

4. Підстригач Я. С., Бурак Я. Й.— Вісник АН УРСР, 1970, 12.
 5. Підстригач Я. С., Бурак Я. Й., Галапац Б. П.— ДАН УРСР. Сер. А, 1972, 2.
 6. Седов Л. И. Об основных принципах механики сплошной среды. Изд-во Московского ун-та, М., 1961.
 7. Седов Л. И.— УМН, 1965, 20, 5.
 8. Седов Л. И. Механика сплошной среды. «Наука», М., 1970.

Львовский филиал математической
 физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
 в сентябре 1973 г.

МЕТОД ДИСТОРСИЙ В ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С ТРЕЩИНАМИ

Я. С. Подстригач, В. А. Осадчук, Е. М. Федюк, М. М. Николишин

В настоящей работе предложен способ сведения задач о напряженном состоянии в тонких оболочках с трещинами к решению систем сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

1. **Постановка задачи.** При построении предлагаемого способа будем исходить из представления компонентов тензора $\{e_{ij}\}$ геометрически малой деформации в виде

$$e_{ij} = e_{ij}^{(s)} + e_{ij}^0 \quad (i, j = \alpha, \beta), \quad (1)$$

где e_{ij}^0 — компоненты тензора дисторсии; $e_{ij}^{(s)}$ — компоненты тензора упругой деформации [9]; α, β — криволинейные координаты срединной поверхности оболочки.

Используя статико-геометрическую гипотезу Кирхгофа [3, 6], а также выражение для удельной работы деформации тонкой оболочки (с учетом соотношения (1)) и ее дифференциала [9], устанавливаем связь между усилиями N_1, N_2, S_{12} , моментами M_1, M_2, H_{12} , компонентами деформации срединной поверхности $\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}$ и осредненными по толщине оболочки компонентами тензора дисторсии $\varepsilon_{ij}^0, \kappa_{ij}^0$ [7]:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{D_0}{1-\nu^2} [\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - (\varepsilon_{11}^0 + \nu\varepsilon_{22}^0)], & N_2 &= \frac{D_0}{1-\nu^2} [\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - (\varepsilon_{22}^0 + \nu\varepsilon_{11}^0)], \\ M_1 &= D_1 [\kappa_{11} + \nu\kappa_{22} - (\kappa_{11}^0 + \nu\kappa_{22}^0)], & M_2 &= D_1 [\kappa_{22} + \nu\kappa_{11} - (\kappa_{22}^0 + \nu\kappa_{11}^0)], \\ S_{12} &= \frac{D_0}{2(1+\nu)} (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^0), & H_{12} &= (1-\nu) D_1 (\kappa_{12} - \kappa_{12}^0). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w, & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 w, \\ \kappa_{11} &= -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta_2, & \kappa_{22} &= -\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta_1, \\ \varepsilon_{12} &= \omega_1 + \omega_2, & \kappa_{12} &= \tau_1 + k_1 \omega_2 = \tau_2 + k_2 \omega_1, \\ \omega_1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} u, & \omega_2 &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} v, \\ \tau_1 &= -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta_1, & \tau_2 &= -\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta_2, \\ \theta_1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} - k_1 u, & \theta_2 &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} - k_2 v, & D_0 &= 2Eh, & D_1 &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

A, B, u, v, w, k_1, k_2 — соответственно коэффициенты первой квадратичной формы, перемещения и главные кривизны срединной поверхности оболочки; θ_1, θ_2 — углы поворота нормали; h — полутолщина оболочки; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

На основании соотношения (2), компоненты деформации срединной поверхности запишем так:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(s)} + \varepsilon_{ij}^0, \quad \kappa_{ij} = \kappa_{ij}^{(s)} + \kappa_{ij}^0 \quad (i, j = 1, 2), \quad (4)$$

где $\varepsilon_{ij}^{(s)}$, $\kappa_{ij}^{(s)}$ — компоненты упругой деформации.

Подставляя выражения (2) в уравнения равновесия в усилиях-моментах [9] и учитывая соотношения (3), получаем систему уравнений равновесия тонких оболочек в перемещениях. Так, например, для круговой цилиндрической оболочки ($A = B = R$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$) в случае технической теории [1] эта система имеет вид

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w = q_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (5)$$

где L_{ki} ($i = 1, 2, 3$) — известные линейные дифференциальные операторы порядка не выше второго, а q_k — функции, зависящие от компонент тензора дисторсии [7].

Для бесконечной оболочки решение системы уравнений (5), исчезающее на бесконечности, представим в виде

$$\gamma = \sum_{j=1}^3 L_{j\gamma} \varphi_j + P_{j\gamma} \psi_j \quad (\gamma = u, v, w). \quad (6)$$

Дифференциальные операторы $L_{j\gamma}$, $P_{j\gamma}$ приведены в работе [7]. Функции φ_j , ψ_j определяются из уравнений

$$\begin{aligned} D\varphi_1 &= \varepsilon_{11}^0, & D\varphi_2 &= \varepsilon_{22}^0, & D\varphi_3 &= \varepsilon_{12}^0, \\ D\psi_1 &= R\kappa_{11}^0, & D\psi_2 &= R\kappa_{22}^0, & D\psi_3 &= R\kappa_{12}^0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$D = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + c^{-2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad c^2 = \frac{h^2}{3R^2(1-\nu^2)}.$$

Решение уравнений (7) при произвольном распределении поля дисторсии в некоторой области Ω приведено в работе [8].

Функции φ_j , ψ_j являются разрешающими функциями задачи, поскольку вычисление величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние оболочки сводится по существу к действию на них соответствующих линейных дифференциальных операторов.

Приведенные результаты можно использовать, в частности, при решении задач для оболочек с трещинами. Так, например, для круговой цилиндрической оболочки с трещиной вдоль образующей $|\alpha| \leq \alpha_0$, $\beta = 0$ в случае, когда к ее противоположным берегам приложены равные по величине и противоположно направленные произвольно изменяющиеся вдоль берегов усилия и моменты, на основании приведенных выше соотношений имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}^0(\alpha, \beta) &= \varepsilon_2(\alpha) \delta(\beta), & \varepsilon_{12}^0(\alpha, \beta) &= \varepsilon_3(\alpha) \delta(\beta), & \kappa_{22}^0(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{R} \kappa_2(\alpha) \delta(\beta) - \\ & - \frac{1}{R} \kappa(\alpha) \delta'(\beta), & \kappa_{12}^0(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{R} \frac{d}{d\alpha} \kappa(\alpha) \delta(\beta) \quad \text{при } |\alpha| < \alpha_0, \\ \varepsilon_{12}^0 &= \varepsilon_{22}^0 = \kappa_{12}^0 = \kappa_{22}^0 = 0 \quad \text{при } |\alpha| \geq \alpha_0, & \varepsilon_{11}^0 &= \kappa_{11}^0 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\alpha) &= \frac{1}{R} (v^+ - v^-), & \varepsilon_3(\alpha) &= \frac{1}{R} (u^+ - u^-), \\ \kappa_2(\alpha) &= \theta_2^+ - \theta_2^-, & \kappa(\alpha) &= \frac{1}{R} (w^+ - w^-), \end{aligned} \quad (9)$$

$\delta(\beta)$ — функция Дирака. Здесь индексы «+» и «-» означают, что речь идет о значениях функции, которые она принимает на левом и правом (при движении вдоль положительного направления оси по образующей) краях разреза соответственно.

Подставив выражения (8) в уравнения (7) и решив их, найдем разрешающие функции, а следовательно, и величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние оболочки, вызванное полем дисторсий (8). Прибавляя к найденным величинам усилия, моменты и перемещения в оболочке без трещины и удовлетворяя затем соответствующим условиям на контуре трещины, для определения функций $\varepsilon_2(\alpha)$, $\varepsilon_3(\alpha)$, $\varkappa_2(\alpha)$, $\varkappa(\alpha)$ получаем систему интегральных уравнений.

Проиллюстрируем применение предлагаемого способа при решении конкретных задач для оболочек с трещинами.

2. Цилиндрическая оболочка с системой периодически расположенных трещин. Рассмотрим замкнутую бесконечную цилиндрическую оболочку с системой k параллельных периодически расположенных по окружности трещин $|\alpha| \leq \alpha_0$, $\beta = 2n \frac{\pi}{k}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{k}{2}$ при k четном, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{k-1}{2}$ при k нечетном.

Предположим, что напряженно-деформированное состояние в оболочке без трещины осесимметрично и симметрично относительно сечения $\alpha = 0$. В этом случае напряженно-деформированное состояние в оболочке с k трещинами будет циклически симметричным и, учитывая последнее, будем рассматривать цилиндрическую панель $|\beta| \leq \pi/k$ с трещиной $|\alpha| \leq \alpha_0$, $\beta = 0$. Здесь $\varepsilon_3(\alpha) = \varkappa(\alpha) = 0$ и поле дисторсии (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^0(\alpha, \beta) = \varepsilon_{12}^0(\alpha, \beta) = \varkappa_{11}^0(\alpha, \beta) = \varkappa_{12}^0(\alpha, \beta) = 0, \\ \varepsilon_{22}^0(\alpha, \beta) = \varepsilon_2(\alpha) \delta(\beta), \quad \varkappa_{22}^0(\alpha, \beta) = -\frac{1}{R} \varkappa_2(\alpha) \delta(\beta) \quad \text{при } |\alpha| < \alpha_0, \\ \varepsilon_{22}^0(\alpha, \beta) = \varkappa_{22}^0(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при } |\alpha| \geq \alpha_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя выражения (10) в уравнения (7) и учитывая условия циклической симметрии

$$v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \beta} = 0 \quad \text{при } \beta = \pm \frac{\pi}{k}, \quad (11)$$

для определения разрешающих функций $\varphi_2(\alpha, \beta)$, $\psi_2(\alpha, \beta)$, получаем формулы

$$\begin{aligned} \varphi_2(\alpha, \beta) = \frac{k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos kn\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \varepsilon_2(\xi) \Phi_n^0(\xi - \alpha) d\xi, \\ \psi_2(\alpha, \beta) = -\frac{k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos kn\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \varkappa_2(\xi) \Phi_n^0(\xi - \alpha) d\xi, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0^0(z) = \frac{c^2 |z|^3}{12} - \frac{c \sqrt{2c}}{4} e^{-\frac{|z|}{\sqrt{2c}}} \left(\cos \frac{z}{\sqrt{2c}} + \sin \frac{|z|}{\sqrt{2c}} \right), \\ \Phi_n^0(z) = \frac{1}{X_n} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{-a_{jn} |z|}}{q_{jn} (a_{jn}^2 + b_{jn}^2)} [(b_{jn} C_{jn} - a_{jn} B_{jn}) \cos b_{jn} z + \\ + (a_{jn} C_{jn} + b_{jn} B_{jn}) \sin b_{jn} |z|], \quad n \geq 1, \\ p_{jn} = a_{jn}^2 - b_{jn}^2, \quad q_{jn} = 2a_{jn} b_{jn}, \quad C_{1n} = (p_{2n} - p_{1n})^2 + q_{2n}^2 - q_{1n}^2, \\ C_{2n} = (p_{1n} - p_{2n})^2 + q_{1n}^2 - q_{2n}^2, \quad B_{1n} = 2(p_{2n} - p_{1n}) q_{1n}, \quad B_{2n} = 2(p_{1n} - p_{2n}) q_{2n}, \\ X_n = 2(C_{1n}^2 + B_{1n}^2) = 2(C_{2n}^2 + B_{2n}^2), \quad a_{1n,2n} = \frac{1}{2\sqrt{2c}} (\sqrt{A_n + 4cn^2 k^2} \mp 1), \\ b_{1n,2n} = \frac{1}{2\sqrt{2c}} |\sqrt{A_n - 4cn^2 k^2} \mp 1|, \quad A_n = \sqrt{1 + 16c^2 n^4 k^4}, \\ \lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_n = 1 \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (13)$$

Обозначив через u_0, v_0, w_0 перемещения в оболочке без трещины, а через u_1, v_1, w_1 перемещения, обусловленные полем (10), будем требовать, чтобы суммарные перемещения

$$u = u_0 + u_1, \quad v = v_0 + v_1, \quad w = w_0 + w_1 \quad (14)$$

и соответствующие суммарные усилия в сечении $\beta = 0$ удовлетворяли условиям симметрии и свободных берегов трещины

$$\begin{aligned} S(\alpha, 0) &= 0, & Q_2^*(\alpha, 0) &= 0 \quad \text{для всех } \alpha, \\ v(\alpha, 0) &= 0, & \theta_2(\alpha, 0) &= 0 \quad \text{для } |\alpha| > \alpha_0, \\ N_2(\alpha, 0) &= 0, & M_2(\alpha, 0) &= 0 \quad \text{для } |\alpha| \leq \alpha_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь Q_2^* — обобщенное поперечное усилие [9].

Полученное суммарное напряженно-деформированное состояние будет соответствовать искомому напряженному состоянию в замкнутой цилиндрической оболочке с системой трещин.

Используя формулы (6), (12) и соотношения для определения усилий и моментов (2), а также некоторые результаты работы [4], для определения функций $\varepsilon_2(\alpha)$, $\varkappa_2(\alpha)$ на основании (15) получаем систему интегральных уравнений

$$\mu_0 \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 F_i(u) K_{mi}[\mu_0(u-s)] du = \pi f_{m0}(s), \quad |s| \leq 1 \quad (m = 1, 2), \quad (16)$$

где a — полудлина трещины; $\mu_0 = \frac{a}{R}$, $s = \frac{\alpha}{\mu_0}$,

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{d}{d\alpha} \varepsilon_2(\alpha), & F_2 &= \frac{d}{d\alpha} \varkappa_2(\alpha), \\ f_{10}(s) &= \frac{2}{Ehk} N_2(s, 0), & f_{20}(s) &= \frac{2}{Ehk} M_2(s, 0). \end{aligned}$$

Ядра системы имеют вид

$$\begin{aligned} K_{11}(z) &= \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{kz}{2} + K_{11}^0(z), & K_{22}(z) &= \frac{a_2}{2} \operatorname{cth} \frac{kz}{2} + K_{22}^0(z), \\ K_{12}(z) &= K_{21}(z) = \frac{R}{48} \left\{ [(1-\nu)kz \operatorname{csch} kz - 3(1-3\nu)] z^2 \operatorname{cth} \frac{kz}{2} + \right. \\ &\quad \left. + 3(1-3\nu) z^2 \operatorname{sgn} z \right\} + \nu c R e^{-\frac{|z|}{\sqrt{2c}}} \sin \frac{z}{\sqrt{2c}} - \\ &\quad - 4R \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{X_n} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{-a_{jn}|z|}}{q_{jn}} (D_{jn}^{(1)} \cos b_{jn} z \operatorname{sgn} z + D_{jn}^{(2)} \sin b_{jn} z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{96} e^{-kn|z|} [(1-\nu)knz^3 - 3(1-3\nu)z^2 \operatorname{sgn} z] \right\}, \quad (17) \\ K_{11}^0(z) &= \frac{1}{2} (1 - kz \operatorname{csch} kz) \operatorname{cth} \frac{kz}{2} - \left(1 + e^{-\frac{|z|}{\sqrt{2c}}} \cos \frac{z}{\sqrt{2c}} \right) \operatorname{sgn} z - \\ &\quad - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{X_n} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{-a_{jn}|z|}}{q_{jn}} (A_{jn}^{(1)} \cos b_{jn} z \operatorname{sgn} z + A_{jn}^{(2)} \sin b_{jn} z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} e^{-kn|z|} \left(\operatorname{sgn} z - \frac{1}{2} knz \right) \right], \\ K_{22}^0(z) &= c^2 R^3 \left[-\frac{(1-\nu)^2}{2} (1 - kz \operatorname{csch} kz) \operatorname{cth} \frac{kz}{2} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2 - \nu^2 - \nu^2 e^{-\frac{|z|}{\sqrt{2c}}} \cos \frac{z}{\sqrt{2c}} \right) \operatorname{sgn} z - \\
& - 4c^2 R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{X_n} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{-a_{jn}|z|}}{q_{jn}} (A_{jn}^{(3)} \cos b_{jn} z \operatorname{sgn} z + A_{jn}^{(4)} \sin b_{jn} z) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} e^{-kn|z|} [(1 - \nu)^2 knz + 2(1 - \nu^2) \operatorname{sgn} z] \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{jn}^{(1)} &= t_{jn} (E_{jn} - 2n^2 k^2 B_{jn}) - s_{jn} (H_{jn} + 2n^2 k^2 C_{jn}) + n^4 k^4 E_{jn}, \\
A_{jn}^{(2)} &= t_{jn} (H_{jn} + 2n^2 k^2 C_{jn}) + s_{jn} (E_{jn} - 2n^2 k^2 B_{jn}) + n^4 k^4 H_{jn}, \\
A_{jn}^{(3)} &= (1 - \nu^2) (t_{jn} E_{jn} - s_{jn} H_{jn}) - 2(2 - \nu - \nu^2) n^2 k^2 (s_{jn} C_{jn} + t_{jn} B_{jn}) + \\
&+ (5 - 4\nu - \nu^2) n^4 k^4 E_{jn} - 2(1 - \nu) n^6 k^6 B_{jn} + c^{-2} E_{jn}, \\
A_{jn}^{(4)} &= (1 - \nu^2) (t_{jn} H_{jn} + s_{jn} E_{jn}) - 2(2 - \nu - \nu^2) n^2 k^2 (s_{jn} B_{jn} - t_{jn} C_{jn}) + \\
&+ (5 - 4\nu - \nu^2) n^4 k^4 H_{jn} - 2(1 - \nu) n^6 k^6 C_{jn} + c^{-2} H_{jn}, \\
D_{jn}^{(1)} &= \nu (s_{jn} C_{jn} + t_{jn} B_{jn}) - n^2 k^2 E_{jn}, \quad D_{jn}^{(2)} = \nu (s_{jn} B_{jn} - t_{jn} C_{jn}) - n^2 k^2 H_{jn}, \\
E_{jn} &= p_{jn} B_{jn} + q_{jn} C_{jn}, \quad H_{jn} = q_{jn} B_{jn} - p_{jn} C_{jn}, \\
t_{jn} &= p_{jn}^2 - q_{jn}^2, \quad s_{jn} = 2p_{jn} q_{jn}, \quad a_2 = c^2 R^2 (3 - 2\nu - \nu^2).
\end{aligned}$$

Функции K_{11}^0 , K_{22}^0 , K_{12} непрерывны для всего множества действительных значений s и u .

Вводя новые переменные τ , t , систему уравнений (16) представляем в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_m(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{G_m(t)}{a_m(1 - \lambda^2 t^2)}, \quad |t| \leq 1 \quad (m = 1, 2), \quad (18)$$

где

$$\Omega_m(\tau) = \frac{F_m[\omega(\tau, 0)]}{1 - \lambda^2 \tau^2}, \quad G_m(t) = k f_m(t, 0) - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \Omega_j(\tau) \Psi_{mj}(\tau, t) d\tau,$$

$$\Psi_{11} = 2K_{11}^0(\omega), \quad \Psi_{12} = \Psi_{21} = 2K_{12}(\omega), \quad a_1 = 1,$$

$$\Psi_{22} = 2K_{22}^0(\omega), \quad f_m(t, 0) = f_{m0}[\omega(t, 0), 0], \quad \lambda = \operatorname{th} \frac{k\mu_0}{2},$$

$$\omega = \omega(\tau, t) = \frac{2}{k} \operatorname{Arth} \frac{\lambda(\tau - t)}{1 - \lambda^2 \tau t}, \quad \tau = \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \frac{k\mu_0 u}{2}, \quad t = \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \frac{k\mu_0 s}{2}.$$

Решение системы уравнений (18) будем искать в виде рядов по полиномам Чебышева

$$\Omega_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_{2n+1}(t), \quad \Omega_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n T_{2n+1}(t). \quad (19)$$

Здесь $T_j(t)$ — полиномы Чебышева первого рода; A_n , B_n — неизвестные коэффициенты.

Подставляя выражения (19) в уравнения (18) и учитывая, что

$$\int_{-1}^1 \frac{T_j(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} \cdot \frac{d\tau}{\tau - t} = \begin{cases} 0, & j = 0, \\ \pi U_{j-1}(t), & j \geq 1, \end{cases} \quad (20)$$

где $U_j(t)$ — полиномы Чебышева второго рода, а также свойство ортого-

нальности полиномов Чебышева, для определения коэффициентов A_n , B_n , аналогично [11], получаем систему алгебраических уравнений

$$\frac{\pi}{2} A_n + \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} A_j + \sum_{j=0}^{\infty} b_{nj} B_n = g_{1n}, \quad (21)$$

$$\frac{\pi}{2} B_n + \frac{1}{a_2} \sum_{j=0}^{\infty} b_{nj} A_j + \frac{1}{a_2} \sum_{j=0}^{\infty} c_{nj} B_n = g_{2n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где
$$g_{in} = k \int_{-1}^1 \frac{f_i(t, 0)}{1 + \lambda^2 t^2} U_{2n}(t) \sqrt{1 - t^2} dt \quad (i = 1, 2),$$

$$d_p = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + \lambda^2 t^2} \left[\int_{-1}^1 \frac{T_{2j+1}(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}} F_p(\tau, t) d\tau \right] U_{2n}(t) \sqrt{1 - t^2} dt \quad (p = 1, 2, 3),$$

$$d_1 = a_{nj}, \quad d_2 = b_{nj}, \quad d_3 = c_{nj}, \quad F_1 = \Psi_{11}, \quad F_2 = \Psi_{12}, \quad F_3 = \Psi_{22}.$$

Определив функции $\Omega_m(t)$, для нахождения главной части усилия N_2 и момента M_2 на линии трещины в окрестности ее вершины достаточно ограничиться сингулярной частью ядра, т. е. принять

$$T_m^* = -\frac{ka_m E h (1 - \lambda^2 t^2)}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Omega_m(\tau)}{\tau - t} d\tau + o(1), \quad |t| > 1 \quad (m = 1, 2), \quad (22)$$

где

$$T_1^* = N_2(t, 0), \quad T_2^* = M_2(t, 0).$$

Подставляя выражения (19) в соотношения (22), для определения коэффициентов интенсивности

$$k_m^* = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} T_m^* \quad (m = 1, 2),$$

где r — расстояние вдоль линии трещины от ее вершины, получаем формулы

$$k_1^* = k_1^0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad k_2^* = k_2^0 \sum_{n=0}^{\infty} B_n, \quad k_m^0 = \frac{ka_m E h R \sqrt{R}}{\sqrt{2a}} \sqrt{\lambda (1 - \lambda^2)}.$$

3. Пологая сферическая оболочка с трещиной вдоль параллели. Предлагаемый в настоящей работе метод дает возможность привести задачу о напряженно-деформированном состоянии в сферической оболочке с трещиной, расположенной вдоль параллели, к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

Исходя из представления компонентов тензора геометрически малой деформации в виде (1), для полой сферической оболочки ($A = R\sqrt{c}$, $B = R\sqrt{c\xi}$, $k = k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$) запишем систему дифференциальных уравнений относительно функции напряжений φ и функции прогибов w :

$$\frac{1}{D_0 R c} \nabla^2 \nabla^2 \varphi - \nabla^2 w = -R F_1^0(\xi, \beta), \quad (23)$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{D_1}{R c} \nabla^2 \nabla^2 w = -D_1 R F_2^0(\xi, \beta),$$

где

$$F_1^0 = \nabla^2 \varepsilon_{22}^0 - \left(\frac{1}{\xi} \nabla_1 - \nabla_2^2 \right) (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) - \left(\nabla_1 + \frac{1}{\xi} \right) \nabla_2 \varepsilon_{12}^0,$$

$$F_2^0 = \nabla^2 (\varkappa_{11}^0 + \nu \varkappa_{22}^0) + (1 - \nu) \left(\frac{1}{\xi} \nabla_1 - \nabla_2^2 \right) (\varkappa_{11}^0 - \varkappa_{22}^0) + 2 \left(\nabla_1 + \frac{1}{\xi} \right) \nabla_2 \varkappa_{12}^0,$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\xi} \nabla_1 (\xi \nabla_1) + \nabla_2^2, \quad \nabla_1 = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \nabla_2 = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad \xi = \frac{r}{R \sqrt{c}},$$

r — полярный радиус, R — радиус срединной поверхности оболочки. При этом для определения усилий и моментов получим формулы

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{R^2 c} \left(\frac{1}{\xi} \nabla_1 + \nabla_2^2 \right) \varphi, \quad N_2 = \frac{1}{R^2 c} \nabla_1^2 \varphi, \\
 M_1 &= -D_0 c \left[\nabla_1^2 \omega + \nu \left(\frac{1}{\xi} \nabla_1 + \nabla_2^2 \right) \omega + R^2 c (\kappa_{11}^0 + \nu \kappa_{22}^0) \right], \\
 M_2 &= -D_0 c \left[\left(\frac{1}{\xi} \nabla_1 + \nabla_2^2 \right) \omega + \nu \nabla_1^2 \omega + R^2 c (\kappa_{22}^0 + \nu \kappa_{11}^0) \right], \\
 S &= -\frac{1}{R^2 c} \left(\nabla_1 - \frac{1}{\xi} \right) \nabla_2 \varphi, \quad H = -D_0 c (1 - \nu) \left[\left(\nabla_1 - \frac{1}{\xi} \right) \nabla_2 \omega + R^2 c \kappa_{12}^0 \right], \\
 Q_1 &= -\frac{D_0 \sqrt{c}}{R} \left\{ \nabla_1 \nabla^2 \omega + R^2 c \left[\nabla_1 (\kappa_{11}^0 + \nu \kappa_{22}^0) + (1 - \nu) \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \left(\frac{\kappa_{11}^0 - \kappa_{22}^0}{\xi} + \nabla_2 \kappa_{12}^0 \right) \right] \right\}, \\
 Q_2 &= -\frac{D_0 \sqrt{c}}{R} \left\{ \nabla_2 \nabla^2 \omega + R^2 c \left[\nabla_2 (\kappa_{22}^0 + \nu \kappa_{11}^0) + (1 - \nu) \left(\nabla_1 + \frac{2}{\xi} \right) \kappa_{12}^0 \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Рассмотрим «бесконечную» пологую сферическую оболочку с трещиной, расположенной вдоль параллели $\xi = \xi_0$, $|\beta| \leq \beta_0$. Предположим, что усилия и моменты, приложенные к противоположным берегам трещины равны по величине и противоположно направлены. В этом случае, учитывая соотношения (3), (4), поле дисторсий записываем в виде

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}^0(\xi, \beta) &= \varepsilon_1(\beta) \delta(\xi - \xi_0), \quad \varepsilon_{12}^0(\xi, \beta) = \varepsilon_3(\beta) \delta(\xi - \xi_0), \\
 \kappa_{11}^0(\xi, \beta) &= \kappa_1(\beta) \delta(\xi - \xi_0) + \xi_0 \kappa_4(\beta) \nabla_1 \delta(\xi - \xi_0) \quad \text{при } |\beta| < \beta_0, \\
 \kappa_{22}^0(\xi, \beta) &= \kappa_4(\beta) \delta(\xi - \xi_0), \quad \kappa_{12}^0(\xi, \beta) = \kappa_3(\beta) \delta(\xi - \xi_0), \\
 \varepsilon_{ij}^0(\xi, \beta) &= \kappa_{ij}^0(\xi, \beta) = 0 \quad (i, j = 1, 2) \\
 &\quad \text{при } |\beta| \geq \beta_0, \quad \varepsilon_{22}^0(\xi, \beta) = 0,
 \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1(\beta) &= \frac{1}{R \sqrt{c}} (u^+ - u^-), \quad \varepsilon_3(\beta) = \frac{1}{R \sqrt{c}} (v^+ - v^-), \\
 \kappa_1(\beta) &= -\frac{1}{R \sqrt{c}} (\theta_1^+ - \theta_1^-), \quad \kappa_3(\beta) = -\frac{1}{R \sqrt{c}} (\theta_2^+ - \theta_2^-), \quad \kappa_4(\beta) = \int \kappa_3(\beta) d\beta.
 \end{aligned}$$

Подставив соотношения (25) в уравнения (23) и решив последние, для разрешающих функций φ и ω получим выражения

$$\begin{aligned}
 \omega(\xi, \beta) &= \frac{R}{2\pi} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \{ -\varepsilon_1(\theta) \Phi_1(\xi, \beta - \theta) + \varepsilon_3(\theta) \Phi_3(\xi, \beta - \theta) + \\
 &+ R c [\kappa_1(\theta) F_1(\xi, \beta - \theta) - 2\mu \kappa_3(\theta) \Phi_4(\xi, \beta - \theta) + \kappa_4(\theta) F_3(\xi, \beta - \theta)] \} \xi_0 d\theta, \\
 \varphi(\xi, \beta) &= \frac{D_1}{2\pi c} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \{ -\varepsilon_1(\theta) \Phi_2(\xi, \beta - \theta) + \varepsilon_3(\theta) \Phi_4(\xi, \beta - \theta) + \\
 &+ R c [\kappa_1(\theta) F_2(\xi, \beta - \theta) + 2\mu \kappa_3(\theta) \Phi_3(\xi, \beta - \theta) + \kappa_4(\theta) F_4(\xi, \beta - \theta)] \} \xi_0 d\theta,
 \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \ker \rho + \mu \Phi_2, \quad F_2 = \ker \rho - \mu \Phi_1, \quad F_3 = \psi_1 - \mu \psi_3, \\
 F_4 &= \psi_2 + \mu \psi_4, \quad \psi_1 = \frac{\omega_1}{\rho} \ker' \rho, \quad \psi_2 = \frac{\omega_1}{\rho} \ker'' \rho, \quad \omega_1 = \xi \xi_0 \cos z - \xi_0^2, \\
 \Phi_1 &= X(\xi, z) \frac{\xi^2 \sin^2 z}{\rho^2} - \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\ker' \rho}{\rho} \right), \quad \Phi_3 = X(\xi, z) \frac{(\xi^2 \cos z - \xi \xi_0) \sin z}{\rho^2},
 \end{aligned}$$

$$\Phi_2 = Y(\xi, z) \frac{\xi^2 \sin^2 z}{\rho^2} - \frac{\text{kei}' \rho}{\rho}, \quad \Phi_4 = Y(\xi, z) \frac{(\xi^2 \cos z - \xi \xi_0) \sin z}{\rho^2},$$

$$\Psi_3 = \left(\frac{8 \text{kei}' \rho}{\rho^3} - \frac{4 \text{ker} \rho}{\rho^2} + \frac{\text{ker}' \rho}{\rho} \right) \omega_2 + Y(\xi, z) \omega_3,$$

$$\Psi_4 = \left(\frac{8}{\rho^4} + \frac{8 \text{ker}' \rho}{\rho^3} + \frac{4 \text{kei} \rho}{\rho^2} - \frac{\text{kei}' \rho}{\rho} \right) \omega_2 + X(\xi, z) \omega_3,$$

$$X = \frac{2}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} \text{ker}' \rho + \text{kei} \rho, \quad Y = \frac{2}{\rho} \text{kei}' \rho - \text{ker} \rho,$$

$$\rho^2 = \xi^2 + \xi_0^2 - 2\xi\xi_0 \cos z,$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\rho^2} \xi^2 \xi_0 \sin^2 z (\xi \cos z - \xi_0), \quad \omega_3 = \frac{1}{\rho^2} (\xi \xi_0 \cos z - \xi^2 \cos 2z),$$

$$\mu = 1 - \nu, \quad z = \beta - \theta, \quad \text{kei}' \rho = \frac{d}{d\rho} \text{kei} \rho, \quad \text{ker}' \rho = \frac{d}{d\rho} \text{ker} \rho,$$

$\text{kei} \rho, \text{ker} \rho$ — функции Кельвина.

Подставив затем выражения (26) в соотношения (24), получим формулы для определения затухающих на «бесконечности» усилий и моментов в произвольной точке оболочки, обусловленных полем (25).

Условия на контуре трещины запишем так:

$$N_1(\xi_0, \beta) = f_1(\beta), \quad M_1(\xi_0, \beta) = f_2(\beta), \quad (27)$$

$$S(\xi_0, \beta) = f_3(\beta), \quad Q_1^*(\xi_0, \beta) = f_4(\beta), \quad |\beta| \leq \beta_0,$$

где N_1, S, Q_1^* — соответственно нормальное, касательное и обобщенное поперечное усилия, M_1 — изгибающий момент, определяемые на контуре трещины как сумма усилий и моментов, вызванных полем (25) и соответствующих усилий и моментов в оболочке без трещины.

В случае свободных берегов трещины $f_i(\beta) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), используя формулы (24) — (26), на основании соотношений (27) для определения функций $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \kappa_1, \kappa_3$ получаем систему сингулярных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\sum_{m=1}^4 \int_{-\beta_0}^{\beta_0} F_{im}(\theta) K_{im}(\beta - \theta) d\theta = f_{i0}(\beta), \quad |\beta| \leq \beta_0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (28)$$

Здесь

$$F_{11} = F_{31} = \frac{d}{d\theta} \varepsilon_1(\theta), \quad F_{12} = F_{32} = \varepsilon_3(\theta), \quad F_{13} = F_{33} = \frac{d}{d\theta} \kappa_1(\theta),$$

$$F_{14} = F_{34} = \kappa_3(\theta), \quad F_{21} = F_{41} = \varepsilon_1(\theta), \quad F_{22} = F_{42} = \frac{d}{d\theta} \varepsilon_3(\theta),$$

$$F_{23} = F_{43} = \kappa_1(\theta), \quad F_{24} = F_{44} = \frac{d}{d\theta} \kappa_3(\theta), \quad K_{11} = \frac{1}{2} \text{ctg} \frac{z}{2} - K_{11}^0,$$

$$K_{12} = -\frac{1}{2} \text{ctg} \frac{z}{2} + K_{12}^0, \quad K_{13} = -RcK_{13}^0, \quad K_{14} = RcK_{14}^0,$$

$$K_{21} = \frac{1}{2} \text{ctg} \frac{z}{2} - K_{21}^0, \quad K_{22} = \frac{1}{2} \text{ctg} \frac{z}{2} + K_{22}^0, \quad K_{23} = -RcK_{23}^0,$$

$$K_{24} = RcK_{24}^0, \quad K_{31} = -K_{31}^0, \quad K_{32} = K_{32}^0, \quad K_{33} = Rc \left(\frac{a_2}{2} \text{ctg} \frac{z}{2} - K_{33}^0 \right),$$

$$K_{34} = Rc \left(-\frac{a_2}{2} \text{ctg} \frac{z}{2} + K_{34}^0 \right), \quad K_{41} = -K_{41}^0, \quad K_{42} = K_{42}^0,$$

$$K_{43} = Rc \left(\frac{a_2}{2} \text{ctg} \frac{z}{2} - K_{43}^0 \right), \quad K_{44} = Rc \left(\frac{a_2}{2} \text{ctg} \frac{z}{2} + K_{44}^0 \right),$$

$$K_{11}^0 = \Psi_1(z) + \chi(x) \left(\text{ctg} \frac{z}{2} - \frac{1}{2} \sin z \right) + 2 \int_0^z \chi(x) \cos^2 \frac{z}{2} dz,$$

$$\begin{aligned}
K_{12}^0 &= K_{21}^0 = \frac{1}{2} [\chi(x) + x^2 \operatorname{kei} x] \operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \frac{1}{4} x^2 \operatorname{kei} x \sin z, \\
K_{13}^0 &= K_{31}^0 = x \operatorname{kei}' x \operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \mu \left[\Psi_2(z) - x \operatorname{kei}' x \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \sin z \right) \right] + \int_0^z x \operatorname{kei}' x (\nu - \mu \cos z) dz, \\
K_{14}^0 &= K_{41}^0 = 2\xi_0^2 \int_0^z x \operatorname{ker}' x \cos^2 \frac{z}{2} dz + K_{23}^0, \\
K_{22}^0 &= \Psi_1(z) + \frac{1}{2} \chi(x) \sin z, \quad K_{23}^0 = K_{32}^0 = \left(x \operatorname{kei}' x - \frac{1}{2} x^2 \operatorname{ker} x \right) \operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \\
&\quad - \frac{\mu}{2} \left[\left(x \operatorname{kei}' x - x^2 \operatorname{ker} x \right) \operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \frac{1}{2} x^2 \operatorname{ker} x \sin z \right], \\
K_{24}^0 &= K_{42}^0 = -x \operatorname{kei}' x \operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \mu \left[\Psi_2(z) - \frac{1}{2} x \operatorname{kei}' x \sin z \right] + \\
&\quad + \int_0^z \left[x \operatorname{kei}' x - \frac{1}{2} x^2 \operatorname{ker} x \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2} - 1 \right) \right] dz, \\
K_{33}^0 &= (1 - \nu^2) \chi(x) \operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \mu^2 \left[\Psi_1(z) - \frac{1}{2} \chi(x) \sin z \right] + \\
&\quad + \int_0^z [2\xi_0^2 \operatorname{kei} x + (1 - \nu^2 - \mu^2 \cos z) \chi(x)] dz, \\
K_{34}^0 &= K_{43}^0 = 2\mu \left[\chi(x) + \frac{1}{2} x^2 \operatorname{kei} x \right] \operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \mu^2 K_{12}^0 + \\
&\quad + \xi_0^2 \int_0^z x \operatorname{kei}' x (\nu - \mu \cos z) dz, \\
K_{44}^0 &= -2\mu \chi(x) \operatorname{ctg} \frac{z}{2} - \mu^2 \left[\Psi_1(z) + \frac{1}{2} \chi(x) \sin z \right] + \\
&\quad + \int_0^z \left\{ x \operatorname{ker}' x - \frac{1}{2} x^2 \operatorname{kei} x \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2} - 1 \right) + \mu [\chi(x) + x^2 \operatorname{kei} x] \right\} dz - \\
&\quad - \xi_0^2 \int_0^z \int_0^z \left[x \operatorname{kei}' x \left(\frac{\mu}{2} \sin z - \operatorname{ctg} \frac{z}{2} \right) \right] dz dz - 2\xi_0^4 \int_0^z \int_0^z \int_0^z \operatorname{ker} x \cos z dz dz dz, \\
\Psi_1(z) &= \left(\frac{2}{x} \operatorname{kei}' x - \operatorname{ker} x - \frac{1}{2} \right) \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \sin z \right), \quad \chi(x) = 1 + x \operatorname{ker}' x, \\
\Psi_2(z) &= \left(\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} \operatorname{ker}' x + \operatorname{kei} x \right) \left(\operatorname{ctg} \frac{z}{2} + \sin z \right), \quad x = 2\xi_0 \sin \frac{z}{2}, \\
C_1 &= \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \varepsilon_1(\theta) d\theta, \quad C_2 = (1 - \nu^2) R c \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \kappa_1(\theta) d\theta, \quad b = \frac{4\pi\xi_0}{D_0}, \\
f_{10}(\beta) &= bN_{10}(\xi_0, \beta) - C_1, \quad f_{20}(\beta) = bS_0(\xi_0, \beta), \quad a_2 = 3 - 2\nu - \nu^2, \\
f_{30}(\beta) &= \frac{b}{Rc} M_{10}(\xi_0, \beta) - C_2, \quad f_{40}(\beta) = \frac{b}{Rc} \int Q_{10}^*(\xi_0, \beta) \xi_0 d\beta + B_0,
\end{aligned}$$

N_{10} , S_0 , Q_{10}^* — соответственно нормальное, касательное и обобщенное поперечное усилия, M_{10} — изгибающий момент на линии $\xi = \xi_0$, $|\beta| \leq \beta_0$, вызванные внешней нагрузкой в оболочке без трещины; B_0 — постоянная

интегрирования. Функции K_{im}^0 непрерывны для всего множества действительных значений β , θ .

В новых переменных

$$s = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad t = \frac{1}{\lambda} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \lambda = \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} \quad (29)$$

система уравнений (28) принимает вид

$$\sum_{m=1}^4 \int_{-1}^1 \Omega_{im}(t) \Psi_{im}(s, t) dt = f_m(s), \quad |s| \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{im}(t) &= \frac{F_{im}[\omega(t, 0)]}{1 + \lambda^2 t^2}, \quad f_m(s) = \frac{f_{m0}[\omega(s, 0)]}{1 + \lambda^2 s^2}, \\ \Psi_{jk} &= \Psi_{kj} = p(\lambda, s) K_{jk}(\omega) \quad (j = 1, 2; \quad k = 3, 4), \\ \Psi_{11} &= -\frac{1}{t-s} - p(\lambda, s) K_{11}^0(\omega), \quad \Psi_{22} = -\frac{1}{t-s} - p(\lambda, s) \left[\frac{\lambda s}{2} - K_{22}^0(\omega) \right], \\ \Psi_{12} &= \frac{1}{t-s} + p(\lambda, s) K_{12}^0(\omega), \quad \Psi_{21} = -\frac{1}{t-s} - p(\lambda, s) \left[\frac{\lambda s}{2} + K_{21}^0(\omega) \right], \\ \Psi_{33} &= -Rc \left[\frac{a_2}{t-s} + p(\lambda, s) K_{33}^0(\omega) \right], \\ \Psi_{44} &= -Rc \left\{ \frac{a_2}{t-s} + p(\lambda, s) \left[\frac{a_2 \lambda s}{2} - K_{44}^0(\omega) \right] \right\}, \\ \Psi_{34} &= Rc \left[\frac{a_2}{t-s} + p(\lambda, s) K_{34}^0(\omega) \right], \\ \Psi_{43} &= -Rc \left\{ \frac{a_2}{t-s} + p(\lambda, s) \left[\frac{a_2 \lambda s}{2} + K_{43}^0(\omega) \right] \right\}, \\ \omega &= \omega(s, t) = 2 \operatorname{Arctg} \frac{\lambda(s-t)}{1 + \lambda^2 st}, \quad p(\lambda, s) = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2 s^2}. \end{aligned}$$

Для определения напряженно-деформированного состояния в бесконечной пластинке ($k = 0$) с трещиной по дуге окружности $r = r_0$, $|\beta| \leq \beta_0$ из системы уравнений (28) получим систему интегральных уравнений:

в случае плоского напряженного состояния

$$\frac{1}{2} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \Phi_{i0}(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\beta - \theta}{2} d\theta = T_i(\beta), \quad |\beta| \leq \beta_0 \quad (i = 1, 2); \quad (31)$$

в случае изгиба

$$\frac{a_2}{2} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \Psi_{i0}(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\beta - \theta}{2} d\theta = S_i(\beta), \quad |\beta| \leq \beta_0 \quad (i = 1, 2). \quad (32)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_{10}(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \varepsilon_1(\theta) - \varepsilon_3(\theta), \quad \Phi_{20}(\theta) = \varepsilon_1(\theta) + \frac{d}{d\theta} \varepsilon_3(\theta), \\ \Psi_{10}(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \kappa_1(\theta) - \kappa_3(\theta), \quad \Psi_{20}(\theta) = \kappa_1(\theta) + \frac{d}{d\theta} \kappa_3(\theta), \\ T_1(\beta) &= \frac{b_0}{D_0} N_{10}(r_0, \beta) - C_1, \quad T_2(\beta) = \frac{b_0}{D_0} S_0(r_0, \beta), \\ S_1(\beta) &= \frac{b_0}{D_1} M_1(r_0, \beta) - C_0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$S_2(\beta) = \frac{b_0}{D_1} \int Q_{10}^*(r_0, \beta) r_0 d\beta + A_0, \quad C_0 = (1 - \nu^2) \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \kappa_1(\theta) d\theta, \quad b_0 = 4\pi r_0,$$

A_0 — постоянная интегрирования.

В переменных (29) систему уравнений (32) запишем в форме

$$\int_{-1}^1 \frac{\Omega_i(t)}{t-s} dt = -\frac{\rho(\lambda, s)}{2\lambda a_2} \{S_i[\omega(s, 0)] + B_1 s \delta_{2i}\}, \quad |s| \leq 1 \quad (i = 1, 2), \quad (34)$$

где δ_{2i} — символ Кронекера;

$$\Omega_i(t) = \frac{\Psi_{i0}[\omega(t, 0)]}{1 + \lambda^2 t^2}, \quad B_1 = a_2 \lambda^2 \int_{-1}^1 \Omega_2(t) dt. \quad (35)$$

В случае чистого изгиба $Q_{10}^* = 0$ решение системы интегральных уравнений (34) можно записать так:

$$\Omega_1(s) = -\frac{q \sqrt{\lambda^2 + 1}}{a_2} \cdot \frac{s}{\sqrt{1 - s^2} (1 + \lambda^2 s^2)}, \quad (36)$$

$$\Omega_2(s) = \frac{C_0 \sqrt{\lambda^2 + 1}}{2\pi\lambda (1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - s^2} (1 + \lambda^2 s^2)}, \quad q = \frac{1}{\pi} \left(\frac{b_0}{D_1} M_{10} - C_0 \right),$$

где M_{10} — приложенный на бесконечности изгибающий момент.

На основании (33), (35) и (36) для определения функций κ_1 и κ_3 получим дифференциальные уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{d\beta^2} + 1 \right) \kappa_1(\beta) = -\frac{\sqrt{\lambda^2 + 1}}{2\sqrt{\lambda^2 - \tau^2}} \left(\frac{q\lambda^2}{a_2} \cdot \frac{1 + \tau^2}{\lambda^2 - \tau^2} - \frac{C_0}{\pi(1 - \nu^2)} \right), \quad (37)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\beta^2} + 1 \right) \kappa_3(\beta) = \frac{\sqrt{\lambda^2 + 1} \tau}{\sqrt{\lambda^2 - \tau^2}} \left(\frac{C_0}{4\pi(1 - \nu^2)} \cdot \frac{1 + \tau^2}{\lambda^2 - \tau^2} + \frac{q}{a_2} \right), \quad \tau = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Решая уравнения (37), при $r_0 = 1$, $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ находим

$$\kappa_1(\beta) = A_1 M_{10} \cos \frac{\beta}{2} \sqrt{\cos \beta}, \quad \kappa_3(\beta) = -A_1 M_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\cos \beta}, \quad (38)$$

где

$$A_1 = \frac{8\sqrt{2}}{(5 - 2\nu - 3\nu^2) D_1}.$$

Используя выражения (38), в рассматриваемом случае можно определить усилия, моменты и перемещения в произвольной точке пластинки. Так, для определения момента M_1 вдоль окружности $r_0 = 1$, $|\beta| > \frac{\pi}{2}$ имеем

$$M_1 = \frac{a_2 \sqrt{2} M_{10}}{5 - 2\nu - 3\nu^2} \cdot \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}}, \quad |s| > 1 \quad \left(s = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right). \quad (39)$$

Аналогично можно решить систему уравнений (31) и определить напряжения и перемещения в пластинке в случае плоского напряженного состояния. При всестороннем растяжении пластинки с трещиной по окружности $r_0 = 1$, $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$ для определения радиального напряжения σ_{rr} получим

$$\sigma_{rr} = \frac{\rho \sqrt{2}}{3} \cdot \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}}, \quad |s| > 1, \quad (40)$$

где ρ — интенсивность приложенных на бесконечности усилий. Это выражение совпадает с соответствующим выражением σ_{rr} , полученным другим способом и приведенным в работе [5].

Рассмотрим случай, когда в полой сферической оболочке трещина длины $2l$ размещена вдоль меридиана. Отнесем оболочку к декартовой прямоугольной системе координат XOY , начало которой совпадает с серединой трещины, а ось OX — с линией трещины, и проведя выкладки, аналогичные предыдущим, задачу об определении дополнительного напряженного

состояния, вызванного наличием трещины, свеем к решению системы интегральных уравнений:

в случае симметричной относительно линии трещины нагрузки

$$\sum_{k=1,3} \int_{-1}^1 \Psi_k(\xi) L_{ik}(x-\xi) d\xi = f_{i0}(x), \quad |x| \leq 1 \quad (i = 1, 3); \quad (41)$$

в случае антисимметричной нагрузки

$$\sum_{k=2,4} \int_{-1}^1 \Psi_k(\xi) L_{ik}(x-\xi) d\xi = f_{i0}(x), \quad |x| \leq 1 \quad (i = 2, 4). \quad (42)$$

Здесь

$$\Psi_1(\xi) = \frac{d}{d\xi} \varepsilon_2(\xi), \quad \Psi_3(\xi) = Rc \frac{d}{d\xi} \kappa_2(\xi),$$

$$\Psi_2(\xi) = \frac{d}{d\xi} \varepsilon_3(\xi), \quad \Psi_4(\xi) = Rc \frac{d}{d\xi} \kappa_3(\xi),$$

$$\begin{aligned} L_{11}(\eta) &= -\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{d^3}{d\eta^3} \operatorname{kei} \lambda |\eta|, \quad L_{13}(\eta) = L_{31}(\eta) = -\frac{d}{d\eta} \operatorname{kei} \lambda |\eta| - \\ &- \frac{1-\nu}{\lambda^2} \left(\frac{2}{\eta^3} + \frac{d^3}{d\eta^3} \operatorname{ker} \lambda |\eta| \right), \quad L_{33}(\eta) = \frac{(1-\nu)^2}{\lambda^2} \cdot \frac{d^3}{d\eta^3} \operatorname{kei} \lambda |\eta| - \\ &- 2(1-\nu) \frac{d}{d\eta} \operatorname{ker} \lambda |\eta| - \lambda^2 \int_0^\eta \operatorname{kei} \lambda |\eta| d\eta, \quad L_{22}(\eta) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{d^3}{d\eta^3} \operatorname{kei} \lambda |\eta| - \\ &- \frac{d}{d\eta} \operatorname{ker} \lambda |\eta|, \quad L_{24}(\eta) = L_{42}(\eta) = \frac{1-\nu}{\lambda^2} \left(\frac{2}{\eta^3} + \frac{d^3}{d\eta^3} \operatorname{ker} \lambda |\eta| \right) - \\ &- \nu \frac{d}{d\eta} \operatorname{kei} \lambda |\eta| + \lambda^2 \int_0^\eta \operatorname{ker} \lambda |\eta| d\eta, \quad L_{44}(\eta) = \frac{(1-\nu)^2}{\lambda^2} \cdot \frac{d^3}{d\eta^3} \operatorname{kei} \lambda |\eta| + \\ &+ (1-\nu^2) \frac{d}{d\eta} \operatorname{ker} \lambda |\eta| + (1-2\nu) \lambda^2 \int_0^\eta \operatorname{kei} \lambda |\eta| d\eta + \\ &+ \lambda^4 \int_0^\eta \int_0^\eta \operatorname{ker} \lambda |\eta| d\eta d\eta, \end{aligned} \quad (43)$$

$$f_{10}(x) = \frac{2\pi}{D_0} N_{20}(x, 0), \quad f_{20}(x) = \frac{2\pi}{D_0} S_0(x, 0), \quad f_{30}(x) = \frac{2\pi}{D_0 Rc} M_2(x, 0),$$

$$f_{40}(x) = \frac{2\pi l}{D_0 Rc} \int Q_2^*(x, 0) dx + A_2, \quad \lambda^2 = \frac{l^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh}, \quad \eta = x - \xi,$$

x — безразмерная координата, отнесенная к l ;

$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{l} (v^+ - v^-), \quad \varepsilon_3(x) = \frac{1}{l} (u^+ - u^-), \quad (44)$$

$$\kappa_2(x) = -\frac{1}{l} (\theta_2^+ - \theta_2^-), \quad \kappa_3(x) = -\frac{1}{l} (\theta_1^+ - \theta_1^-).$$

Отметим, что при выборе искоемых функций в виде (44) ядра систем уравнений (41), (42) имеют симметричный вид. Интегральные уравнения, аналогичные системам (41) и (42), получены другим методом в работах [10, 12] и при соответствующем выборе искоемых функций совпадают с приведенными выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. В л а с о в В. Э. Избранные труды. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1962.
2. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1964.
3. Г о л ь д е н в е й з е р А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.

4. Даревский В. М.—ПММ, 1952, 16, 2.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
6. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, М., 1951.
7. Осадчук В. А., Подстригач Я. С.—МТТ, 1973, 3.
8. Подстригач Я. С., Осадчук В. А.—ФХММ, 1968, 4, 4.
9. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
10. Ярема С. Я., Саврук М. П.—ДАН УРСР. Сер. А, 1969, 8.
11. Erdogan F.—J. Appl. Math., 1969, 17, 6.
12. Folias E. S.—J. Math. and Phys., 1965, 44, 2.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1973 г.

УПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ С ТОНКОСТЕННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Д. В. Грилицкий, Г. Т. Сулим

Изучению напряженного состояния однородной и кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины посвящены работы [1, 5, 6]. При исследовании этой задачи основное внимание в работах [5, 6] уделялось определению разности касательных напряжений на противоположных берегах включения в предположении равенства перемещений на них. Вследствие этого, решение интегрального уравнения Прандтля, к которому свелась задача, пригодно только для достаточно жесткого включения.

Несколько иной подход к решению рассматриваемой задачи для однородной плоскости намечен в работе [1], где учитывается расхождение берегов включения, но пренебрегается разностью касательных напряжений на них.

Настоящая работа посвящена исследованию упругого состояния плоскости, состоящей из двух спаянных изотропных полуплоскостей, с тонкостенным упругим включением конечной длины на прямой линии раздела материалов в точной постановке. Это исследование приводит к системе трех сингулярных интегро-дифференциальных уравнений типа Прандтля, решения которых пригодно для любой жесткости включения: от нерастяжимого до абсолютно податливого (разреза). Этим установлена тесная связь между теорией трещин в упругих телах и теорией тонкостенных включений.

1. Рассмотрим упругое равновесие плоскости, состоящей из двух спаянных изотропных полуплоскостей, с тонкостенным упругим включением длины $2a$ и толщины $2h$ на прямой линии раздела материалов, находящейся под воздействием сосредоточенных силовых факторов и однородного поля напряжений на бесконечности (рис. 1).

Учитывая малую толщину включения, граничные условия на линии $y = 0$ запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{y1} - i\tau_{xy1}) - (\sigma_{y2} - i\tau_{xy2}) &= -if_0(x) = \begin{cases} -if_0^*(x) & (|x| \leq a); \\ 0 & (|x| > a); \end{cases} \\
 (u_1' + iv_1') - (u_2' + iv_2') &= f_1(x) + if_2(x) = \begin{cases} f_1^*(x) + if_2^*(x) & (|x| \leq a); \\ 0 & (|x| > a). \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1}$$