{0'}(x), \\ f_2(x) = 0, \quad l = \sqrt{-b_3 m_{12} / r q} \quad (|x| \leq a). \end{aligned} \quad (17)$$

Когда $E_0 \rightarrow 0$, получаем задачу для сцепленных разнородных полуплоскостей с трещиной на линии раздела материалов

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f_1(t) + i f_2(t)}{t-x} dt + b_2 \left[f_1(x) + i f_2(x) \right] &= \frac{1}{l_2} \left[\sigma_y^0(x) - i \tau_{xy}^0(x) \right], \\ f_0(x) = 0 \quad (|x| \leq a). \end{aligned} \quad (18)$$

Решения уравнений (17) и (18) представляются в замкнутой форме [4].

3. Пусть полуплоскости имеют одинаковые механические характеристики ($E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$). Учитывая это, а также переходя к безразмерным координатам

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \zeta = \frac{z}{a},$$

систему уравнений (11) переписываем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(\zeta) d\zeta}{\zeta - \xi} + \frac{n_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(\zeta) d\zeta}{\zeta - \xi} - n' \int_{-1}^{\xi} \varphi_0(\zeta) d\zeta &= \Phi_0(\xi); \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_1(\zeta) d\zeta}{\zeta - \xi} + a_3 \int_{-1}^{\xi} \varphi_1(\zeta) d\zeta &= \Phi_1(\xi); \quad (|\xi| \leq 1) \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(\zeta) d\zeta}{\zeta - \xi} + \frac{b_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_0(\zeta) d\zeta}{\zeta - \xi} + b_3 \int_{-1}^{\xi} \varphi_0(\zeta) d\zeta + b_4 \int_{-1}^{\xi} \varphi_2(\zeta) d\zeta &= \Phi_2(\xi), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_i(\zeta) &= f_i(a\zeta); \quad \Phi_i(\xi) = F_i(a\xi) \quad (i = 0, 1, 2); \\ n' &= an; \quad a_3 = a a_3; \quad b_3 = ab_3; \quad b_4 = ab_4. \end{aligned}$$

Из анализа характеристической части системы (19) следует, что решение системы сингулярных интегральных уравнений имеет вид

$$\varphi_i(\xi) = \frac{\Pi_i(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (i = 0, 1, 2), \quad (|\xi| \leq 1), \quad (20)$$

где $\Pi_i(\xi)$ ($i = 0, 1, 2$) — функции, голоморфные на отрезке $[-1, 1]$. Следовательно, их можно представить рядом

$$\Pi_i(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j^i T_j(\xi) \quad (i = 0, 1, 2), \quad (21)$$

где $T_j(\xi)$ — полиномы Чебышева первого рода, и для решения системы (19) использовать результаты работы [2].

Рассмотрим случай, когда внешняя нагрузка имеет симметричный характер относительно осей x и y . Тогда второе уравнение системы (19) сразу дает решение

$$\varphi_1(\xi) = 0 \quad (|\xi| \leq 1). \quad (22)$$

Вследствие силовой и геометрической симметрии задачи функции $\varphi_0(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$ будут априори нечетными, и $\Pi_i(\xi)$ ($i = 0, 2$) будем искать в виде

$$\Pi_i(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j^i T_{2j+1}(\xi) \quad (i = 0, 2). \quad (23)$$

Условия (14) в этом случае удовлетворяются автоматически. Подставляя выражения (20) и (23) в первое и третье уравнения системы (19) и используя формулу

$$\int_{-1}^1 \frac{T_j(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi-\xi)} = \pi U_{j-1}(\xi) \quad (|\xi| \leq 1; j = 0, 1, \dots),$$

где $U_j(\xi)$ — полиномы Чебышева второго рода, $U_{-1}(\xi) \equiv 0$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_0(\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \{[U_{2j}(\xi) + n'h_{2j+1}(\xi)] A_j^0 + n_1 U_{2j}(\xi) A_j^2\}; \\ \Phi_2(\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \{[b_1 U_{2j}(\xi) - b'_3 h_{2j+1}(\xi)] A_j^0 + [U_{2j}(\xi) - b'_4 h_{2j+1}(\xi)] A_j^2\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$h_j(\xi) = - \int_{-1}^{\xi} \frac{T_j(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi.$$

Используя соотношения ортогональности

$$\int_{-1}^1 U_i(\xi) U_j(\xi) \sqrt{1-\xi^2} d\xi = \begin{cases} 0 & (i \neq j); \\ \frac{1}{2} \pi & (i = j), \end{cases}$$

после несложных преобразований из (24) получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_i^0 :

$$\frac{\pi}{2} A_i^0 + \sum_{j=0}^{\infty} [r_1 a_{ij} + r_2 \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} a_{kj}] A_j^0 = \Phi_i \quad (i = 0, 1, \dots), \quad (25)$$

а коэффициенты A_j^2 находятся из соотношения

$$A_i^2 = \frac{2}{\pi n_1} \left[\Phi_i^0 - \frac{\pi}{2} A_i^0 - n' \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} A_j^0 \right] \quad (i = 0, 1, \dots), \quad (26)$$

где

$$r_1 = \frac{b'_4 - n' - b'_3 n_1}{r_3}; \quad r_2 = \frac{2n' b'_4}{\pi r_3}; \quad r_3 = b_1 n_1 - 1;$$

$$\Phi_i^k = \int_{-1}^1 \Phi_k(\xi) U_{2i}(\xi) \sqrt{1-\xi^2} d\xi; \quad \Phi_i = \left(n_1 \Phi_i^0 - \Phi_i^0 + \frac{2b'_4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \Phi_j^0 \right) / r_3; \quad (27)$$

$$a_{ij} = \int_{-1}^1 h_{2j+1}(\xi) U_{2i}(\xi) \sqrt{1-\xi^2} d\xi = -\frac{4(2i+1)}{[(2j+1)^2 - 4i^2][(2j+1)^2 - (2i+2)^2]};$$

($k = 0, 2$).

Определим коэффициенты интенсивности напряжений для случая силовой и геометрической симметрии

$$k_1 = k_{1i}^{\pm}; \quad k_2 = k_{2i}^{\pm}; \quad k_3^{\pm} = k_{3i}^{\pm} = -k_{3i}^{\mp};$$

$$k_{1i}^{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm a} \left[\sqrt{\frac{x}{a} - 1} \sigma_{yi}(x) \right], \quad k_{2i}^{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm a} \left| \sqrt{\frac{x}{a} - 1} \sigma_{xi}(x) \right| \quad (|x| > a);$$

$$k_{3i}^{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm a} \left[\sqrt{1 - \frac{x}{a}} \tau_{xyi}(x) \right] \quad (|x| \leq a), \quad (i = 1, 2).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_i(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi-\xi)} = U_{i-1}(\xi) - \text{sign}(\xi) \frac{T_i(\xi)}{\sqrt{\xi^2-1}} \quad (|\xi| > 1; i = 0, 1, \dots),$$

получим

$$k_1 = -m_{12}K_0 + l_2K_2; \quad k_2 = -n_{12}K_0 + r_{12}K_2; \quad k_3 = c_{12}K_0; \quad (28)$$

$$K_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{\infty} A_j^i \quad (i = 0, 2).$$

На ЭВМ М-222 был проведен численный анализ задачи для симметричного нагружения таких видов: а) $\sigma_y^{\infty} = P$, $P_1 = P_2 = 0$, сосредоточенные силы отсутствуют; б) $\sigma_{x1}^{\infty} = \sigma_{x2}^{\infty} = P_1 = P_2$, $P = 0$, сосредоточенные силы отсутствуют; в) напряжения на бесконечности отсутствуют, а в точках $z = \pm id$ приложены сосредоточенные силы $\pm iQ$ соответственно.

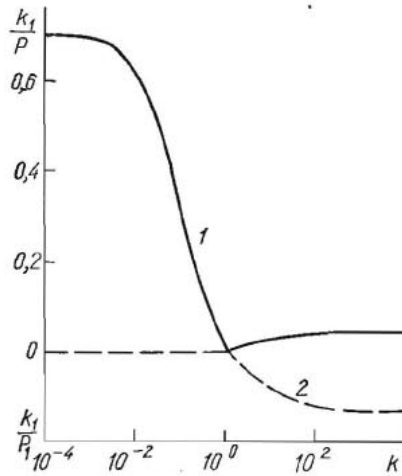


Рис. 2.

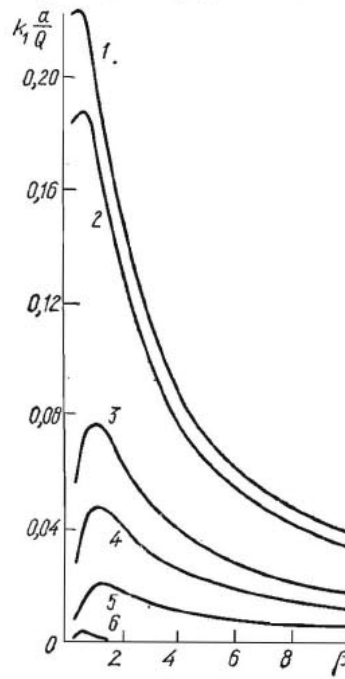


Рис. 3.

Система уравнений (25) решалась методом редукции, т. е. в разложении (23) бралось конечное число членов N и в результате рассматривалась конечная система линейных алгебраических уравнений. Контроль сходимости проводился двумя методами: первый — сравнение функций $\varphi_i^N(\xi)$ ($i = 0, 2$), вычисленных при $N = M$ и $N = 2M$ соответственно; второй — сравнение

точности удовлетворения найденными функциями $\varphi_i^N(\xi)$ исходной системе интегральных уравнений (19). Во всех рассмотренных случаях оказалось возможным для достижения точности 1% ограничиться $N = 25$.

Вычисления проводились при следующих значениях параметров:

$$\frac{a}{h} = 10, E_1 = E_2 = E, \nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{3}.$$

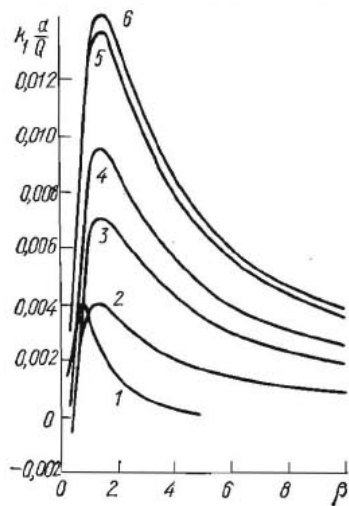


Рис. 4.

Рис. 2 иллюстрирует зависимость коэффициентов интенсивности нормальных напряжений k_1 от относительной жесткости включения $k = \frac{E_0}{E}$ для случая а) — кривая 1 и для случая б) — кривая 2. Зависимость k_1 от относительного расстояния между включением и точками приложения сил $\beta = \frac{d}{a}$ (случай в) для различных k представлена на рис. 3, 4. Кривые 1—6 (рис. 3) характеризуются последовательно следующими значениями параметра k : 10^{-3} , 10^{-2} ; 10^{-1} ; 0,2; 0,5; 1, а кривые 1—6 (рис. 4) — значениями параметра k , равными соответственно 1; 2; 5; 10; 10^2 ; 10^3 .

Численные решения, полученные для $k = 10^3$ и $k = 10^{-3}$ с точностью до 1% совпадают с аналитическими решениями для абсолютно жесткого включения и разреза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д.— Прикладная механика, 1973, 9, 10.
2. Морарь Г. А., Попов Г. Я.— ПММ, 1970, 34, 3.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. «Наука», М., 1968.
5. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В.— Прикладная механика, 1972, 8, 11.
6. Хачикян А. С.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1970, 23, 3.
7. Чобанян К. С., Хачикян А. С.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1967, 20, 6.

Львовский государственный университет

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫМИ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Г. С. Кит, М. В. Хай

В настоящее время есть незначительное количество работ, посвященных изучению термоупругого состояния плоскости, ослабленной определенным образом ориентированными прямолинейными трещинами (коллинеарными [3—4], параллельными [5]).

В данной работе исследуется термоупругое состояние плоскости, содержащей произвольно ориентированные теплоизолированные трещины при заданном стационарном температурном поле в сплошной плоскости. Задача приводится к решению системы интегральных уравнений, что позволяет решить ряд новых задач теории трещин.