

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ

Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, Б. П. Галапац, Б. М. Гнидец

Решение ряда современных задач науки и техники связано с разработкой надежных количественных методов определения механических и физических полей в твердых телах, которые находятся под воздействием силовых, температурных и электромагнитных нагрузок. Для этого необходимо построение конкретных теоретических моделей механики сплошной среды, которые в рамках макроскопических представлений с достаточной точностью описывали бы рассматриваемые явления в их взаимосвязи с учетом теоретических и экспериментальных данных о взаимодействии полей различной природы. Основы теории построения моделей для описания движений и процессов в механике сплошной среды изложены в работах [6—8].

Модель n -компонентного твердого раствора, отражающая взаимосвязь процессов деформации, теплопроводности и диффузии, предложена в работах [2, 3]. Диффузия заряженных частиц во взаимодействии с процессами деформации и теплопроводности рассматривалась в работе [1] без учета влияния поля электрического (электродного) потенциала на перераспределение электрических зарядов. Модель деформируемого электропроводного тела, в которой учитывается температурная и деформационная неоднородность поля электрического потенциала и ее влияние на процесс электропроводности, предложена в работах [4, 5].

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие модельных представлений о процессе деформации неферромагнитных электропроводных тел с учетом физических процессов теплопроводности, электропроводности и диффузии заряженных примесных частиц.

1. Уравнения состояния. Рассмотрим неполяризованное электропроводное упругое тело, состоящее из электрически заряженных компонент, занимающее область V , которое находится под воздействием внешних силовых нагрузок, температурных и электромагнитных полей. В естественном состоянии тело изотропно, однородно и макроскопически электронейтрально. Основными, наряду с процессом деформации, являются процессы теплопроводности, электропроводности и диффузии.

В качестве параметров локального термодинамического состояния примем $T, S, \hat{e}, \hat{\sigma}, \Phi, \omega, C_k, M'_k$, где T — температура; S — энтропия единицы массы раствора; $\hat{e} = \{e_{ij}\}$, $\hat{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ — тензор деформации и напряжений соответственно; Φ — электрический потенциал; ω — распределенный электрический заряд единицы массы раствора; C_k — концентрация компонента k ($C_k = \frac{\rho_k}{\rho}$,

ρ_k — масса компонента k в единице объема раствора, $\rho = \sum_{k=1}^n \rho_k$ — масса раствора в единице объема); M'_k — химический потенциал компонента k .

За начальное состояние ($\tau = \tau_0$) рассматриваемой термодинамической системы принимается равновесное ее состояние, в котором $T = T_0$, $S = S_0$, $e_{ij} = 0$, $\sigma_{ij} = 0$, $\Phi = \Phi_0$, $\omega = 0$, $C_k = C_k^0$, $M'_k = M_k^0$.

Дифференциал внутренней энергии $U(S, e_{ij}, \omega, C_k)$ единицы массы рассматриваемой среды определяется обобщенным уравнением Гиббса

$$dU = TdS + \frac{1}{\rho} \sum_{i,j} \sigma_{ij} de_{ij} + \Phi d\omega + \sum_{k=1}^{n-1} M_k dC_k, \quad (1)$$

где $M_k = M'_k - M'_n$. Если ввести свободную энергию $F = U - TS - \omega\Phi$, то

$$dF = -SdT + \frac{1}{\rho} \sum_{i,j} \sigma_{ij} de_{ij} - \omega d\Phi + \sum_{k=1}^{n-1} M_k dC_k. \quad (2)$$

При малых отклонениях от начального равновесного состояния ($\frac{T-T_0}{T_0} \ll 1$, $e_{ij} \ll 1$, $\frac{\Phi-\Phi_0}{\Phi_0} \ll 1$, $\frac{C_k-C_k^0}{C_k^0} \ll 1$) функцию F представим в виде степенного ряда

$$F = F_0 - S_0 t - \frac{c}{2T_0} t^2 + \frac{1}{2\rho} \left(K - \frac{2}{3} G \right) e^2 - \frac{1}{2} C \Phi^2 - \frac{\alpha K}{\rho} e t + \\ + \gamma C t \Phi - \frac{\beta K}{\rho} e \Phi + \frac{G}{\rho} \sum_{\alpha, \beta} e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} M_k^0 c_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n-1} d_{kl} c_k c_l - \\ - \frac{K}{\rho} \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k c_k e + \sum_{k=1}^{n-1} d_k c_k t + \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k c_k \Phi, \quad (3)$$

где $t = T - T_0$; $\Phi = \Phi - \Phi_0$; $c_k = C_k - C_k^0$; $e = \sum_{\alpha} e_{\alpha\alpha}$; $c = T_0 \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_{e, \Phi, c_k}$ — удельная теплоемкость при фиксированных e , Φ , c_k ; $\alpha = \left(\frac{\partial e}{\partial t} \right)_{\sigma, \Phi, c_k}$ — температурный коэффициент объемного расширения при фиксированных $\sigma = \sum_{\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}$, Φ , c_k ; $K = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial e} \right)_{t, \Phi, c_k}$ — модуль объемного сжатия; $G = \frac{1}{2} \times \times \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{ij}} \right)_{i \neq j}$ — модуль сдвига; $C = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \Phi} \right)_{t, e, c_k}$ — удельная электроемкость; $\beta = \left(\frac{\partial e}{\partial \Phi} \right)_{\sigma, t, c_k}$ — электрострикционный коэффициент объемного расширения; $\gamma = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\omega, e, c_k}$ — температурный коэффициент изменения электрического потенциала; $d_k = \left(\frac{\partial M_k}{\partial t} \right)_{c_l, e, \Phi}$ — температурный коэффициент изменения химического потенциала компонента k ; $\beta_k = \left(\frac{\partial e}{\partial c_k} \right)_{\sigma, t, \Phi}$ — концентрационный коэффициент объемного расширения; $d_{kl} = \left(\frac{\partial M_k}{\partial c_l} \right)_{e, t, \Phi}$ — коэффициент, характеризующий изменение химического потенциала компонента k с изменением концентрации компонента l ; $\eta_k = - \left(\frac{\partial \omega}{\partial c_k} \right)_{e, t, \Phi}$ — коэффициент, характеризующий изменение электрического заряда с изменением концентрации компонента k .

Из соотношения (2), используя выражение (3), находим искомые уравнения состояния

$$s = S - S_0 = \frac{c}{T_0} t + \frac{\alpha K}{\rho} e - \gamma C \Phi - \sum_{k=1}^{n-1} d_k c_k, \\ \sigma_{ij} = \left[\left(K - \frac{2}{3} G \right) e - \alpha K t - \beta K \Phi - K \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k c_k \right] \delta_{ij} + 2G e_{ij}, \quad (4) \\ \rho \omega = \rho C (\Phi - \gamma t) + \beta K e - \rho \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k c_k, \\ \mu_k = M_k - M_k^0 = \sum_{l=1}^{n-1} d_{kl} c_l - \frac{\beta_k K}{\rho} e + d_k t + \eta_k \Phi.$$

2. Уравнения сохранения. Кинетические уравнения. Уравнение сохранения массы компонента k при отсутствии химических реакций запишем так:

$$\frac{d\rho_k}{d\tau} = -\rho_k \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{div} \vec{J}_k, \quad (5)$$

где $\vec{J}_k = \rho_k (\vec{v}_k - \vec{v})$ — диффузионный поток вещества k , определяемый относительно центра масс; \vec{v}_k — скорость компонента k ; $\vec{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\rho_k \vec{v}_k}{\rho}$ —

скорость центра масс. Суммируя уравнение (5) по всем компонентам k , получим закон сохранения массы

$$\frac{d\rho}{d\tau} = -\rho \operatorname{div} \vec{v}. \quad (6)$$

Уравнение (5), записанное относительно концентрации c_k , с использованием выражения (6) примет вид

$$\rho \frac{dc_k}{d\tau} = -\operatorname{div} \vec{J}_k. \quad (7)$$

Умножая соотношение (7) на величину электрического заряда z'_k единицы массы компонента k и суммируя по всем компонентам, получаем уравнение сохранения электрических зарядов

$$\rho \frac{d\omega}{d\tau} = -\operatorname{div} \vec{j}, \quad (8)$$

где $\rho\omega = \sum_{k=1}^n \rho_k z'_k$ — объемная плотность электрических зарядов; $\vec{j} = \sum_{k=1}^n z'_k \vec{J}_k = \sum_{k=1}^{n-1} (z'_k - z'_n) \vec{J}_k = \sum_{k=1}^{n-1} z'_k \vec{J}_k$ — плотность тока проводимости.

Закон сохранения импульса для материальной системы в электромагнитном поле может быть записан в форме уравнения движения [1]

$$\rho \frac{d\vec{v}}{d\tau} = \operatorname{Div} \hat{\sigma} + \rho\omega \vec{E} + \mu_0 (\vec{I} \times \vec{H}) + \sum_{k=1}^n \rho_k \vec{F}'_k. \quad (9)$$

Здесь $\rho\omega \vec{E} + \mu_0 (\vec{I} \times \vec{H})$ — сила Лоренца, отнесенная к единице объема; \vec{F}'_k — консервативная сила $\left(\vec{F}'_k = -\operatorname{grad} \psi'_k, \frac{\partial \psi'_k}{\partial \tau} = 0 \right)$, действующая на единицу массы компонента k ; $\vec{I} = \sum_{k=1}^n \rho_k \vec{v}_k z'_k = \vec{j} + \rho\omega \vec{v}$ — полная плотность электрического тока.

Напряженности электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей в области V тела удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} + \vec{I}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial \tau};$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho\omega. \quad (10)$$

Запишем уравнения Максвелла в области V_c внешней неполяризованной среды

$$\operatorname{rot} \vec{H}_c = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_c}{\partial \tau} + \vec{j}^{(c)}, \quad \operatorname{rot} \vec{E}_c = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}_c}{\partial \tau};$$

$$\operatorname{div} \vec{H}_c = 0, \quad \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}_c = \omega^{(c)}, \quad (11)$$

где $\omega^{(c)}$, $\vec{j}^{(c)}$ — заданные функции, определяющие плотности электрических зарядов и токов в области V_c , которые удовлетворяют условию $\operatorname{div} \vec{j}^{(c)} + \frac{\partial \omega^{(c)}}{\partial \tau} = 0$.

Умножив первое из уравнений (10) на \vec{E} , второе — на \vec{H} и вычитая из первого второе, получим уравнение Пойтинга (закон сохранения плотности электромагнитной энергии)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) = -\operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{I} \cdot \vec{E}. \quad (12)$$

Из закона сохранения энергии следует, что плотность ε полной энергии вещества и поля должна сохраняться, т. е.

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \vec{J}_\varepsilon. \quad (13)$$

Плотность полной энергии ε состоит из плотностей внутренней ρU , кинетической $\rho \frac{v^2}{2}$, потенциальной $\rho \psi = \sum_{k=1}^n \rho_k \psi_k$ энергий и плотности энергии электромагнитного поля $\frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)$ и выражается формулой

$$\varepsilon = \rho \left(U + \frac{v^2}{2} + \psi \right) + \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2).$$

Аналогично полный поток энергии \vec{J}_ε состоит из конвективной составляющей $\rho \left(U + \frac{v^2}{2} + \psi \right) \vec{v}$, потока тепла \vec{J}_Q , потока электромагнитной энергии $\vec{E} \times \vec{H}$, потока энергии $(-\hat{\sigma}, \vec{v})$, обусловленного механической работой, совершенной системой, потока энергии $\Phi \vec{j}$, обусловленного диффузией электрических зарядов в поле электрического потенциала, потока энергии $\sum_{k=1}^n M_k \vec{J}_k$, обусловленного диффузией различных компонент в поле их химических потенциалов и потока потенциальной энергии $\sum_{k=1}^n \psi'_k \vec{J}_k$, возникающего вследствие диффузии различных компонент в поле консервативных сил, т. е. имеем

$$\begin{aligned} \vec{J}_\varepsilon = & \rho \left(U + \frac{v^2}{2} + \psi \right) \vec{v} + \vec{J}_Q + \vec{E} \times \vec{H} - \hat{\sigma} \vec{v} + \Phi \vec{j} + \\ & + \sum_{k=1}^n M_k \vec{J}_k + \sum_{k=1}^n \psi'_k \vec{J}_k. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение сохранения энергии (13) с использованием соотношений (12), (6) и уравнения сохранения потенциальной энергии

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho \psi) = -\operatorname{div} \left(\rho \psi \vec{v} + \sum_{k=1}^n \psi'_k \vec{J}_k \right) - \sum_{k=1}^n \vec{J}_k \cdot \vec{F}_k - \vec{v} \cdot \sum_{k=1}^n \rho_k \vec{F}_k, \quad (15)$$

которое получается из соотношения (5) умножением его на ψ_k и суммированием по k , может быть записано так:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{d\tau} \left(U + \frac{v^2}{2} \right) = & -\operatorname{div} \left(\vec{J}_Q + \Phi \vec{j} - \hat{\sigma} \cdot \vec{v} + \sum_{k=1}^n M_k \vec{J}_k \right) + \\ & + \vec{I} \cdot \vec{E} + \sum_{k=1}^n \vec{J}_k \cdot \vec{F}_k + \vec{v} \cdot \sum_{k=1}^n \rho_k \vec{F}_k. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая уравнение баланса для кинетической энергии движения центра масс

$$\rho \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \vec{v} \cdot \operatorname{Div} \hat{\sigma} + \rho \omega \vec{v} \cdot \vec{E} + \mu_0 \vec{v} \cdot (\vec{I} \times \vec{H}) + \vec{v} \cdot \sum_{k=1}^n \rho_k \vec{F}_k, \quad (17)$$

которое следует из уравнения движения (9), соотношение (16) приводим к виду

$$\begin{aligned} \rho \frac{dU}{d\tau} = & -\operatorname{div} \left(\vec{J}_Q + \Phi \vec{j} + \sum_{k=1}^{n-1} M_k \vec{J}_k \right) + \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{de_{ij}}{d\tau} + \\ & + \vec{I} \cdot \vec{E} + \sum_{k=1}^{n-1} \vec{J}_k \vec{F}_k - (\rho \omega \vec{E} + \mu_0 \vec{j} \times \vec{H}) \cdot \vec{v}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\vec{F}_k = -\operatorname{grad} \psi_k$, $\psi_k = \psi'_k - \psi'_n$.

Подставив выражения (7), (8) и (18) в формулу (1), записанную для элемента массы вдоль пути его центра масс

$$T \frac{dS}{d\tau} = \frac{dU}{d\tau} - \frac{1}{\rho} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{de_{ij}}{d\tau} - \Phi \frac{d\omega}{d\tau} - \sum_{k=1}^{n-1} M_k \frac{dc_k}{d\tau},$$

получим уравнение баланса энтропии

$$\rho \frac{dS}{d\tau} = -\operatorname{div} \vec{J}_s + \frac{1}{T} \left(\vec{J}_Q \cdot \vec{X}_Q + \sum_{k=1}^{n-1} \vec{J}_k \cdot \vec{X}_k \right). \quad (19)$$

Здесь $\vec{J}_s = \frac{\vec{J}_Q}{T}$ — поток энтропии; $\vec{X}_Q = -\frac{1}{T} \operatorname{grad} T$ — термодинамическая сила, сопряженная с потоком тепла; $\vec{X}_k = z_k (\vec{E} - \operatorname{grad} \Phi + \mu_0 \vec{v} \times \vec{H}) - \operatorname{grad} (\psi_k + M_k)$ — термодинамическая сила, сопряженная с диффузионным потоком компонента k .

Предположив линейную связь между потоками и термодинамическими силами, получим [1]

$$\begin{aligned} \vec{J}_Q &= L_{QQ} \vec{X}_Q + \sum_{k=1}^{n-1} L_{Qk} \vec{X}_k, \\ \vec{J}_k &= L_{kQ} \vec{X}_Q + \sum_{i=1}^{n-1} L_{ki} \vec{X}_i. \end{aligned} \quad (20)$$

Феноменологические коэффициенты L_{QQ} , L_{Qk} , L_{kQ} , L_{ki} являются функциями параметров термодинамического состояния и удовлетворяют условиям $L_{QQ} \geq 0$, $L_{ii} \geq 0$, $L_{ii} L_{kk} \geq \frac{1}{4} (L_{ik} + L_{ki})^2$, которые следуют из второго закона термодинамики. Если считать эти коэффициенты независимыми от векторов напряженности электромагнитного поля, то вследствие принципа Онзагера $L_{kQ} = L_{Qk}$, $L_{ki} = L_{ik}$.

Уравнения (20), учитывая выражения для термодинамических сил и уравнения состояния (14), приведем к форме

$$\begin{aligned} \vec{J}_Q &= -\kappa \operatorname{grad} t + \sum_{k=1}^{n-1} q_k \vec{J}_k, \\ \vec{J}_k &= -\rho \left[\sum_{i=1}^{n-1} D_{ki} \operatorname{grad} c_i + D_k^e \operatorname{grad} e + D_k^T \operatorname{grad} t + D_k^\Phi \operatorname{grad} \Phi + \right. \\ &\quad \left. + D_k^E (\vec{E} + \mu_0 \vec{v} \times \vec{H}) + \vec{\Psi}_k \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где $\kappa = \frac{1}{T} \left(L_{QQ} - \sum_{k=1}^{n-1} q_k L_{Qk} \right)$ — коэффициент теплопроводности; q_k , введенное соотношением $L_{iQ} = \sum_{k=1}^{n-1} L_{ik} q_k$, можно трактовать [3] как теплоту переноса компонента k в процессе диффузии; $D_{ki} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n-1} L_{ki} d_{it}$, $D_k^e = -\frac{K}{\rho^2} \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i L_{ki}$, $D_k^T = \frac{1}{\rho} \left(\sum_{i=1}^{n-1} d_i L_{ki} + \frac{L_{kQ}}{T} \right)$, $D_k^\Phi = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n-1} (\eta_i + z_i) L_{ki}$, $D_k^E = -\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n-1} z_i L_{ki}$ — соответствующие коэффициенты диффузии компонента k ; $\vec{\Psi}_k = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{n-1} L_{ki} \operatorname{grad} \psi_i$. Учитывая, что $\vec{j} = \sum_{k=1}^{n-1} \vec{J}_k z_k$, находим

$$\vec{j} = \lambda (\vec{E} - \operatorname{grad} \Phi + \mu_0 \vec{v} \times \vec{H}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z_k L_{Qk}}{T} \operatorname{grad} t - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} z_k L_{ki} \operatorname{grad} (\mu_i + \psi_i), \quad (22)$$

где $\lambda = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} z_k z_i L_{ki}$ — коэффициент электропроводности. Уравнения (21), (22) являются кинетическими уравнениями процессов теплопроводности, диффузии, электропроводности.

3. Дифференциальные уравнения модели. Далее будем считать все характеристики материала постоянными, а также будем пренебрегать разностью между субстациональной и локальной производными по времени и плотность распределения масс ρ заменим некоторой средней плотностью ρ_0 . При таких ограничениях уравнения (7) — (9), (19), используя соотношения (14), (21), (22), запишутся

$$\frac{\partial c_k}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^{n-1} D_{ki} \Delta c_i + D_k^e \Delta e + D_k^T \Delta t + D_k^\varphi \Delta \varphi + D_k^E (\operatorname{div} \vec{E} + \mu_0 \operatorname{div} \vec{v} \times \vec{H}) + \operatorname{div} \vec{\Psi}_k; \quad (23)$$

$$\frac{\partial \rho_0 \omega}{\partial \tau} = -\lambda (\operatorname{div} \vec{E} - \Delta \varphi + \mu_0 \operatorname{div} \vec{v} \times \vec{H}) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{z_k L_{kQ}}{T} \Delta t + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} z_k L_{ki} \Delta (\mu_i + \psi_i); \quad (24)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} = \operatorname{Div} \hat{\sigma} + \rho_0 \omega \vec{E} + \mu_0 [(\vec{j} + \rho_0 \omega \vec{v}) \times \vec{H}] + \sum_{k=1}^n \rho_k \vec{F}_k; \quad (25)$$

$$\rho_0 \frac{c}{T_0} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} + \alpha K \frac{\partial e}{\partial \tau} - \rho_0 \gamma C \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \rho_0 \sum_{k=1}^{n-1} \left(d_k + \frac{q_k}{T} \right) \frac{\partial c_k}{\partial \tau} = \frac{\kappa}{T} \Delta t + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n-1} \vec{J}_k \vec{X}_k. \quad (26)$$

Здесь \vec{u} — вектор перемещения $\left(\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} \right)$, связанный с тензором деформации соотношением Коши

$$\hat{e} = \operatorname{Def} \vec{u}. \quad (27)$$

Соотношения (23) — (27) вместе с уравнениями состояния (14), Максвелла (10), кинетическими уравнениями (21), (22), составляют замкнутую систему уравнений модели, описывающую взаимосвязь процессов деформации, теплопроводности, электропроводности и диффузии. К приведенным уравнениям необходимо присоединить начальные условия и соответствующие граничные условия, которые определяются взаимодействием электропроводного тела с внешней средой. На границе контакта двух электропроводных непolarизованных тел граничные условия запишутся так:

$$\hat{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{n} = \hat{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{n} + \frac{\Omega}{2} (\vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)}), \quad \vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(2)}; \quad (28)$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \quad \vec{J}_Q^{(1)} \cdot \vec{n} = \vec{J}_Q^{(2)} \cdot \vec{n}; \quad (29)$$

$$M_k^{(1)} = M_k^{(2)}, \quad \vec{J}_k^{(1)} \cdot \vec{n} = \vec{J}_k^{(2)} \cdot \vec{n}; \quad (30)$$

$$\Phi^{(1)} = \Phi^{(2)}, \quad \vec{j}^{(1)} \cdot \vec{n} = \vec{j}^{(2)} \cdot \vec{n}; \quad (31)$$

$$\vec{E}_l^{(1)} = \vec{E}_l^{(2)}, \quad \vec{H}_l^{(1)} = \vec{H}_l^{(2)}. \quad (32)$$

где Ω — плотность поверхностных зарядов, определяемая формулой

$$\Omega = \epsilon_0 (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) \cdot \vec{n}; \quad (33)$$

\vec{n} — нормаль к границе раздела тел, направленная из первого ко второму;
 \vec{E}_t, \vec{H}_t — касательные составляющие векторов \vec{E} и \vec{H} .

В случае двухкомпонентного раствора ($n = 2$) в пренебрежении термо-электрическими эффектами ($L_{1Q} = 0, q_1 = 0$) и малыми величинами порядка $\frac{t}{T_0}$ по сравнению с единицей, полученная система уравнений (4), (10), (21) — (27) принимает вид

$$s = \frac{c}{T_0} t + \frac{\alpha K}{\rho_0} e - \gamma C \varphi - d c_1,$$

$$\sigma_{ij} = \left[\left(K - \frac{2}{3} G \right) e - \alpha K t - \beta K \varphi - \beta_1 K c_1 \right] \delta_{ij} + 2 G e_{ij},$$

$$\rho_0 \omega = \rho_0 C (\varphi - \gamma t) + \beta K e - \rho_0 \eta c_1,$$

$$\mu = d_c c_1 - \frac{\beta_1 K}{\rho_0} e + d t + \eta \varphi;$$

$$\text{rot } \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau} + \vec{j} + \rho_0 \omega \vec{v}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial \tau},$$

$$\text{div } \vec{H} = 0, \quad \varepsilon_0 \text{div } \vec{E} = \rho_0 \omega;$$

$$\vec{J}_Q = -\kappa \text{grad } t, \quad \vec{J} = -\rho_0 [D_c \text{grad } c_1 + D^e \text{grad } e + D^T \text{grad } t +$$

$$+ D^\varphi \text{grad } \varphi + D^E (\vec{E} + \mu_0 \vec{v} \times \vec{H}) \times \vec{\Psi}],$$

$$\vec{j} = z \vec{J};$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial \tau} = D_c \Delta c_1 + D^e \Delta e + D^T \Delta t + D^\varphi \Delta \varphi + D^E (\text{div } \vec{E} + \mu_0 \text{div } \vec{v} \times \vec{H}) + \text{div } \vec{\Psi};$$

$$\frac{\partial \rho_0 \omega}{\partial \tau} = -\lambda (\text{div } \vec{E} - \Delta \varphi + \mu_0 \text{div } \vec{v} \times \vec{H}) + z L_{11} \Delta (\mu + \psi);$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mu}{\partial \tau^2} = \text{Div } \hat{\sigma} + \rho_0 \omega \vec{E} + \mu_0 [(\vec{j} + \rho_0 \omega \vec{v}) \times \vec{H}] + \sum_{k=1}^2 \rho_k \vec{F}'_k;$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right);$$

$$\kappa \Delta t = \rho_0 c \frac{\partial t}{\partial \tau} + \alpha K T_0 \frac{\partial e}{\partial \tau} - \gamma \rho_0 C T_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \rho_0 d T_0 \frac{\partial c_1}{\partial \tau} - \frac{\vec{J} \cdot \vec{J}}{L_{11}}.$$

Отметим два предельных случая системы уравнений (34) — (41).

При отсутствии внешних электромагнитных полей для незаряженных компонент ($z'_1 = 0, z'_2 = 0, z = z'_1 - z'_2 = 0$) $\vec{j} = 0, \rho_0 \omega = 0, \varphi = 0, \vec{E} = 0, \vec{H} = 0$. При этом система уравнений (34) — (41) в пренебрежении теплом $\frac{\vec{J} \cdot \vec{J}}{L_{11}}$, выделяющимся в процессе диффузии, совпадает с уравнениями механотермодиффузии [3] для двухкомпонентного раствора. Полагая, что одна из компонент не несет массы (электропроводное тело, в котором свободные электроны не несут массы), получим $c_1 = 0, \mu = 0, \vec{J} = 0$ (однако $\vec{j} = z \vec{J} \neq 0$) и система уравнений (34) — (41) совпадает с уравнениями термоэлектроупругости [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроот С. де, Мазур П. Неравновесная термодинамика. «Мир», М., 1964.
2. Подстригач Я. С. — ПМТФ, 1965, 2.
3. Подстригач Я. С., Павлина В. С. — ФХММ, 1965, 4.

4. Підстригач Я. С., Бурак Я. Й.— Вісник АН УРСР, 1970, 12.
 5. Підстригач Я. С., Бурак Я. Й., Галапац Б. П.— ДАН УРСР. Сер. А, 1972, 2.
 6. Седов Л. И. Об основных принципах механики сплошной среды. Изд-во Московского ун-та, М., 1961.
 7. Седов Л. И.— УМН, 1965, 20, 5.
 8. Седов Л. И. Механика сплошной среды. «Наука», М., 1970.

Львовский филиал математической
 физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
 в сентябре 1973 г.

МЕТОД ДИСТОРСИЙ В ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С ТРЕЩИНАМИ

Я. С. Подстригач, В. А. Осадчук, Е. М. Федюк, М. М. Николишин

В настоящей работе предложен способ сведения задач о напряженном состоянии в тонких оболочках с трещинами к решению систем сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

1. **Постановка задачи.** При построении предлагаемого способа будем исходить из представления компонентов тензора $\{e_{ij}\}$ геометрически малой деформации в виде

$$e_{ij} = e_{ij}^{(s)} + e_{ij}^0 \quad (i, j = \alpha, \beta), \quad (1)$$

где e_{ij}^0 — компоненты тензора дисторсии; $e_{ij}^{(s)}$ — компоненты тензора упругой деформации [9]; α, β — криволинейные координаты срединной поверхности оболочки.

Используя статико-геометрическую гипотезу Кирхгофа [3, 6], а также выражение для удельной работы деформации тонкой оболочки (с учетом соотношения (1)) и ее дифференциала [9], устанавливаем связь между усилиями N_1, N_2, S_{12} , моментами M_1, M_2, H_{12} , компонентами деформации срединной поверхности $\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}$ и осредненными по толщине оболочки компонентами тензора дисторсии $\varepsilon_{ij}^0, \kappa_{ij}^0$ [7]:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{D_0}{1-\nu^2} [\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - (\varepsilon_{11}^0 + \nu\varepsilon_{22}^0)], & N_2 &= \frac{D_0}{1-\nu^2} [\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - (\varepsilon_{22}^0 + \nu\varepsilon_{11}^0)], \\ M_1 &= D_1 [\kappa_{11} + \nu\kappa_{22} - (\kappa_{11}^0 + \nu\kappa_{22}^0)], & M_2 &= D_1 [\kappa_{22} + \nu\kappa_{11} - (\kappa_{22}^0 + \nu\kappa_{11}^0)], \\ S_{12} &= \frac{D_0}{2(1+\nu)} (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{12}^0), & H_{12} &= (1-\nu) D_1 (\kappa_{12} - \kappa_{12}^0). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 w, & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k_2 w, \\ \kappa_{11} &= -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta_2, & \kappa_{22} &= -\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta_1, \\ \varepsilon_{12} &= \omega_1 + \omega_2, & \kappa_{12} &= \tau_1 + k_1 \omega_2 = \tau_2 + k_2 \omega_1, \\ \omega_1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} u, & \omega_2 &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} v, \\ \tau_1 &= -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta_1, & \tau_2 &= -\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta_2, \\ \theta_1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} - k_1 u, & \theta_2 &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} - k_2 v, & D_0 &= 2Eh, & D_1 &= \frac{2Ek^3}{3(1-\nu^2)}, \end{aligned} \quad (3)$$

A, B, u, v, w, k_1, k_2 — соответственно коэффициенты первой квадратичной формы, перемещения и главные кривизны срединной поверхности оболочки; θ_1, θ_2 — углы поворота нормали; h — полутолщина оболочки; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.