n-ТОЧЕЧНАЯ ПЛАНИМЕТРИЯ ТИПА ЕВКЛИДА

В. Я. Скоробогатько, Г. Н. Фешин, В. А. Пелых

В последние годы найдены необходимые и достаточные условия разрешимости n-точечной задачи для линейного дифференциального уравнения [1] и достаточные условия для нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка [2] при произвольном расположении точек, через которые проходит интегральная кривая. Приведем постановку n-точечной задачи.

На плоскости задано дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} - f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) = 0 \tag{α}$$

и n точек $(x_i,\ y_i)$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Необходимо найти интегральную кривую, проходящую через эти точки. Для того чтобы была разрешима * n-точечная задача для линейного уравнения

$$L_n y = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)\, y, \tag{β}$$

коэффициенты которого $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x)$ непрерывны, необходимо и достаточно, чтобы оператор $L_n y$ имел вид

$$L_n y = \left(\frac{d}{dx} - \alpha_1\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - \alpha_n\right) y,$$

где α_i — действительные функции, дифференцируемые $i - 1$ раз. Следовательно, условия разрешимости n-точечной задачи одинаковы по форме для уравнений различных порядков. n-Точечная задача является простым обобщением двухточечной задачи. Поэтому должны существовать планиметрии, где каждая «прямая» определяется n точками. Если $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, то эта «прямая» является интегральной кривой некоторого дифференциального уравнения n-го порядка.

В планиметрии Евклида прямая $y = c_1 x + c_2$ является интегральной кривой уравнения $y'' = 0$. Предположим, что в n-точечной планиметрии, обобщающей планиметрию Евклида, прямая определяется n $(n = k + 1)$ точками и ее уравнение является решением дифференциального уравнения $y^{(k+1)} = 0$.

1. **Мера n точек на плоскости.** Определим коэффициенты прямой

$$y = kx + b, \tag{1}$$

которая является решением дифференциального уравнения $y'' = 0$.

Известно, что выражение (1) можно записать в виде

$$y = \frac{\delta_1}{\delta} x + \frac{\delta_2}{\delta}, \tag{2}$$

где $\delta = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}$, $\delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, $x_i,\ y_i\ (i = 1,\ 2)$ — координаты точек M_1 и M_2 $(x_1 \neq x_2)$, через которые проходит прямая. Рассмотрим определитель δ_2. Элементами первой строки этого определителя являются координаты точки M_1, а элементами второй — координаты точки M_2. Выпуклая оболочка точек M_1 и M_2 — отрезок (одномерный симплекс). Если спроектировать точки M_1 и M_2 на оси координат, то их проекциями

* Задача разрешима, если решение существует и единственно.

на оси Ox и Oy соответственно будут точки $M_1'(x_1, 0)$, $M_2'(x_2, 0)$ и $M_1''(0, y_1)$, $M_2''(0, y_2)$. Значения определителей δ_1 и δ равны длинам отрезков $M_1''M_2''$ и $M_1'M_2'$, т. е. величинам проекций симплекса M_1M_2 на оси координат. Обобщим приведенные выше соображения на случай $k+1$ точки. Допустим, что уравнение «прямой» в $(k+1)$-точечной планиметрии имеет вид

$$y = a_1x^k + a_2x^{k-1} + \cdots + a_kx + a_{k+1}. \tag{3}$$

Определим константы $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ из условия, что «прямая» (3) проходит через $k+1$ заданных точек $M_1(x_1, y_1), \ldots, M_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$, которыми определяется $(k+1)$-точечная прямая. Для этого достаточно решить систему уравнений

$$y_i = a_1x_i^k + a_2x_i^{k-1} + \cdots + a_kx_i + a_{k+1} \quad (i = 1, \ldots, k+1). \tag{4}$$

Определив константы $a_1, \ldots, a_{k+1}$ из системы (4), выражение (3) запишем в виде

$$y = \frac{\Delta_1}{\Delta}x^k + \frac{\Delta_2}{\Delta}x^{k-1} + \cdots + \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta}, \tag{5}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^k & x_1^{k-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^k & x_2^{k-1} & \ldots & x_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{k+1}^k & x_{k+1}^{k-1} & \ldots & x_{k+1} & 1 \end{vmatrix},$$

а определители Δ_i получены из определителя Δ заменой i-го столбца на столбец $(y_1, \ldots, y_{k+1})$.

Рассмотрим определитель Δ_{k+1}. Элементами каждой строки его являются числа $x_i^k, x_i^{k-1}, \ldots, x_i, y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k+1)$, которые можно рассматривать как координаты точек $M_1', \ldots, M_{k+1}'$ в $(k+1)$-мерном евклидовом пространстве R_{k+1}. Выпуклая оболочка точек $M_1', \ldots, M_{k+1}'$ в пространстве R_{k+1} есть, вообще говоря, k-мерный симплекс $M_1' \ldots M_{k+1}'$. Если спроектировать вершины симплекса $M_1' \ldots M_{k+1}'$ на координатные гиперплоскости $z_1 = 0, z_2 = 0, \ldots, z_{k+1} = 0$ $(z_1 = x^k, z_2 = x^{k-1}, \ldots, z_{k+1} = y)$, то получим k-мерные симплексы

$$D_1, D_2, \ldots, D_{k+1}. \tag{6}$$

Величины определителей $\Delta_1, \ldots, \Delta_{k+1}$, умноженные на $\frac{1}{k!}$, определяют соответственно объемы k-мерных симплексов (6) в координатных гиперплоскостях $z_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k+1)$.

Рассмотрим векторы $\overline{m}_1 = \overline{M_1'M_2'}, \ldots, \overline{m}_k = \overline{M_1'M_{k+1}'}$, имеющие общее начало в вершине M_1', а концы в других вершинах k-мерного симплекса $M_1', \ldots, M_{k+1}'$, а также их векторное произведение

$$\overline{n} = [\overline{m}_1\overline{m}_2 \ldots \overline{m}_k]. \tag{7}$$

Проекции этого произведения на координатные гиперплоскости $z_i = 0$ совпадают с определителями $\Delta_1, \ldots, \Delta_{k+1}$. Поэтому модуль вектора (7), умноженный на $\frac{1}{k!}$, равен k-мерному объему k-мерного симплекса в R_{k+1}. Отсюда следует, что величины определителей $\Delta_1, \ldots, \Delta_{k+1}$, умноженные на $\frac{1}{k!}$, можно интерпретировать соответственно как k-мерные объемы проекций k-мерного симплекса $M_1' \ldots M_{k+1}'$ на координатные гиперплоскости $z_i = 0$, а величину определителя Δ_{k+1}, умноженную на $\frac{1}{k!}$,— как k-мерный объем симплекса $M'_1 \ldots M'_{k+1}$ в R_{k+1}. Следовательно, имеет смысл поставить в соответствие точкам $M_1, \ldots, M_{k+1}$ положительное число

$$\rho(M_1, \ldots, M_{k+1}) = \frac{1}{k!} \sqrt{\Delta^2 + \Delta_1^2 + \cdots + \Delta_{k+1}^2}, \tag{8}$$

которое назовем мерой $k+1$ точки на гиперплоскости. Введенная мера удовлетворяет следующим аксиомам:

$$1.\ \rho(M_1, M_2, \ldots, M_{k+1}) = \rho(M_2, M_1, \ldots, M_{k+1}) = \rho(M_{k+1}, M_k, \ldots, M_1).$$

$$2.\ \rho(M_1, M_2, \ldots, M_{k+1}) \geqslant 0.$$

$$3.\ \rho(M_2, M_3, \ldots, M_{k+2}) + \rho(M_1, M_3, \ldots, M_{k+2}) + \cdots + \rho(M_1, \ldots, M_k, M_{k+2}) \geqslant \rho(M_1, M_2, \ldots, M_{k+1}).$$

2. Интерпретация $(k+1)$-точечной прямой в R_{k+1}. Как отмечалось в п. 1, элементы каждой строки определителя Δ_{k+1} можно интерпретировать как координаты точек в евклидовом пространстве R_{k+1}. Вследствие этого точки $(k+1)$-точечной прямой на модели в пространстве R_{k+1} лежат на гиперплоскости, заданной уравнением

$$y = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_k z_k + a_{k+1}. \tag{9}$$

Легко видеть, что точки $M'_i(x_i^k, x_i^{k-1}, \ldots, x_i, y_i)$ $(i = 1, \ldots, k+1)$ лежат на цилиндре S_{k+1} с образующей, параллельной оси $z_{k+1} = Oy$, и с направляющей

$$z_k = x, \quad z_{k-1} = x^2, \ \ldots, \ z_1 = x^k, \tag{10}$$

которая лежит на цилиндре S_k в гиперплоскости $Oz_k \ldots z_1$ с образующей, параллельной оси Oz_1, и с направляющей

$$z_k = x, \quad z_{k-1} = x^2, \ \ldots, \ z_2 = x^{k-1}, \tag{11}$$

которая лежит на цилиндре S_{k-1} в $(k-1)$-мерной плоскости $Oz_k \ldots z_2$ с образующей, параллельной оси Oz_{k-3}, и т. д. с образующей, параллельной оси Oz_{k-3} и с направляющей

$$z_k = x, \quad z_{k-1} = x^2, \quad z^{k-2} = x^3, \tag{12}$$

которая лежит на цилиндре S_3 в плоскости $Oz_k z_{k-1} z_{k-2}$ с образующей, параллельной оси Oz_{k-2}, и с направляющей

$$z_k = x, \quad z_{k+1} = x^2, \tag{13}$$

которая лежит в плоскости $Oz_k z_{k-1}$.

Из сказанного выше следует, что $(k+1)$-точечную прямую можно интерпретировать в пространстве R_{k+1} как линию пересечения гиперплоскости (9) и цилиндра S_{k+1}. На цилиндре будем рассматривать функции, заданные уравнениями

$$z_k = x, \quad z_{k-1} = x^2, \ \ldots, \ z_1 = x^k, \quad y = f(x), \tag{14}$$

и говорить в этом случае, что функция $y = f(x)$ задана на цилиндре S_{k+1}.

3. Производные в $(k+1)$-точечной планиметрии. Пусть функция $y = f(x)$ задана на цилиндре S_{k+1}. Предположим, что точки $M_2, \ldots, M_{k+1}$, принадлежащие $(k+1)$-точечной прямой, расположены достаточно близко от точки M_1. В этом случае координаты их можно записать в таком виде:

$$\begin{gathered} x_1 = x, \quad x_2 = x + \Delta x_0, \ \ldots, \ x_{k+1} = x + \Delta x_{k-1}; \\ y_1 = y, \quad y_2 = y + \Delta y_0, \ \ldots, \ y_{k+1} = y + \Delta y_{k-1}. \end{gathered} \tag{15}$$

Рассмотрим выражения $\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_{k+1}}{\Delta}$, являющиеся коэффициентами уравнения (5). Подставляя в них значения x_i и y_i, определенные из формулы (15), запишем пределы этих выражений, когда точки $M_2, \ldots$

$\ldots, M_{k+1}$ стремятся по $(k+1)$-точечной прямой к точке M_1, т. е., когда $\Delta x_0 \to 0, \ldots, \Delta x_{k-1} \to 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta x_{k-1} \to 0}} \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \Delta y_0 & \Delta x_0^{k-1} & \ldots & \Delta x_0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta y_{k-1} & \Delta x_{k-1}^{k-1} & \ldots & \Delta x_{k-1} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta_0}, \tag{16_1}$$

. . . .

$$\lim_{\substack{\Delta x_0 \to 0 \\ \vdots \\ \Delta x_{k-1} \to 0}} \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{k} C_k^{k+1-i} x^{i-1} \Delta x_0^{k+1-i} & \ldots & \sum_{i=1}^{k} C_2^{3-i} x^{i-1} \Delta x_0^{3-i} & \Delta y_0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{k} C_k^{k+1-i} x^{i-1} \Delta x_{k-1}^{k+1-i} & \ldots & \sum_{i=1}^{k} C_2^{3-i} x^{i-1} \Delta x_{k-1}^{3-i} & \Delta y_{k-1} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta_0}, \tag{16_k}$$

где
$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \Delta x_0^k & \ldots & \Delta x_0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta x_{k-1}^k & \ldots & \Delta x_{k-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

При этом предполагается, что приращения $\Delta x_0 \neq \cdots \neq \Delta x_{k-1}$ и имеют одинаковый порядок малости.

Определение. Выражения (16_1) — (16_k) соответственно обозначим

$$\frac{\partial y}{\partial x^k}, \; \frac{\partial y}{\partial x^{k-1}}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x} \tag{17}$$

и будем называть производными первого порядка по $x^k, x^{k-1}, \ldots, x$ функции $y = f(x)$ по мере, определяемой выражением (8).

Для вычисления производных (16_1) — (16_k) функции $y = f(x)$, заданной на цилиндре S_{k+1}, нужно разложить в ряд Тейлора приращение этой функции с остаточным членом порядка малости C_k^2 (число из треугольника Паскаля) по отношению к Δx_i

$$\Delta y_i = y' \Delta x_i + \frac{y''}{2!} \Delta x_i^2 + \cdots + \frac{y^{(C_k^2 - 1)}}{(C_k^2 - 1)!} \Delta x_i^{C_k^2 - 1} +$$
$$+ \frac{y^{(C_k^2)}(x + \theta_i \Delta x_i)}{(C_k^2)!} \Delta x_i^{C_k^2}, \qquad i = (1, 2, \ldots, k-1). \tag{18}$$

Подставляя выражения (18) в формулы (16_1) — (16_k), как показано в работе [3], получаем формулу для вычисления произвольной производной $\frac{\partial y}{\partial x^{k-p+1}}$:

$$\frac{\partial y}{\partial x^{k-p+1}} = \sum_{m=1}^{p} (-1)^{m+p} C_{k-p+1}^{p-m} x^{p-m} \frac{y^{k-m+1}}{(k-m+1)!}, \tag{19}$$

где p $(1 \leqslant p \leqslant k)$ — порядковый номер члена x^s $(s = k - p + 1)$ в последовательности $x^k, x^{k-1}, \ldots, x$.

4. Дифференциал меры $k+1$ точки. Подставив соотношения (15) в формулу (8), получим выражение для приращения меры $k+1$ точки

$$\Delta\rho(M_1, \ldots, M_{k+1}) = \frac{\Delta_0}{k!} \sqrt{1 + \frac{\Delta\rho_1^2 + \cdots + \Delta\rho_k^2}{\Delta_0}}, \tag{20}$$

где через $\Delta\rho_1, \ldots, \Delta\rho_k$ обозначены знаменатели в формулах (16_1) — (16_k).

Рассмотрим

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0, \ldots, \Delta x_{k-1} \to 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta_0}. \tag{21}$$

Если предел (21) существует, назовем его производной меры $k+1$ точек и будем обозначать $\frac{d\rho}{dx}$. Теперь, подставляя выражение для Δy_i, согласно (18), в (21), находим, согласно (19),

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{k!} \sqrt{1 + \sum_{p=1}^{k} \left(\frac{\partial y}{\partial x^{k-p+1}} \right)^2}, \tag{22}$$

т. е. показываем, что предел (21) существует.

Из выражения (22) следует, что

$$d\rho = \frac{1}{k!} \sqrt{1 + \sum_{p=1}^{k} \left(\frac{\partial y}{\partial x^{k-p+1}} \right)^2} dx. \tag{23}$$

Будем называть $d\rho$ дифференциалом меры $k+1$ точки, а dx — дифференциалом.

В выражении (23) $\frac{\partial y}{\partial x^{k-p+1}}$ вычисляется по формуле (18). Поскольку Δx_i — независимые приращения, то

$$dx = \Delta_0. \tag{24}$$

Дифференциал dx имеет такой геометрический смысл: $\frac{1}{k!}$ часть определителя (24) представляет собой объем k-мерного симплекса, одна из вершин которого находится в начале координат, а остальные k вершин расположены на линии $z_k = x$, $z_{k-1} = x^2$, ..., $z_1 = x^k$ и имеют координаты Δx_i, Δx_i^2, ..., Δx_i^{k-1}, Δx_i^k.

5. Геометрический смысл производных $\frac{\partial f}{\partial x^k}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x}$. Рассмотрим кривую $y = f(x)$ на плоскости и будем искать уравнение соприкасательной к ней кривой, имеющей порядок касания k в точке $M_0(x_0, y_0)$, в виде (3).

Для определения коэффициентов выражения (3) составим систему

$$y_0^{(i)} = k(k-1)\ldots(k-i+1)a_1 x^{k-i} + \cdots + a_{k-i+1}, \tag{25}$$

разрешив которую, получим

$$\begin{gathered} a_1 = \frac{y_0^{(k)}}{k!}, \quad a_2 = \frac{y_0^{(k-1)}}{(k-1)!} - C_k^1 x_0 \frac{y_0^{(k)}}{k!}, \ldots, \\ a_k = y_0' - xy_0'' + \cdots + (-1)^k x_0^{k-2} \frac{y_0^{(k-1)}}{(k-2)!} + (-1)^{k+1} x_0^{k-1} \frac{y_0^{(k)}}{(k-1)!}. \end{gathered} \tag{26}$$

Сравнивая выражения (23) и (19), замечаем, что значения коэффициентов a_1, ..., a_k в уравнении (3) равны значениям выражения (19), вычисленным в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Рассмотрим кривую $y = f(x)$ на цилиндре S_{k+1}, заданную уравнениями (14). Нетрудно показать, что вектор k-й нормали этой кривой есть k-вектор, компоненты которого в $1!\,2!\ldots(k-1)!\,k!$ раз больше компонент подкоренного выражения (23). Отсюда следует такая теорема.

Теорема. *Для кривой* $y = f(x)$, *заданной на цилиндре* S_{k+1}, $\frac{1}{1!\,2!\ldots(k-1)!\,(k!)^2}$ *часть модуля вектора k-й нормали является модулем производной меры* $(k+1)$*-й точки на плоскости.*

Из изложенного выше следует, что значения производных в выражении (17) являются компонентами вектора k-й нормали кривой $y = f(x)$, расположенной на цилиндре S_{k+1}. Рассматривая на цилиндре S_{k+1} множество кривых $y = f(x)$, в каждой точке кривой можно определить вектор k-й нормали. Совокупность этих векторов определяет некоторое пространство — пространство k-й нормали N_k.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скоробогатько В. Я. — УМЖ, 1963, 15, 2.
2. Скоробогатько В. Я., Бобык Е. И.— УМЖ, 1964, 16, 6.
3. Фешин Г. М.— Збірник наукових робіт аспірантів Львівського політехн. ін-ту. Львів, 1972, 6.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1973 г.

О РАЗДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ В ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

П. И. Каленюк

Общим схемам разделения переменных посвящены работы [3—8]. В данной работе приводится одна схема метода разделения переменных в тензорном произведении гильбертовых пространств.

1. Для удобства изложения напомним кратко необходимые нам утверждения. Пусть H^1 и H^2 — два сепарабельных гильбертовых пространства, элементы которых будем обозначать через $f^1, g^1, \ldots$ и $f^2, g^2, \ldots$ соответственно, а скалярные произведения — через $(,)_i$ $(i = 1, 2)$. В линейном пространстве H формальных линейных комбинаций $\sum\limits_j f_j^1 \otimes f_j^2$, где формальное произведение $f^1 \otimes f^2$ билинейно, т. е.

$$1)\ (f^1 + g^1) \otimes f^2 = f^1 \otimes f^2 + g^1 \otimes f^2;$$
$$2)\ f^1 \otimes (f^2 + g^2) = f^1 \otimes f^2 + f^1 \otimes g^2;$$
$$3)\ (\lambda f^1) \otimes f^2 = f^1 \otimes (\lambda f^2) = \lambda (f^1 \otimes f^2)$$

(λ — комплексный скаляр), скалярное произведение определим следующим образом: для произвольных элементов

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i^1 \otimes f_i^2, \; g = \sum_{j=1}^{m} g_j^1 \otimes g_j^2 \in H$$

положим

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m}^{m} (f_i^1, g_j^1)_1 \quad (f_i^2, g_j^2)_2$$

(отметим, что это не единственный из возможных способов введения скалярного произведения в пространстве H). Гильбертово пространство $H^1 \otimes H^2$, которое является пополнением пространства H в скалярном произведении $(,)$, называется тензорным произведением гильбертовых пространств H^1 и H^2 [2, 10]. Элементы пространства $H^1 \otimes H^2$ будем обозначать через $f, g, \ldots$.

Для элемента $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i^1 \otimes f_i^2 \in H^1 \otimes H^2$ и элемента $f^1 \in H^1$ положим по определению

$$\langle f^1, f\rangle = \sum_{i=1}^{m} (f^1, f_i^1)_1 f_i^2 \in H^2.$$

Для произвольного $f \in H^1 \otimes H^2$ $\langle f^1, f\rangle \in H^2$ определяется как соответствующий предел. Известно [9], что если множество векторов $f_1^1, f_2^1, \ldots, f_n^1, \ldots$