Если все полиномы (14) и соответствующая бинарная форма, которая получается, если в (9) положить $z = 0$, окажутся знакоопределенными, то знакоопределенной будет также форма (9). Если же некоторые из полиномов (14) знакопеременны, то в этом случае сформулируем некоторые необходимые условия знакоопределенности формы (9). Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть задано два действительных полинома с одной переменной, т. е.*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad и \quad Q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$$

и пусть число различных действительных корней полинома $P(z)$ равно p ($p \leqslant n$), а полинома $Q(z)$ — q ($q \leqslant m$). Пусть $q \leqslant p$, тогда, для того чтобы все действительные корни полинома $P(z)$ были корнями полинома $Q(z)$, необходимо и достаточно, чтобы число различных действительных корней полинома $P(z)\,Q(z)$ равнялось q.

Имеют место следующие, легко доказуемые утверждения.

Теорема 6. *Если полином* (10) *знакоопределенный, то последний из полиномов* (14), *т. е.*

$$D_{2n} = \sum_{p=0}^{n(n-1)} A_{2n,p} v^p$$

знакопостоянный, а именно: знакоположительный, если $\frac{n}{2}$ — четно, и знакоотрицательный, если $\frac{n}{2}$ — нечетно.

Теорема 7. *Если полином* (10) *знакоопределенный, а полиномы $D_{2n}(v)$, $D_{2n-2}(v)$, ..., $D_{2n-2h}(v)$ ($h = 0, 1, \ldots, n-4$) имеют m $\left(m = 1, 2, \ldots \ldots, \frac{1}{2}(n-h)(n-h-1)\right)$ общих различных действительных корней, то все эти m корней являются также корнями и полинома $D_{2n-2h-2}(v)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. «Наука», М., 1966.
2. Клюйник И. Ф.— В кн.: Математическая физика, 16. «Наукова думка», К., 1974.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. «Наука», М., 1966.
4. Петровский И. Г.— УМН, 1946, 1, 3, 4, 13, 14.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в октябре 1973 г.

О РАВНОМЕРНОЙ ДЕФИНИТНОСТИ СИММЕТРИЗАТОРОВ КОРНЕЙ «АЛГЕБРАИЧЕСКИХ» ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Балинский

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, а $\mathfrak{R}$ — множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в этом пространстве.

Рассмотрим полиномиальный операторный пучок

$$P(\lambda) = \lambda^n A_0 + \lambda^{n-1} A_1 + \cdots + \lambda A_{n-1} + A_n \tag{1}$$

с самосопряженными коэффициентами $A_k \in \mathfrak{R}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) и равномерно положительным оператором $A_0 \gg 0$ ($\exists \delta > 0$ $(A_0 x, x) \geqslant \delta (x, x)$ $\forall x \in \mathfrak{H}$). Через $\sigma(P)$ обозначим, как обычно, спектр пучка (1), т. е. множество всех комплексных чисел λ, для которых оператор $P(\lambda)$ необратим. Дополнение к $\sigma(P)$ в комплексной плоскости — резольвентное множество пучка — обозначим через $\rho(P)$.

Пучок $P(\lambda)$ называется гиперболическим, если при любом $x \in \mathfrak{H}$ $(x \neq 0)$ все корни $p_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ многочлена $(P(\lambda)x, x)$ вещественны и различны (здесь и в дальнейшем нумерация корней $p_i(x)$ соответствует их упорядочению по убыванию).

Спектральными зонами гиперболического пучка называют множества Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ значений функционалов $p_i(x)$ на единичной сфере K пространства $\mathfrak{H}$ ($p_i(x)$ — однородны). Из свойств ограниченности и непрерывности $p_i(x)$ на K следует, что Δ_i являются непустыми связными ограниченными подмножествами вещественной прямой, т. е. промежутками (или точками). Если $\overline{\Delta}_i \cap \overline{\Delta}_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, где $\overline{\Delta}_i$ — замыкание множества Δ_i, то говорят, что спектральные зоны Δ_i и Δ_j отделены.

В работе [2] установлена теорема, в которой утверждается, что, если при некотором i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ спектральная зона Δ_i гиперболического пучка $P(\lambda)$ отделена от соседних зон, то $P(\lambda)$ допускает следующую факторизацию:

$$P(\lambda) = P_+(\lambda)(Z_i - \lambda I), \tag{2}$$

где $P_+(\lambda)$ — пучок $(n-1)$-го порядка, обратимый при всех $\lambda \in \overline{\Delta}_i$, спектр оператора Z_i $(\in \mathfrak{R})$ содержится в $\overline{\Delta}_i$ и оператор Z_i подобен самосопряженному.

Там же замечено, что, если Z_i $(\in \mathfrak{R})$ является корнем операторного уравнения

$$A_0Z^n + A_1Z^{n-1} + \cdots + A_{n-1}Z + A_n = 0, \tag{3}$$

соответствующего пучку (1), то он симметризуется слева самосопряженным оператором

$$S_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-k} (Z_i^*)^j A_k Z_i^{n-1-k-j} \tag{4}$$

(симметризация слева означает, что $(S_0Z_i)^* = S_0Z_i$).

Поэтому прямой путь установления подобия самосопряженному оператора Z_i в представлении (2) пучка $P(\lambda)$ состоит в доказательстве равномерной дефинитности оператора S_0 (так как при $S_0 \gg 0$ оператор $Z_i = S_0^{-1/2}(S_0^{-1/2}S_0Z_iS_0^{-1/2})S_0^{1/2}$, что и показывает его подобие самосопряженному). Как отмечают авторы работы [2], этот метод и использовался ими вначале, однако его применение вызвало технические трудности, которые удалось преодолеть лишь в предположении, что $P(\gamma)$ — вполне непрерывный оператор и $(-1)^{i-1}P'(\gamma) \gg 0$ для некоторого $\gamma \in \overline{\Delta}_i$.

Использовав результаты работы [1], определим множество самосопряженных операторов, симметризующих слева оператор Z_i из представления (2), и без дополнительных предположений докажем, что каждый оператор из этого множества является равномерно положительным.

Пусть $\tilde{\mathfrak{H}}$ — пространство прямой суммы n экземпляров пространства $\mathfrak{H}$. Элементы из $\tilde{\mathfrak{H}}$ обозначим через $\tilde{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\tilde{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$; скалярное произведение определим формулой $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i)$; $\tilde{A}, \tilde{B}, \ldots$ — обозначения операторов в $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Введем действующий в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}$ оператор

$$\tilde{A} : \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{y}, \; y_k = x_{k+1} \; (k = 1, 2, \ldots, n-1), \; y_n = -\sum_{i=1}^{n} A_0^{-1}A_{n+1-i}x_i, \tag{5}$$

называемый ассоциированным с пучком $P(\lambda)$, и оператор

$$\tilde{S}_0 : \tilde{S}_0\tilde{x} = \tilde{y}, \; y_k = \sum_{i=0}^{n-k} A_{n-k-i}x_{i+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

По операторам (5), (6) и многочлену

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n, \tag{7}$$

корни α_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ которого принадлежат интервалам $(\sup \Delta_{j+1}, \inf \Delta_j)$ соответственно[1], образуем оператор

$$\widetilde{S} = \widetilde{S}_0 p(\widetilde{A}). \tag{8}$$

Имеет место следующее утверждение, непосредственно проверяемое с использованием соответствующих матричных представлений операторов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{S}_0$.

Лемма 1. *Оператор $\widetilde{S} = \widetilde{S}_0 p(\widetilde{A})$ является самосопряженным и симметризует слева оператор $\widetilde{A}$.*

Нам понадобится также другое представление оператора (8), установленное в работе [1] и используемое при установлении его дефинитности.

Лемма 2. *Оператор $\widetilde{S} = \widetilde{S}_0 p(\widetilde{A})$ представим в виде*

$$\widetilde{S} = -\widetilde{q}^* \widetilde{P}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\widetilde{q}, \tag{9}$$

где

$$\widetilde{q} : \widetilde{q}\widetilde{x} = \widetilde{y}, \quad y_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k-i} x_i \qquad (a_0 = 1), \tag{10}$$

$\widetilde{P}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — разделенная разность $(n-1)$-го порядка (с системой узлов α_j (7)) для оператора $\widetilde{P}(\lambda)$, имеющего матричное представление

$$\widetilde{P}(\lambda) = \left\| \begin{matrix} \lambda^{2n-2}P(\lambda) & \lambda^{2n-3}P(\lambda) & \ldots & \lambda^{n}P(\lambda) & \lambda^{n-1}P(\lambda) \\ \lambda^{2n-3}P(\lambda) & \lambda^{2n-2}P(\lambda) & \ldots & \lambda^{n-1}P(\lambda) & \lambda^{n-2}P(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^{n}P(\lambda) & \lambda^{n-1}P(\lambda) & \ldots & \lambda^{2}P(\lambda) & \lambda P(\lambda) \\ \lambda^{n-1}P(\lambda) & \lambda^{n-2}P(\lambda) & \ldots & \lambda P(\lambda) & P(\lambda) \end{matrix} \right\|. \tag{11}$$

Установим теперь основной результат данной статьи.

Теорема. *Пусть*

$$P(\lambda) = \lambda^n A_0 + \lambda^{n-1} A_1 + \cdots + \lambda A_{n-1} + A_n$$

— гиперболический пучок. Если при некотором i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ спектральная зона Δ_i пучка $P(\lambda)$ отделена от соседних зон, то отвечающий ей оператор Z_i симметризуется слева самосопряженным оператором $S = S_0 p(Z_i)$ $\left(= \sum_{k=0}^{n-1}{}' \sum_{j=0}^{n-1-k} (Z_i^*)^j A_k Z_i^{n-1-k-j} p(Z_i) \right)$, и оператор S равномерно положителен.

Доказательство. В пространстве $\mathfrak{H}$ вводим оператор

$$\widetilde{V}_i : \widetilde{V}_i \widetilde{x} = \widetilde{y}, \quad y_k = Z_i^{k-1} x_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и путем непосредственного умножения соответствующих оператор-матриц убеждаемся, что матрица $\{B_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ оператора $\widetilde{V}_i^* \widetilde{S} \widetilde{V}_i$ имеет вид $B_{ii} = S$, а все остальные элементы равны нулю. На основании леммы 2 заключаем, что оператор $\widetilde{V}_i^* \widetilde{S} \widetilde{V}_i$ самосопряженный. Следовательно, S — самосопряженный оператор. Беря в качестве $p(\lambda)$ многочлен $p(\lambda) \cdot \lambda$, аналогично убеждаемся в самосопряженности оператора SZ_i.

Остается показать, что S — равномерно положительный оператор. Действительно, для эрмитовой формы оператора S имеем выражение

$$(Sx_i, x_i) = (\widetilde{V}_i^* \widetilde{S} \widetilde{V}_i \widetilde{x}, \widetilde{x}) = (\widetilde{S} \widetilde{V}_i \widetilde{x}, \widetilde{V}_i \widetilde{x}),$$

---

[1] Если величины $\sup \Delta_{j+1}$ и $\inf \Delta_j$ совпадают, то соответствующее значение α_j полагается равным их общей величине.

где $\tilde{x}$ — произвольный вектор из $\tilde{\mathfrak{H}}$ с отличной от нуля i-й компонентой. Учитывая представление (9) оператора $\tilde{S}$, запишем это выражение в виде

$$(Sx_i,\ x_i) = -(\tilde{P}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)\tilde{q}\tilde{V}_i\tilde{x},\ \tilde{q}\tilde{V}_i\tilde{x}).$$

Так как

$$\tilde{P}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}\tilde{P}(\alpha_j)}{\left|\prod\limits_{k\neq j}(\alpha_j-\alpha_k)\right|},$$

то

$$(Sx_i,\ x_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j}(\tilde{P}(\alpha_j)\tilde{q}\tilde{V}_i\tilde{x},\ \tilde{q}\tilde{V}_i\tilde{x})}{\left|\prod\limits_{k\neq j}(\alpha_j-\alpha_k)\right|}.$$

Определяя компоненты вектора $\tilde{y} = \tilde{q}\tilde{V}_i\tilde{x}$ выражением

$$y_s = \sum_{t=0}^{s-1} a_{s-1-t}Z_i^t x_i \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и замечая, что

$$(\tilde{P}(\alpha_j)\tilde{y},\ \tilde{y}) = \left(P(\alpha_j)\sum_{s=1}^{n}\alpha_j^{n-s}y_s,\ \sum_{s=1}^{n}\alpha_j^{n-s}y_s\right),$$

преобразуем $(Sx_i,\ x_i)$ к виду

$$(Sx_i,\ x_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j}\left(P(\alpha_j)\sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{t=0}^{s-1}\alpha_j^{n-s}a_{s-1-t}Z_i^t x_i,\ \sum\limits_{s=1}^{n}\sum\limits_{t=0}^{s-1}\alpha_j^{n-s}a_{s-1-t}Z_i^t x_i\right)}{\left|\prod\limits_{k\neq j}(\alpha_j-\alpha_k)\right|}.$$

С учетом гиперболичности пучка $P(\lambda)$ имеем $(-1)^j P(\alpha_j) > 0$ при $j \neq i,\ i+1$, а в силу отделенности его спектральной зоны Δ_i $(-1)^i P(\alpha_i) \gg 0$, $(-1)^{i+1} P(\alpha_{i+1}) \gg 0$. Поэтому

$$(Sx_i,\ x_i) \geqslant \sum_{j=i}^{i+1} \frac{\delta_j}{\left|\prod\limits_{k\neq j}(\alpha_j-\alpha_k)\right|}\|p_{(j)}(Z_i)x_i\|^2, \quad \delta_i > 0, \quad \delta_{i+1} > 0,$$

где

$$p_{(j)}(\lambda) = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}(\lambda-\alpha_k) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=0}^{s-1}\alpha_j^{n-s}a_{s-1-t}\lambda^t \qquad (a_0 = 1).$$

Так как $\sigma(Z_i) \subset \bar{\Delta}_i$ и, следовательно, $0 \in \rho(p_{(j)}(Z_i))$ $(j = i,\ i+1)$, то

$$\|p_{(j)}(Z_i)x_i\|^2 \geqslant c_j\|x_i\|^2, \quad c_j > 0 \qquad (j = i,\ i+1).$$

Окончательно имеем

$$(Sx_i,\ x_i) \geqslant \delta\|x_i\|^2, \quad \delta = \sum_{j=i}^{i+1} \frac{\delta_j c_j}{\left|\prod\limits_{k\neq j}(\alpha_j-\alpha_k)\right|} > 0 \quad \forall\, x_i \in \mathfrak{H}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балінський А. І., Зорій Л. М.— ДАН УРСР. Сер. А., 1972, 6, 485—488.
2. Маркус А. С., Мацаев В. И., Руссу Г. И.— Acta Scient. Math. Szeged, 1973, 34, 245—271.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редакцию в сентябре 1973 г.