

ПОЛЯРИЗАЦІЙНО-ОПТИЧНІ ПАРАМЕТРИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ ІЗОТРОПНОГО ДІЕЛЕКТРИЧНОГО ЦИЛІНДРА

Розглянуто пряму задачу визначення осесиметричних залишкових напружень у скінченному ізотропному діелектричному циліндричному тілі, що спричинені діагональним тензором несумісної вільної деформації, компоненти якого залежать лише від радіальної координати. На основі отриманого розв'язку задачі досліджено параметри, які можна визначати емпірично поляризаційно-оптичним методом, зондуючи тіло променями поляризованого світла в різних напрямках, і використовувати як вхідні дані для оберненої задачі неруйнівного визначення залишкового напружено-деформованого стану. Розглянуто три множини напрямків зондування, які лежать у площинах просторової симетрії напружено-деформованого стану, для кожної з яких встановлено інтегральні співвідношення, що пов'язують значення відповідного їй поляризаційно-оптичного параметра з розподілами компонент напружень у тілі на напрямку зондування. Проведені кількісні дослідження залежності поляризаційно-оптичних параметрів від рівня залишкових напружень і їхньої градієнтності дозволяють оцінювати інформативність емпіричних даних, які можна отримати зондуванням циліндра у цих трьох множинах напрямків.

Ключові слова: залишкові напруження, несумісна деформація, варіаційний метод однорідних розв'язків, поляризаційно-оптичні параметри поля напружень.

Залишкові напруження виникають у конструкційних і функціональних матеріалах, елементах споруд, машин і приладів під час їх виготовлення та експлуатації [15]. Вони впливають як на властивості матеріалів, так і на експлуатаційні характеристики виготовлених із них об'єктів, зокрема на міцність, надійність, довговічність [30, 31].

Часто залишкові напруження цілеспрямовано створюють у процесі виготовлення об'єктів, щоб надати їм бажаних властивостей. Так, гартуючи конструкційне скло, формують стискальні напруження на його поверхні, завдяки чому істотно підвищують міцнісні характеристики цього матеріалу [9, 24]. Залишкові напруження у скловолоконних світловодах використовують, щоб створити оптичну анізотропію, яка підтримує поляризацію світлових сигналів у хвилеводі [18]. Вплив напружень на механічні властивості скловолоконних світловодів і заготовок для них розглянуто у публікації [14].

Матеріали, призначені для створення напівпровідникових мікроелектронних приладів (наприклад, кремній SI), виготовляють у вигляді злиwkів великого діаметра (500 мм і більше) шляхом кристалізації із розплавів, застосовуючи високотемпературні процеси. За таких умов у зливках виникають значні градієнти температури, внаслідок чого формуються залишкові напруження [17]. Це, у свою чергу, призводить до зростання кількості структурних дефектів у матеріалі [16], що негативно впливає на його якість і ефективність виробництва приладів. Зливки розрізають на тонкі пластини, які обробляють за високих температур, формуючи на їхніх поверхнях оксидні плівки, дифузійно насичуючи їх різними домішками, приєднують до поверхні металеві контакти і струмовиводи тощо [29]. Нерівноважні фізичні процеси, що супроводжують ці технологічні операції, також спричиняють залишкові напруження [19], які негативно впливають на якість виробів.

Тому актуальною є проблема побудови математичних моделей для опису залишкових напружень у твердих тілах (елементах конструкцій і приладів) і розробка на цій основі методів та засобів визначення просторових розподілів компонент тензорів напружень і деформації на різних

✉ v.chekurin@gmail.com

етапах циклу життя цих об'єктів – під час виготовлення, зберігання, експлуатації.

Відомий підхід [23] до моделювання залишкових напружень у твердих тілах, який базується на концепції несумісної вільної деформації (eigen-strain), яку вводять як причину виникнення напружень у ненавантаженому тілі за однорідної температури та відсутності зовнішніх фізичних полів. Поле несумісної вільної деформації враховують фізичну та структурну неоднорідність тіла, набуту ним внаслідок протікання незворотних фізико-механічних процесів (фізична гетерогенність, пластичні деформації, дислокації та інші дефекти структури, фазові перетворення тощо). У науковій літературі можна знайти багато прикладів застосування такого підходу (див, наприклад, публікації [3–6, 9, 13, 21, 24]).

Постановка прямих задач про визначення залишкового напружено-деформованого стану в рамках такого підходу вимагає конкретизації просторових розподілів усіх компонент тензора несумісної вільної деформації. Намагання встановити їх розрахунковим шляхом в основному приводить до занадто складних нелінійних нестационарних задач визначення взаємозв'язаних фізико-механічних процесів, що протікали в об'єкті впродовж усього періоду його існування і спричинили формування поля несумісних вільних деформацій. Щоб сформулювати початкові і крайові умови для цих задач, необхідно мати достовірну інформацію щодо зовнішніх поверхневих та об'ємних сил, потоків тепла, параметрів інших фізичних полів, які діяли на об'єкт у цей період – на стадіях його виготовлення, технологічних обробок та експлуатації. Останнім часом появляються публікації, присвячені розрахунковому визначенню поля несумісної вільної деформації, що виникає за специфічних технологічних обробок, в ході яких з високою точністю контролюють параметри, необхідні для формулювання відповідних прямих задач (див, наприклад, [7, 20, 27]).

Проте у багатьох випадках розрахунковий метод не вдається реалізувати через брак даних для формулювання відповідних прямих задач чи через обчислювальну складність цих задач, або ж такий підхід не забезпечує точності, необхідної для інженерних застосувань. Тоді використовують методи емпіричного визначення параметрів залишкових напружень.

У механічних методах (руйнівних і частково руйнівних) вимірюють деформацію, що виникає під час розділення об'єкта на окремі частини чи видалення з його поверхні шарів матеріалу, висвердлювання глухих отворів тощо [22, 28]. У неруйнівних методах, які використовують дифракцію нейтронів чи рентгенівського випромінювання, вимірюють міжатомні віддалі в матеріалі, що дозволяє емпірично визначати деформацію матеріалу у приповерхневому шарі [28]. Відомі також неруйнівні методи, які базуються на взаємодії магнітного поля (метод шумів Баркгаузена) та ультразвуку (метод акустопружності) з полем напружень у твердому тілі [28].

Діелектричні матеріали, такі як скло і деякі пластмаси, а також кремній (Si), арсенід галію (GaAs), германій (Ge) та інші матеріали, які використовують у мікроелектронному виробництві, є прозорими для світла у видимому або інфрачервоному діапазонах. Параметри напружено-деформованого стану таких об'єктів можна визначати неруйнівним методом, зондуючи їх у різних напрямках променями поляризованого світла [8]. Інформативними параметрами тут є значення різниці фаз, що її набувають світлові промені на напрямках зондування [3–5, 8, 25]. Отримані таким чином емпіричні дані разом із моделлю інтегральної фотопружності [1, 10] використовують, щоб сформулювати відповідну обернену задачу визначення залишкових напружень. У працях [3, 4] запропоновано її варіаційне формулювання. Із цією метою введено функціонал, який визначає відхилення за нормою L_2 шуканого розв'язку задачі від емпіричних даних, отриманих шляхом поляризаційно-оптичних вимірювань. У статті [4] розглянуто застосування цього підходу для визначення гартувальних напружень у листовому склі.

Для побудови розв'язку використано повні системи власних функцій однорідної бігармонічної задачі для плоского шару [2].

У статтях [6, 13] розглянуто циліндричне тіло з осесиметричними залишковими напруженнями, спричиненими несумісними вільними деформаціями, залежними лише від радіальної координати. Із використанням варіаційного методу однорідних розв'язків [11, 12] розроблено метод розв'язування прямої задачі визначення залишкових напружень у тілі за заданого розподілу несумісної вільної деформації. Отриманий на цій основі розв'язок прямої задачі для випадку кульового тензора вільної деформації використано для кількісного дослідження множини поляризаційно-оптичних параметрів тіла, які можна визначати емпірично поляризаційно-оптичним методом зондуванням об'єкту в напрямках, що лежать в екваторіальній площині циліндра. У статті [13] розроблено також варіаційний метод розв'язування оберненої задачі визначення залишкових напружень, який базується на розвиненні шуканого розв'язку за системами власних функцій бігармонічної задачі для циліндра з однорідними умовами на бічній стороні [11], і досліджено збіжність отриманого розв'язку.

У цій статті розглядаємо осесиметричні залишкові напруження в скінченному циліндричному тілі, спричинені діагональним тензором несумісної деформації, компоненти якого залежать лише від радіальної координати. З використанням розв'язку прямої задачі, який отримано на підставі методики, розробленої в [11, 12], кількісно досліджено поляризаційно-оптичні параметри поля залишкових напружень, які можна визначати емпірично і використовувати як вхідні дані для обернених задач. Тут, на відміну від [11, 12], дослідимо *три* незалежні множини параметрів. Кожній із цих множин відповідає однопараметрична множина напрямків зондування, які лежать у певній площині просторової симетрії напружено-деформованого стану: *перша* – множина напрямків, що лежать в екваторіальній площині циліндра, *друга* – множина напрямків, нормальних до осі циліндра, які лежать у діаметральній площині, а *третья* – множина напрямків, паралельних до осі циліндра. Для кожної множини встановлено інтегральні співвідношення, які пов'язують значення відповідного поляризаційно-оптичного параметра з розподілами компонент напружень у тілі на напрямку зондування. Кількісні дослідження залежності поляризаційно-оптичних параметрів від рівня і градієнтності залишкових напружень дозволяють оцінити інформативність емпіричних даних, які можна отримати зондуванням циліндра у вибраних напрямках.

1. Формулювання задачі. Розглянемо вільне від навантажень циліндричне тіло \mathcal{V} , що займає область простору $\mathcal{V} = (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -b \leq z \leq b)$, обмежену поверхнею $\partial\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_2$, де $\mathcal{S} = (r = 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -b \leq z \leq b)$, $\mathcal{S}_1 = (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = b)$, $\mathcal{S}_2 = (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z = -b)$. Тут r , φ , z – циліндричні координати (r та z нормовані на радіус циліндра R). У тілі діють осесиметричні залишкові напруження, компоненти яких σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} , σ_{rz} залежать від координат r , z .

Згідно з концепцією несумісних деформацій [23], причиною виникнення залишкових напружень у тілі \mathcal{V} є вільні деформації (англ. eigenstrain). За цією концепцією компоненти повної деформації ε_{rr} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, ε_{zz} , ε_{rz} тіла визначаються як

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}^e + \hat{\varepsilon}_{rr}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^e + \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \hat{\varepsilon}_{zz}, \quad \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{rz}^e. \quad (1)$$

Тут ε_{rr}^e , $\varepsilon_{\varphi\varphi}^e$, ε_{zz}^e , ε_{rz}^e – компоненти пружної деформації, $\hat{\varepsilon}_{rr}$, $\hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}$, $\hat{\varepsilon}_{zz}$ – компоненти несумісного тензора вільних деформацій, залежні від радіальної координати r .

Тензор повної деформації, визначений формулою (1), є сумісним, отже,

його компоненти можемо виразити з використанням співвідношень Коші через компоненти u_r , u_z вектора переміщень. В результаті отримаємо систему рівнянь [13]:

$$\begin{aligned} \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} &= \hat{f}(r), \\ \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – осесиметричний оператор Лапласа, λ і μ – коефіцієнти Ляме, $\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}$, $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}_{rr} + \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + \hat{\varepsilon}_{zz}$, $\hat{f}(r) = \frac{d}{dr}(\lambda \hat{\varepsilon} + 2\mu \hat{\varepsilon}_{rr}) + 2\mu \hat{\delta}(r)$, $\hat{\delta}(r) = \frac{1}{r}(\hat{\varepsilon}_{rr} - \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi})$.

Права частина $f(r)$ першого із рівнянь цієї системи, яка залежить від компонент тензора вільної несумісної деформації, є джерелом залишкових напружень.

На поверхні циліндра $\partial\mathcal{V}$ виконуються умови ненавантаження:

$$\sigma_{rr}|_{r=1} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=1} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=\pm b} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{z=\pm b} = 0. \quad (3)$$

Використовуючи співвідношення пружності для тіл із несумісними деформаціями [13] та співвідношення Коші [23], умови (3) можемо виразити через компоненти вектора переміщень. Отримані умови разом із системою рівнянь (2) складають пряму крайову задачу в переміщеннях для знаходження залишкових напружень у скінченному циліндрі за відомих функцій $\hat{\varepsilon}_{rr}$, $\hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}$, $\hat{\varepsilon}_{zz}$.

2. Метод розв'язування. Згідно з підходом [13] задачу для неоднорідної системи (2) зводимо до задачі для відповідної однорідної системи. Для цього розглянемо два стани тіла – основний і збурений.

Основний стан визначається частковим розв'язком неоднорідної системи (2). Оскільки її права частина залежить лише від радіальної координати, то існує частковий розв'язок, у якому відмінними від нуля є компоненти напружень і деформацій $\sigma_{ij}^0(r)$, $\varepsilon_{ij}^0(r)$, $ij \in \{rr, \varphi\varphi, zz\}$, залежні лише від радіальної координати. Трансляційно-інваріантний стосовно осі z напружено-деформований стан (НДС), який визначається цим частковим розв'язком, прийmemo за основний стан тіла. Це стан плоскої деформації безмежного циліндричного тіла, спричинений діагональним тензором несумісної вільної деформації з компонентами $\hat{\varepsilon}_{rr}(r)$, $\hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r)$, $\hat{\varepsilon}_{zz}(r)$, залежними від радіальної координати. Для цього стану система (2) зводиться до звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d(ru_r^0)}{dr} \right] + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{d\varepsilon_{zz}^0}{dr} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \hat{f}(r). \quad (4)$$

Тут u_r^0 – радіальна компонента вектора переміщення основного стану.

Розв'язок рівняння (4) підпорядкуємо умові ненавантаження бічної поверхні:

$$\sigma_{rr}^0|_{r=1} = 0. \quad (5)$$

Можемо розглядати два стани плоскої деформації, які задовольняють рівняння (4) та умову (5), але відповідають різним умовам, що діють на торцевих поверхнях у безмежно віддалених точках. Перший стан виникає,

коли торцеві поверхні циліндра обмежені абсолютно жорсткими гладкими площинами, тоді

$$\varepsilon_{zz}^0 \Big|_{z \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad (6)$$

а другий стан – коли головний вектор напружень у поперечному перерізі циліндра $z = 0$ дорівнює нулеві:

$$\int_0^1 \sigma_{zz}^0 r dr = 0. \quad (7)$$

У випадку виконання умови (6) рівняння (4) спрощується, оскільки другий доданок є нульовим.

Збурений стан $\tilde{\sigma}_{ij}(r, z)$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}(r, z)$, $ij \in \{rr, zz, \phi\phi, rz\}$, визначається одно-рідною системою

$$\begin{aligned} \mu \left(\nabla^2 \tilde{u}_r - \frac{\tilde{u}_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial r} &= 0, \\ \mu \nabla^2 \tilde{u}_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

однорідними умовами на бічній поверхні:

$$\tilde{\sigma}_{rr} \Big|_{r=1} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz} \Big|_{r=1} = 0, \quad (9)$$

і неоднорідними умовами на торцевих поверхнях

$$\tilde{\sigma}_{zz} \Big|_{z=\pm b} = -\sigma_{zz}^0(r), \quad \tilde{\sigma}_{rz} \Big|_{z=\pm b} = 0. \quad (10)$$

Тут \tilde{u}_r та \tilde{u}_z – радіальна та осьова компоненти вектора переміщень збуреного стану, $\tilde{\varepsilon} \equiv \tilde{\varepsilon}_{rr} + \tilde{\varepsilon}_{\phi\phi} + \tilde{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{u}_r}{r} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z}$.

Додаючи відповідні компоненти НДС основного і збуреного станів

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^0(r) + \tilde{\sigma}_{rr}(r, z) &= \sigma_{rr}(r, z), & \sigma_{\phi\phi}^0(r) + \tilde{\sigma}_{\phi\phi}(r, z) &= \sigma_{\phi\phi}(r, z), \\ \sigma_{zz}^0(r) + \tilde{\sigma}_{zz}(r, z) &= \sigma_{zz}(r, z), & \tilde{\sigma}_{rz}(r, z) &= \sigma_{rz}(r, z), \end{aligned}$$

знайдемо НДС скінченного циліндра, спричинений вільними деформаціями $\hat{\varepsilon}_{rr}(r)$, $\hat{\varepsilon}_{\phi\phi}(r)$, $\hat{\varepsilon}_{zz}(r)$. Параметри цього НДС задовольняють систему рівнянь (2) і крайові умови (3).

2.1. Визначення основного стану. Використовуючи рівняння пружності для тіл із несумісними деформаціями [13], отримуємо співвідношення, якими компоненти напружень σ_{ij}^0 , $ij \in \{rr, \phi\phi, zz\}$, основного стану виражаються через радіальне переміщення u_r^0 :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^0 &= \lambda \left(\frac{du_r^0}{dr} + \frac{u_r^0}{r} + \varepsilon_{zz}^0 \right) + 2\mu \frac{du_r^0}{dr} - \lambda \hat{\varepsilon} - 2\mu \hat{\varepsilon}_{rr}, \\ \sigma_{\phi\phi}^0 &= \lambda \left(\frac{du_r^0}{dr} + \frac{u_r^0}{r} + \varepsilon_{zz}^0 \right) + 2\mu \frac{u_r^0}{r} - \lambda \hat{\varepsilon} - 2\mu \hat{\varepsilon}_{\phi\phi}, \\ \sigma_{zz}^0 &= \lambda \left(\frac{du_r^0}{dr} + \frac{u_r^0}{r} + \varepsilon_{zz}^0 \right) + 2\mu \varepsilon_{zz}^0 - \lambda \hat{\varepsilon} - 2\mu \hat{\varepsilon}_{zz}. \end{aligned} \quad (11)$$

Співвідношення (11) справджуються для випадку умови (7). Для випадку, коли виконуються умови (6), у формулах (11) слід покласти $\varepsilon_{zz}^0 \equiv 0$.

Інтегруючи рівняння (4) з урахуванням умови обмеженості функції u_r^0 в точці $r = 0$, отримуємо

$$u_r^0 = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^r \hat{f}(r) dr dr - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r} \int_0^r r \varepsilon_{zz}^0 dr + \frac{r}{2} C_1. \quad (12)$$

За умови (6) другий доданок у правій частині цієї формули тотожно дорівнює нулеві. У цьому випадку невизначену константу C_1 знаходимо, підпорядковуючи розв'язок (12) крайовій умові (5):

$$C_1 = \frac{1}{\lambda + \mu} \left(\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \int_0^1 \int_0^r \hat{f}(r) dr dr - \int_0^1 \hat{f}(r) dr + \lambda \hat{\varepsilon}(1) + 2\mu \hat{\varepsilon}_{rr}(1) \right). \quad (13)$$

В результаті для випадку виконання умов (6) отримуємо такі формули для залишкових напружень основного стану:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^0 = & -\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r \int_0^r \hat{f}(r) dr dr - \int_0^1 r \int_0^r \hat{f}(r) dr dr \right) + \int_0^r \hat{f}(r) dr - \\ & - \int_0^1 \hat{f}(r) dr - \lambda \hat{\varepsilon} - 2\mu \hat{\varepsilon}_{rr} + \lambda \hat{\varepsilon}(1) + 2\mu \hat{\varepsilon}_{rr}(1), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^0 = & \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r \int_0^r \hat{f}(r) dr dr + \int_0^1 r \int_0^r \hat{f}(r) dr dr \right) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \int_0^r \hat{f}(r) dr - \\ & - \int_0^1 \hat{f}(r) dr - \lambda \hat{\varepsilon} - 2\mu \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + \lambda \hat{\varepsilon}(1) + 2\mu \hat{\varepsilon}_{rr}(1), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^0 = & \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{2\mu}{\lambda + \mu} \int_0^1 \int_0^r \hat{f}(r) dr dr + \int_0^1 \hat{f}(r) dr \right) - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^1 \hat{f}(r) dr - \\ & - \lambda \hat{\varepsilon} - 2\mu \hat{\varepsilon}_{zz} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (\lambda \hat{\varepsilon}(1) + 2\mu \hat{\varepsilon}_{rr}(1)). \end{aligned} \quad (16)$$

Якщо виконується умова (7), то у формулі (12) необхідно визначити і сталу C_1 , і компоненту деформації $\varepsilon_{zz}^0(r)$ початкового стану. Для цього використовуємо крайову умову (5) і умову (7). У результаті приходимо до системи рівнянь:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} = & \frac{4\mu^2}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} \int_0^1 \int_0^r \hat{\delta}(r) dr dr - \\ & - \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \int_0^1 \hat{\delta}(r) dr + \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \int_0^1 r \left(\hat{\varepsilon}_{rr} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi} + \hat{\varepsilon}_{zz}) \right) dr, \\ C_1 + \frac{8\mu(\lambda + \mu)}{\lambda(\lambda + 2\mu)} C_2 = & \frac{4\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\int_0^1 r \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi} dr - \int_0^1 r \int_0^r \hat{\delta}(r) dr dr \right) + \\ & + \frac{8\mu(\lambda + \mu)}{\lambda(\lambda + 2\mu)} \int_0^1 r \hat{\varepsilon}_{zz} dr, \end{aligned}$$

$$\text{де } C_2 = \int_0^1 r \varepsilon_{zz}^0 dr.$$

Звідси знаходимо

$$C_1 = \frac{4\mu}{(\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)} \left((\lambda + 2\mu) \int_0^1 r \int_0^r \hat{\delta}(r) dr dr - \right. \\ \left. - 2(\lambda + \mu) \left(\int_0^1 \hat{\delta}(r) dr - \int_0^1 r \hat{\varepsilon}_{rr} dr \right) + \lambda \int_0^1 r \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi} dr, \right. \\ \left. C_2 = \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \left(-2 \int_0^r \hat{\delta}(r) dr + \frac{1}{r} \hat{\delta}(r) - \hat{\varepsilon}_{rr} + \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \right) + \hat{\varepsilon}_{zz} \right) r dr. \right. \quad (17)$$

Із формули (17) випливає:

$$\int_0^1 \left(\varepsilon_{zz}^0 - \hat{\varepsilon}_{zz} + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \left(2 \int_0^r \hat{\delta}(r) dr - \frac{1}{r} \hat{\delta}(r) + \hat{\varepsilon}_{rr} - \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \right) \right) r dr = 0. \quad (18)$$

Рівність (18) буде виконуватися, якщо покласти

$$\varepsilon_{zz}^0 - \hat{\varepsilon}_{zz} + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \left(2 \int_0^r \hat{\delta}(r) dr - \frac{1}{r} \hat{\delta}(r) + \hat{\varepsilon}_{rr} - \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \right) = 0,$$

звідки отримуємо

$$\varepsilon_{zz}^0(r) = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \left(-2 \int_0^r \hat{\delta}(r) dr + \frac{1}{r} \hat{\delta}(r) - \hat{\varepsilon}_{rr}(r) + \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r) \right) + \hat{\varepsilon}_{zz}(r). \quad (19)$$

Таким чином, у випадку виконання умови (7) залишкові напруження основного стану матимуть вигляд

$$\sigma_{rr}^0 = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)} \left(\int_0^1 r \hat{F}_1(r) dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r r \hat{F}(r) dr \right) + 2\mu \int_0^r \hat{\delta}(r) dr, \quad (20)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^0 = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)} \left(\int_0^1 r \hat{F}_1(r) dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r r \hat{F}(r) dr + \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \hat{F}_2(r) \right), \quad (21)$$

$$\sigma_{zz}^0 = \frac{4\lambda\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu)} \left(\int_0^1 r \hat{F}_1(r) dr - \frac{1}{2} \hat{F}_1(r) \right), \quad (22)$$

де

$$\hat{F}(r) = (\lambda + 2\mu) \int_0^r \hat{\delta}(r) dr - \frac{\lambda^2}{2(\lambda + \mu)} \frac{1}{r} \hat{\delta}(r) + 2(\lambda + \mu) \hat{\varepsilon}_{rr} + \lambda \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi},$$

$$\hat{F}_1(r) = (\lambda + 2\mu) \int_0^r \hat{\delta}(r) dr - 2(\lambda + \mu) \frac{1}{r} \hat{\delta}(r) + 2(\lambda + \mu) \hat{\varepsilon}_{rr} + \lambda \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi},$$

$$\hat{F}_2(r) = \lambda(\lambda + 2\mu) \int_0^r \hat{\delta}(r) dr + \frac{\lambda^2}{r} \hat{\delta}(r) - \lambda^2 \hat{\varepsilon}_{rr} - (5\lambda(\lambda + 2\mu) + 4\mu^2) \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}.$$

Для кількісного аналізу залишкових напружень *першого та другого основного станів* розподіли компонент вільних деформацій $\hat{\varepsilon}_{rr}$, $\hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}$, $\hat{\varepsilon}_{zz}$ задамо у вигляді:

$$\hat{\varepsilon}_{rr}(r) = k_1 \begin{cases} a_{11} t \left(a, \frac{r_1}{2} - r \right), & 0 \leq r \leq r_1, \\ 0, & r_1 < r < r_2, \\ a_{12} t \left(a, r - \frac{r_2 + 1}{2} \right), & r_2 < r < 1, \end{cases} \quad (23)$$

$$\hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r) = k_2 \begin{cases} a_{21} \left(1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right) t\left(a, \frac{r_1}{2} - r\right), & 0 \leq r \leq r_1, \\ 0, & r_1 < r < r_2, \\ a_{22} t\left(a, r - \frac{r_2 + 1}{2}\right), & r_2 < r < 1, \end{cases} \quad (24)$$

$$\hat{\varepsilon}_{zz}(r) = k_3 \begin{cases} a_{31} t\left(a, \frac{r_1}{2} - r\right), & 0 \leq r \leq r_1, \\ 0, & r_1 < r < r_2, \\ a_{32} t\left(a, r - \frac{r_2 + 1}{2}\right), & r_2 < r < 1. \end{cases} \quad (25)$$

У формулах (23)–(25) $a, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, k_1, k_2, k_3, r_1, r_2$ – задані константи і введено позначення для функції $t(a, r) \equiv (\text{th}(ar) + 1)/2$,

Залежності (23)–(25) побудовано шляхом згладжування стрибків кусково-неперервних функцій вигляду

$$f_1(r) = k_1 \begin{cases} a_{11}, & 0 \leq r \leq r_1, \\ 0, & r_1 < r < r_2, \\ a_{12}, & r_2 < r < 1, \end{cases} \quad f_2(r) = k_2 \begin{cases} a_{21}(1 - (r/r_1)^2), & 0 \leq r \leq r_1, \\ 0, & r_1 < r < r_2, \\ a_{22}, & r_2 < r < 1, \end{cases}$$

функцією $\text{th}(ar)$. Вибором коефіцієнта $a > 0$ в аргументі цієї функції можемо збільшувати або зменшувати градієнтність функцій (23)–(25), а отже, – і залишкових напружень. Змінюючи сталі k_1, k_2, k_3 у формулах (23)–(25), можемо керувати рівнем залишкових напружень, спричинених несумісною деформацією.

Підінтегральні вирази у формулах (13)–(16), (19)–(22) містять функцію $(\hat{\varepsilon}_{rr}(r) - \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r))/r$. Щоб забезпечити її інтегровність на відрізку $r \in [0, 1]$, підпорядкуємо функції $\hat{\varepsilon}_{rr}(r)$ та $\hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r)$ умові $(\hat{\varepsilon}_{rr}(r) - \hat{\varepsilon}_{\varphi\varphi}(r))|_{r=0} = 0$.

Результати розрахунку залишкових напружень σ_{rr}^0 основного стану за формулами (14)–(16) і (20)–(22) подано на рис. 1а–рис. 3а і рис. 1б–рис. 3б відповідно. Обчислення виконано для безрозмірної висоти циліндра $2b = 2$, приймаючи у формулах (23)–(25) $k_1 = k_2 = k_3 = k$, $a = 20$, $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 1$, $a_{22} = 1/2$, $a_{31} = 3/2$, $a_{32} = 1/3$, $r_1 = 1/3$, $r_2 = 2/3$. Криві 1–5 на рисунках відповідають значенням $k = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

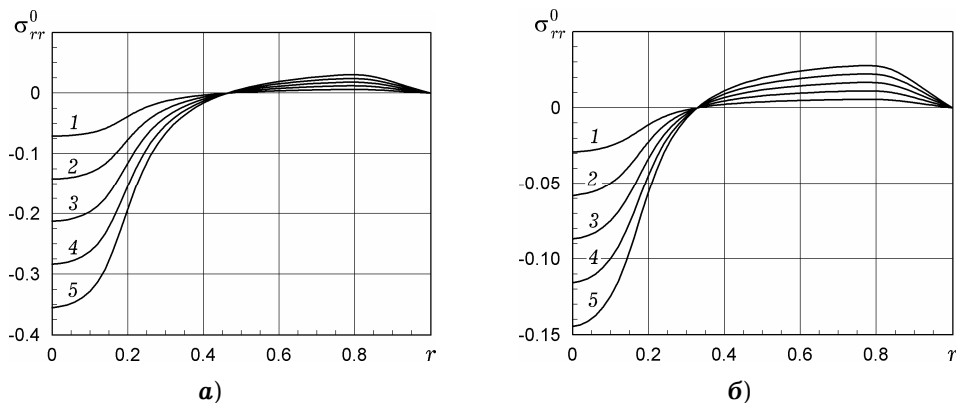
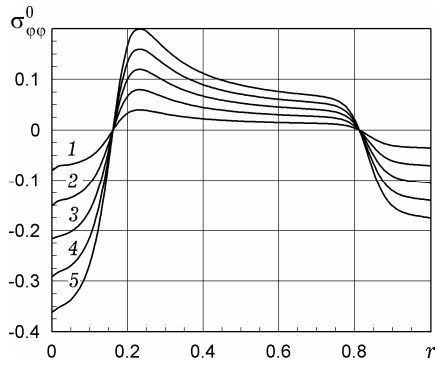
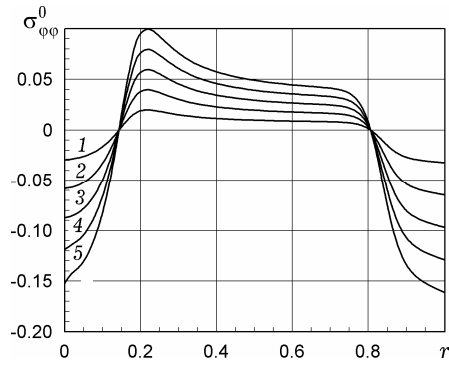


Рис. 1

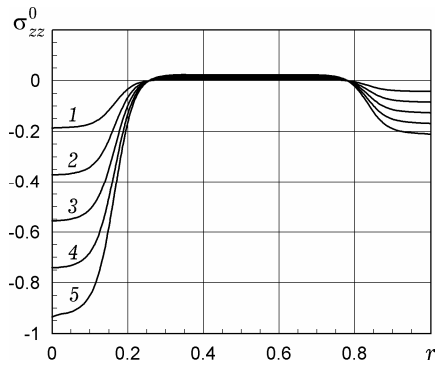


а)

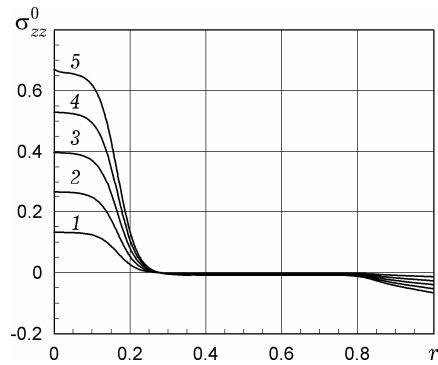


б)

Рис. 2



а)



б)

Рис. 3

Аналізуючи наведені залежності, зауважуємо відмінності у розподілах компонент напружень першого та другого основного станів, що пояснюється відмінністю тензорів несумісних вільних деформацій цих двох станів і відмінністю умов на торцевих поверхнях у безмежно віддалених точках. Безпосереднім обчисленням легко перекопатися, що осеві напруження σ_{zz}^0 другого основного стану задовольняють умову (7).

2.2. Визначення збуреного стану. Система рівнянь (8) зводиться до однорідного бігармонічного рівняння [26]

$$\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\chi} = 0 \quad (26)$$

стосовно функції Лява $\tilde{\chi}$, через яку виражаються параметри НДС. Зокрема, для компонент напружень маємо такі формули [13, 26]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma}_{rr} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \tilde{\chi} - \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial r^2} \right), & \frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \tilde{\chi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial r} \right), \\ \frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma}_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \nu) \nabla^2 \tilde{\chi} - \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial z^2} \right), & \frac{1}{2\mu} \tilde{\sigma}_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \nu) \nabla^2 \tilde{\chi} - \frac{\partial^2 \tilde{\chi}}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Тут ν – коефіцієнт Пуассона.

Розв'язок рівняння (26) треба підпорядкувати на бічній поверхні однорідним умовам (9), а на торцевих поверхнях – неоднорідним умовам (10).

Подаючи розв'язок рівняння (26) у вигляді розвинення за системами однорідних бігармонічних функцій [11], отримаємо представлення для розв'язку $\tilde{\chi}(r, z)$, яке автоматично задовольняє умови (9) на бічній стороні.

Коефіцієнти розвинення знайдемо, використовуючи варіаційний метод однорідних розв'язків, який детально описано в статтях [11–13].

Метод однорідних розв'язків застосовний лише до задач, у яких навантаження, прикладені до торцевих поверхонь, є самозрівноваженими. У випадку виконання (6) ця умова не виконується. Тому задачу (26), (9), (10) для цього випадку розіб'ємо на дві. Першою задачею визначається однорідний НДС σ'_{zz} , ε'_{rr} , $\varepsilon'_{\varphi\varphi}$, ε'_{zz} , який виникає у циліндрі \mathcal{B} під дією однорідного

осьового навантаження $-2\int_0^1 r\sigma_{zz}^0 dr$, прикладеного до торців:

$$\begin{aligned}\sigma'_{zz} &= -2\int_0^1 r\sigma_{zz}^0 dr, & \varepsilon'_{rr} &= \frac{2\nu}{E}\int_0^1 r\sigma_{zz}^0 dr, \\ \varepsilon'_{\varphi\varphi} &= \frac{2\nu}{E}\int_0^1 r\sigma_{zz}^0 dr, & \varepsilon'_{zz} &= -\frac{2}{E}\int_0^1 r\sigma_{zz}^0 dr.\end{aligned}$$

Тут E – модуль Юнга.

Другою задачею визначається осесиметричний НДС σ''_{ij} , ε''_{ij} , $ij \in \{rr, \varphi\varphi, zz, rz\}$, коли на торцевих поверхнях задовольняються умови

$$\sigma''_{zz}|_{z=\pm b} = -\sigma_{zz}^0 + 2\int_0^1 r\sigma_{zz}^0 dr, \quad \sigma''_{rz}|_{z=\pm b} = 0, \quad (27)$$

а на бічній поверхні – умови вигляду (9). Цю задачу розв'язуємо варіаційним методом однорідних розв'язків [10, 13].

У цьому випадку розв'язок для збуреного стану визначиться так:

$$\tilde{\sigma}_{rr} = \sigma''_{rr}, \quad \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sigma''_{\varphi\varphi}, \quad \tilde{\sigma}_{zz} = \sigma'_{zz} + \sigma''_{zz}, \quad \tilde{\sigma}_{rz} = \sigma''_{rz}.$$

У випадку, коли основний стан відповідає умові (7), навантаження, прикладене до торцевих поверхонь, є самозрівноваженим, тому метод однорідних розв'язків застосовуємо безпосередньо до задачі (26), (9), (10).

На рис. 4а–рис. 7а показано розподіли за осьовою координатою z компонент напружень $\tilde{\sigma}_{rr}$, $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$, $\tilde{\sigma}_{zz}$, $\tilde{\sigma}_{rz}$ збуреного стану у випадку, коли основний стан визначається умовою (6), а на рис. 4б–рис. 7б – умовою (7). Криві 1–5 обчислено при $k = 0.1$ для різних значень висоти циліндра $b = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2$. Компоненту напружень $\tilde{\sigma}_{rr}$ розраховано на осі циліндра $r = 0$, компоненти $\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}$ та $\tilde{\sigma}_{zz}$ – на поверхні $r = 1$, а компоненти $\tilde{\sigma}_{rz}$ – при $r = 0.5$.

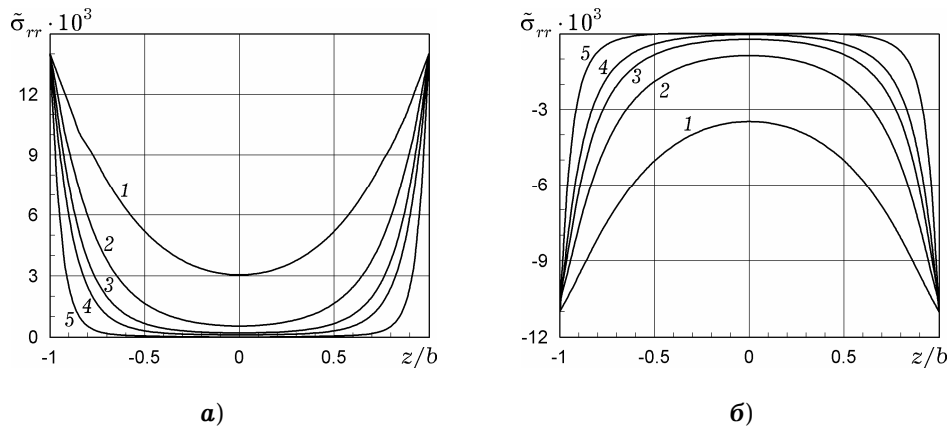


Рис. 4

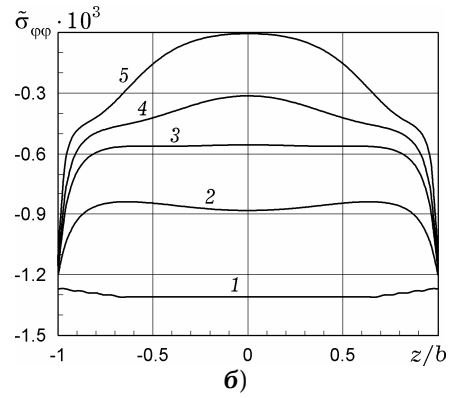
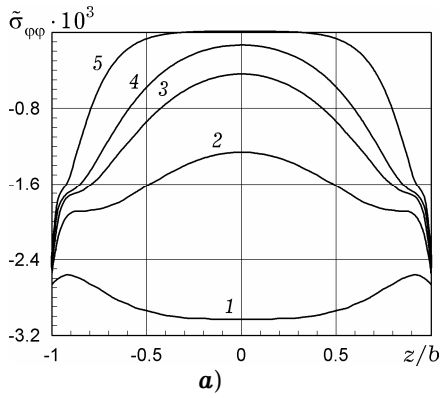


Рис. 5

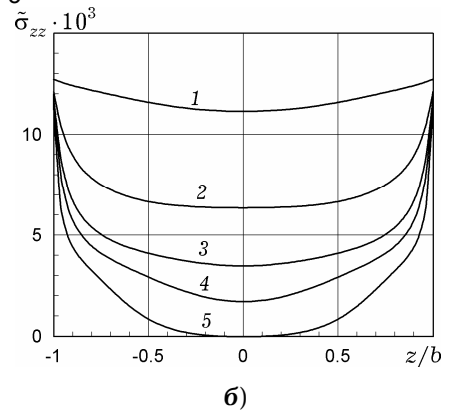
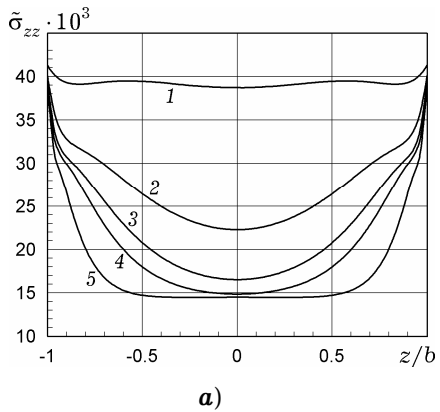


Рис. 6

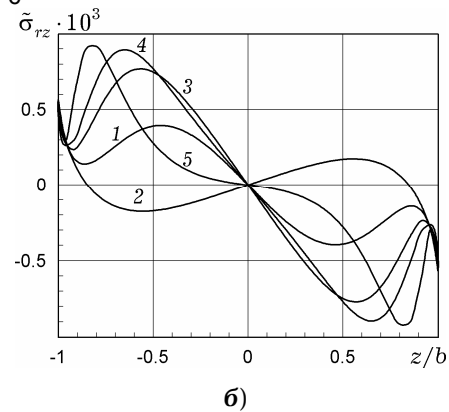
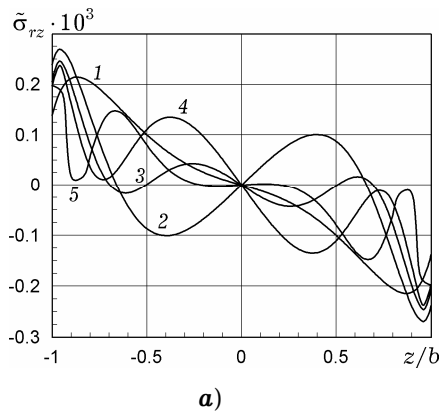


Рис. 7

Як бачимо, за величиною напруження у збуреному стані є значно меншими ніж відповідні напруження основного стану. Аналізуючи картину напружень збуреного стану, зауважуємо крайовий ефект – зі збільшенням висоти $2b$ циліндра істотно зростає градієнтність компонент напружень в околі торців, тоді як у центральній частині розподіли компонент напружень наближаються до значень, які відповідають основному стану.

3. Дослідження поляризаційно-оптичних параметрів. Дослідимо поляризаційно-оптичні параметри поля напружень у циліндрі, які можемо визначати, використовуючи метод фотопружності [8].

Зондуючи тіло променями поляризованого світла в різних напрямках, вимірюючи зміну їхнього стану поляризації та використовуючи модель інтегральної фотопружності, можемо отримати емпіричні дані про розподіли компонент напружень та/чи деформації вздовж шляху поширення променя в тілі [1, 8, 10]. У деяких випадках, коли НДС має певну просторову

симетрію, можна встановити аналітичні співвідношення, які пов'язують стан поляризації світлового променя на виході з об'єкта з інтегралами від компонент тензора напружень уздовж шляху поширення променя в тілі. Це можливо, зокрема, якщо зондувати вздовж прямих, що лежать у площині симетрії НДС, коли напрямки головних осей тензора напружень є однаковими в усіх точках лінії поширення променя в об'єкті.

У випадку осесиметричного НДС, який тут розглядаємо, існує площина симетрії $z = 0$ та сім'я еквівалентних площин $\varphi = \text{const} \in [0, \pi)$.

За умов осесиметричного НДС усі напрямки зондування, що лежать в екваторіальній площині $z = 0$ на відстані $\psi \in (0, 1)$ від початку координат $r = 0$, є еквівалентними. Тому без обмеження загальності можемо розглядати зондування вздовж прямих $y = \psi \in [0, 1)$, $z = 0$, паралельних до осі x (див. рис. 8а).

На кожному напрямку зондувальний промінь взаємодіє з полем напружень на відрізку $d_e(\psi) \equiv [x_{\text{in}}(\psi), x_{\text{out}}(\psi)]$ прямої $y = \psi$, де $x_{\text{in}}(\psi) \equiv -\sqrt{1 - \psi^2}$, $x_{\text{out}}(\psi) \equiv \sqrt{1 - \psi^2}$ – абсциси точок входу та виходу зондувального променя на цьому напрямку. Радіальна r та кутова φ координати точок $x \in d_e(\psi)$ визначаються так:

$$r(x, \psi) = \sqrt{\psi^2 + x^2}, \quad \varphi(x, \psi) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{\psi^2 + x^2}}\right), \quad (28)$$

У цьому випадку формулою

$$I_e(\psi) = C \int_{x_{\text{in}}(\psi)}^{x_{\text{out}}(\psi)} \left(\sigma_{zz}(r(x, \psi), 0) - \sigma_{rr}(r(x, \psi), 0) - (\sigma_{\varphi\varphi}(r(x, \psi), 0) - \sigma_{rr}(r(x, \psi), 0)) \cos^2(\varphi(x, \psi)) \right) dx \quad (29)$$

пов'язується поляризаційно-оптичний параметр $I_e(\psi)$ (різниця фаз) променя, що пройшов крізь тіло у цьому напрямку, з розподілом напружень на відрізку $d_e(\psi)$. Тут C – константа фотопружності, якою визначається здатність матеріалу тіла змінювати свої діелектричні властивості під впливом напружень.

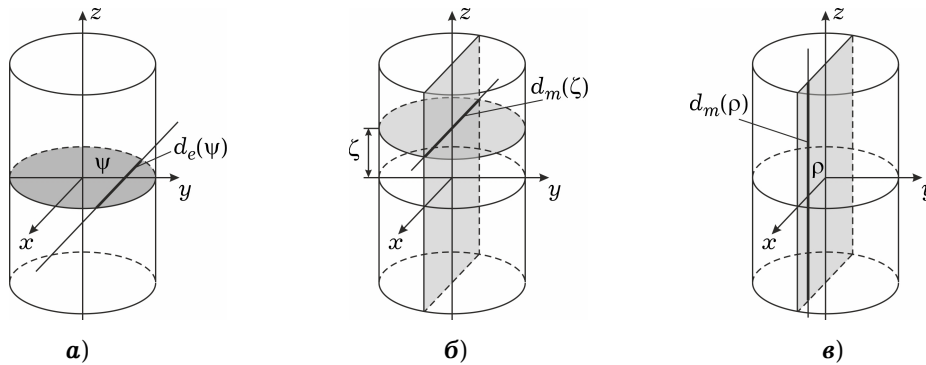


Рис. 8

Параметр $I_e(\psi)$ можемо визначити, використовуючи техніку поляризаційно-оптичних вимірювань, отримуючи його емпіричні значення $I_e^{\text{emp}}(\psi)$. Отже, формулою (29) встановлюється зв'язок між емпіричним параметром $I_e^{\text{emp}}(\psi)$ і розподілом компонент залишкових напружень на відрізку $d_e(\psi)$.

Зондуючи тіло вздовж напрямків із множини $K_e = \{d_e(\psi) \forall \psi \in [0,1)\}$, отримаємо множину емпіричних даних $D_e^{\text{emp}}(K_e) = \{I_e^{\text{emp}}(\psi) \forall \psi \in [0,1)\}$, яка порівняно з формулою (29) містить інформацію про НДС тіла.

У статті [13] розглянуто приклад застосування формули (29)¹ для формулювання оберненої задачі про визначення залишкових напружень у скінченному циліндрі, які спричинені кульовим тензором вільних деформацій $\varepsilon_{zz}(r) = \varepsilon_{rr}(r) = \varepsilon_{\varphi\varphi}(r)$.

Розглянемо тепер зондування уздовж прямих, що лежать у меридіональній площині $\varphi = \text{const}$ і проходять через діаметр перпендикулярно до осі циліндра на відстані ζ від перерізу $z = 0$. У випадку осьової симетрії без обмеження загальності прямі $y = 0$, $z = \zeta \in (0, b)$ можемо розглядати як напрямки зондування (див. рис. 8б).

На кожному напрямку зондувальний промінь взаємодіє з полем напружень на відрізку $d_m(\zeta) \equiv [-1, 1]$.

Радіальна r і кутова φ координати точок $x \in d_m(\zeta)$ визначаються формулами (28), у яких треба покласти $\psi = 0$. Отже, маємо

$$r(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1, 0), \\ x, & x \in [0, 1], \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} \pi, & x \in [-1, 0), \\ 0, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

У цьому випадку поляризаційно-оптичний параметр $I_m(\zeta)$ променя, що пройшов через тіло у цьому напрямку, визначається формулою

$$I_m(\zeta) = C \int_{-1}^1 \left(\sigma_{zz}(r(x), \zeta) - \sigma_{\varphi\varphi}(r(x), \zeta) \right) dx. \quad (30)$$

Використовуючи техніку поляризаційно-оптичних вимірювань, можемо встановити емпіричне значення $I_m^{\text{emp}}(\zeta)$ цього параметра. Порівнюючи $I_m^{\text{emp}}(\zeta)$ з формулою (30), отримуємо певну інформацію про напружено-деформований стан тіла. Зондуючи тіло вздовж напрямків із множини $K_m = \{d_m(\zeta) \forall \zeta \in [0, b)\}$, отримаємо множину емпіричних даних $D_m^{\text{emp}}(K_m) = \{I_m^{\text{emp}}(\zeta) \forall \zeta \in [0, b)\}$, що містять інформацію про НДС тіла.

Розглянемо тепер зондування тіла у напрямках, паралельних до осі циліндра. З огляду на осьову симетрію за напрямки зондування без обмеження загальності можемо прийняти прямі $r = \rho = \text{const} \in [0, 1)$, $\varphi = 0$ (див. рис. 8в). У цьому випадку на кожному напрямку зондувальний промінь взаємодіє з полем напружень на відрізку $d_a(\rho) \equiv [-b, b]$. Поляризаційно-оптичний параметр $I_a(\rho)$ променя, що пройшов через тіло у цьому напрямку, визначається формулою

$$I_a(\rho) = C \int_{-b}^b \left(\sigma_{rr}(\rho, z) - \sigma_{\varphi\varphi}(\rho, z) \right) dz. \quad (31)$$

Зондуючи тіло вздовж напрямків із множини $K_a = \{d_a(\rho) \forall \rho \in (0, 1)\}$, отримаємо множину емпіричних даних $D_a^{\text{emp}}(K_a) = \{I_a^{\text{emp}}(\rho) \forall \rho \in (0, 1)\}$ про НДС тіла.

Таким чином, використовуючи техніку поляризаційно-оптичних вимі-

¹ У статті [13] формула (29) набрана з помилкою – відсутній другий доданок $-\sigma_{rr}(r(x), 0)$ у підінтегральному виразі.

рювань, можемо встановити три множини емпіричних даних D_e^{emp} , D_m^{emp} і D_a^{emp} , які порівняно з відповідними функціоналами (29)–(31) містять інформацію про осесиметричний НДС циліндричного тіла. Їх можна використати для формулювання обернених задач про визначення залишкових напружень.

Інформативність цих даних залежить від їхньої чутливості до зміни НДС. Її оцінювали на основі формул (29)–(31), задаючи розподіли несумісних вільних деформацій у тілі у вигляді (23)–(25). Вибором значення параметра k змінювали рівень залишкових напружень.

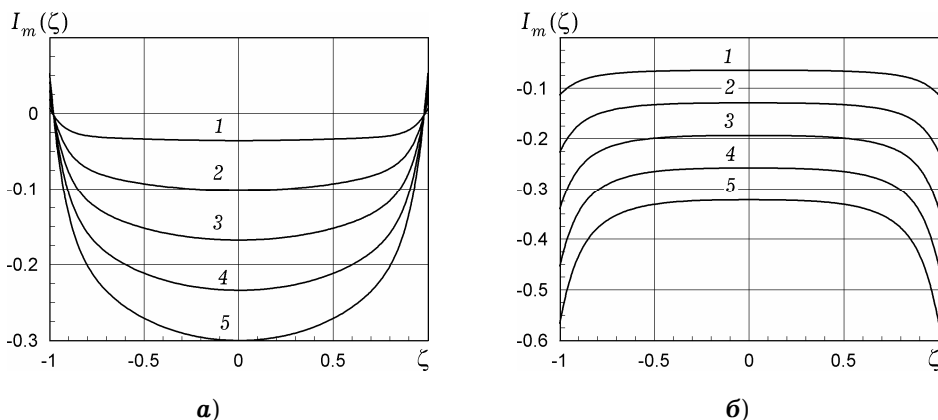


Рис. 9

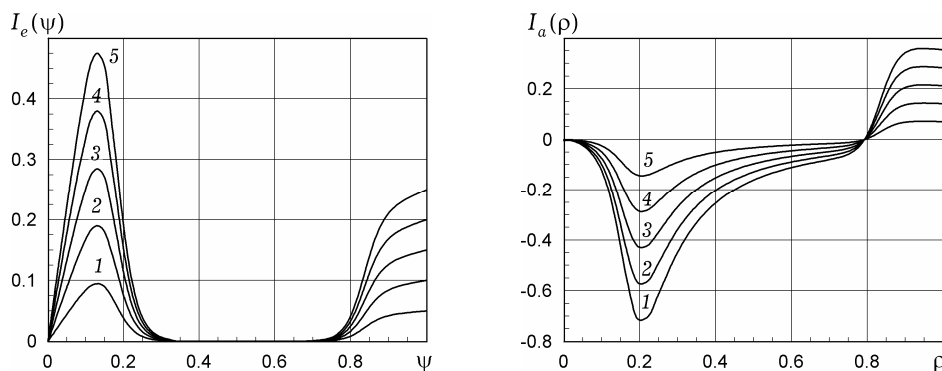


Рис. 10

Рис. 11

На рис. 9 подано графіки нормованих на сталу C залежностей $I_m(\zeta)$ для першого (рис. 9а) та другого (рис. 9б) основних станів при різних значеннях коефіцієнта $k = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ (криві 1–5 відповідно). На рис. 10, рис. 11 подано відповідно графіки залежностей $I_e(\psi)$ та $I_a(\rho)$, нормованих на C (криві 1–5 відповідають тим самим значенням параметра k). Тут, на відміну від $I_m(\zeta)$, значення функціоналів як $I_e(\psi)$, так і $I_a(\rho)$ не залежать від вибору основного стану при заданому розподілі (23)–(25) несумісних вільних деформацій у тілі.

З наведених графіків бачимо, що вимірювальні параметри істотно змінюються зі зміною рівня залишкових напружень, тобто можемо зробити висновок, що множини емпіричних даних D_e^{emp} , D_m^{emp} та D_a^{emp} , отримані для тіл, діелектричні властивості яких відчутно залежать від напружень, будуть інформативними.

Висновки. У рамках концепції несумісної вільної деформації сформульовано крайову задачу про визначення осесиметричних залишкових напружень у циліндричному тілі, спричинених діагональним тензором несумісних вільних деформацій, компоненти якого залежать від радіальної координати. Запропоновано аналітичні представлення для компонент цього тензора, які дозволяють змінювати рівень зумовлених ними залишкових напружень та їхню градієнтність.

З використанням варіаційного методу однорідних розв'язків розроблено методику розв'язування задачі про визначення осесиметричних залишкових напружень у скінченному циліндричному тілі за заданих розподілів компонент тензора несумісної вільної деформації.

Розглянуто взаємодію променів поляризованого світла з осесиметричним полем напружень у циліндричному діелектричному тілі за його зондування в напрямках, які лежать у площинах симетрії НДС. Встановлено інтегральні співвідношення, які пов'язують розподіли компонент залишкових напружень у тілі на напрямках зондування із вимірювальними поляризаційно-оптичними параметрами. На цій основі з використанням отриманих розв'язків прямої задачі теорії пружності для циліндра із несумісною деформацією, проведено кількісні дослідження параметрів, які можна визначити емпірично, застосовуючи техніку поляризаційно-оптичних вимірювань, і використовувати їх як вхідні дані для формулювання обернених задач про визначення залишкових напружень.

Отримані результати можна використати для формулювання обернених задач визначення осесиметричних залишкових напружень у циліндричних тілах із використанням даних фотопружності та розробки методів їх розв'язування.

Робота виконувалася в рамках наукового проекту НАН України (номер державної реєстрації 0112U007254).

1. *Абен Х. К.* Интегральная фотоупругость. – Таллин: Валгус, 1975. – 218 с.
2. *Чекурин В. Ф.* Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для полубесконечной полосы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 58–70.
Те саме: *Chekurin V. F.* A variational method for solving direct and inverse problems of the theory of elasticity for semi-infinite strip // Mech. Solids. – 1999. – **34**, No. 2. – P. 49–59.
3. *Чекурин В. Ф.* Об одном подходе к решению задач томографии напряженного состояния упругих тел с несовместными деформациями // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 38–48.
Те саме: *Chekurin V. F.* An approach to solving the stress state tomography problems of elastic solids with incompatible strains // Mech. Solids. – 2000. – **35**, No. 6. – P. 29–37.
4. *Чекурин В. Ф.* Обратная задача неразрушающего контроля уровня закалки листового стекла // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 86–97.
Те саме: *Chekurin V. F.* Inverse problem of nondestructive control of the level of hardening of sheet glass // Mech. Solids. – 1998. – **33**, No. 3. – P. 68–77.
5. *Чекурин В. Ф.* Вариационный метод решения задач томографии напряженного stanu твердых тел // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – **35**, № 5. – С. 23–32.
Те саме: *Chekurin V. F.* Variational method for the solution of the problems of tomography of the stressed state of solids // Mater. Sci. – 1999. – **35**, No. 5. – P. 623–633. – <https://doi.org/10.1007/BF02359348>.
6. *Чекурин В. Ф., Постолак Л. І.* Застосування варіаційного методу однорідних розв'язків для оптимального керування осесиметричним термопружним станом циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 2. – С. 105–116.
Те саме: *Chekurin V. F., Postolaki L. I.* Application of the variational method of homogeneous solutions for the optimal control of the axisymmetric thermoelastic state of a cylinder // J. Math. Sci. – 2019. – **243**, No. 1. – P. 128–144. – <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04531-3>.
7. *Achitha M., Nowell D.* Eigenstrain modelling of residual stresses generated by laser shock peening // J. Mater. Process. Technol. – 2011. – **211**, No. 6. – P. 1091–

1101. – <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2011.01.011>.
8. *Azzam R. M. A., Bashara N. M.* Ellipsometry and polarized light. – Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publ., 1977. – 528 p.
 9. *Balan B. A., Achintha M.* Assessment of stresses in float and tempered glass using eigenstrains // *Exp. Mech.* – 2015. – **55**, No. 7. – P. 1301–1315.
– <https://doi.org/10.1007/s11340-015-0036-y>.
 10. *Chekurin V. F.* Integral photoelasticity relations for inhomogeneously strained dielectrics // *Math. Modeling and Computing.* – 2014. – **1**, No. 2. – P. 144–155.
 11. *Chekurin V., Postolaki L.* A variational method of homogeneous solutions for axisymmetric elasticity problems for cylinder // *Math. Modeling and Computing.* – 2015. – **2**, No. 2. – P. 128–132. – <https://doi.org/10.23939/mmc2015.02.128>.
 12. *Chekurin V., Postolaki L.* Application of the least squares method in axisymmetric biharmonic problems // *Math. Probl. Eng.* – 2016. – **2016**. – Article ID 3457649, 9 pages. – <https://doi.org/10.1155/2016/3457649>.
 13. *Chekurin V., Postolaki L.* Residual stresses in a finite cylinder. Direct and inverse problems and their solving using the variational method of homogeneous solutions // *Math. Modeling and Computing.* – 2018. – **5**, No. 2. – P. 119–133.
– <https://doi.org/10.23939/mmc2018.02.119>.
 14. *Glaesemann G. S.* Optical fiber mechanical reliability. Review of research at Corning's optical fiber strength laboratory. – White Paper WP8002. ISO 9001 Registered. ISO: Geneva, 2017. – 62 p.
– https://www.corning.com/media/worldwide/coc/documents/Fiber/RC-%20White%20Papers/WP-General/WP8002_7.17.pdf.
 15. *Handbook of residual stress and deformation of steel* / Ed. by G. Totten, M. Howes, T. Inoue. – Ohio: ASM International, 2002. – 499 p.
 16. *Inoue M., Nakano S., Harada H., Miyamura Y., Gao B., Kangawa Y., Kakimoto K.* Numerical analysis of the dislocation density in multicrystalline silicon for solar cells by the vertical Bridgman process // *Int. J. Photoenergy.* – 2013. – **2013**. Article ID 706923, 8 pages. – <https://doi.org/10.1155/2013/706923>.
 17. *Iwaki T., Kobayashi N.* Thermal and residual stresses of Czochralski-grown semiconducting material // *Int. J. Solids Struct.* – 1986. – **22**, No. 3. – P. 307–314.
– [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(86\)90094-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(86)90094-6).
 18. *Kaminow I. P.* Polarization-maintaining fibers // *Appl. Sci. Res.* – 1984. – **41**. – P. 257–270. – <https://doi.org/10.1007/BF00382456>.
 19. *Kumar A., Prasath R. G. R., Pogue V., Skenes K., Yang C., Melkote S. N., Danyluk S.* Effect of growth rate and wafering on residual stress of diamond wire sawn silicon wafers // *Procedia Manuf.* – 2016. – **5**. – P. 1382–1393.
– <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2016.08.108>.
 20. *Liang X., Cheng L., Chen Q., Yang Q., To A. C.* A modified method for estimating inherent strains from detailed process simulation for fast residual distortion prediction of single-walled structures fabricated by directed energy deposition // *Addit. Manuf.* – 2018. – **23**. – P. 471–486.
– <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.08.029>.
 21. *Luzin V.* Use of the eigenstrain concept for residual stress analysis // *Mater. Sci. Forum.* – 2013. – **768-769**. – P. 193–200.
– <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.768-769.193>.
 22. *Montanari R., Fava A., Barbieri G.* Experimental techniques to investigate residual stress in joints // In: *Residual stress analysis on welded joints by means of numerical simulation and experiments* / P. Ferro, F. Berto (eds). – London: IntechOpen, 2017. – P. 1–28. – <https://doi.org/10.5772/intechopen.71564>.
 23. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids. – Dordrecht etc.: Martinus Nijhoff Publ., 1987. – xii+587 p. – DOI: 10.1007/978-94-009-3489-4.
 24. *Nielsen J. H.* Remaining stress-state and strain-energy in tempered glass fragments // *Glass Struct. Eng.* – 2017. – **2**, No. 1. – P. 45–56.
<https://doi.org/10.1007/s40940-016-0036-z>.
 25. *Pagnotta L., Poggialini A.* Measurement of residual internal stresses in optical fiber preforms // *Exp. Mech.* – 2003. – **43**, No. 1. – P. 69–76.
– <https://doi.org/10.1007/BF02410486>.
 26. *Sadd M. H.* Elasticity: Theory, applications, and numerics. – Amsterdam etc.: Elsevier, 2005. – xii+461 p.
 27. *Salvati E., Sui T., Lunt A. J. G., Korsunsky A. M.* The effect of eigenstrain induced by ion beam damage on the apparent strain relief in FIB-DIC residual stress evaluation // *Mater. Design.* – 2016. – **92**. – P. 649–658.

- <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2015.12.015>,
28. Schajer G. S. (ed.) Practical residual stress measurement methods. – New York: Wiley, 2013. – 328 p.
 29. Sze S. M., Lee M.-K. Semiconductor devices: Physics and technology. – New York: Wiley, 2012. – 590 p.
 30. Withers P. J. Residual stress and its role in failure // Rep. Prog. Phys. – 2007. – **70**, No. 12. – P. 2211–2264. – <https://doi.org/10.1088/0034-4885/70/12/R04>,
 31. Mu-Xin Yang, Run-Guang Li, Ping Jiang, Fu-Ping Yuan, Yan-Dong Wang, Yun-Tian Zhu, Xiao-Lei Wu. Residual stress provides significant strengthening and ductility in gradient structured materials // Mater. Res. Lett. – 2019. – **7**, No. 11. – P. 433–438. – <https://doi.org/10.1080/21663831.2019.1635537>.

ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ИЗОТРОПНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Рассмотрена прямая задача об определении осесимметричных остаточных напряжений в конечном изотропном диэлектрическом цилиндрическом теле, вызванных диагональным тензором несовместимой свободной деформации, компоненты которого зависят только от радиальной координаты. На основании полученного решения задачи исследованы параметры, которые можно определять эмпирически поляризационно-оптическим методом, зондируя тело лучами поляризованного света в разных направлениях, и использовать их в качестве входных данных для обратных задач неразрушающего определения остаточного напряженно-деформированного состояния. Исследованы три множества направлений зондирования, лежащих в плоскостях пространственной симметрии напряженно-деформированного состояния. Для каждого множества установлены интегральные соотношения, связывающие значения соответствующего ему поляризационно-оптического параметра с распределениями компонент напряжений в теле на направлении зондирования. Проведенные количественные исследования зависимости поляризационно-оптических параметров от уровня остаточных напряжений и их градиентности позволяют оценивать информативность эмпирических данных, которые можно получить зондированием цилиндра в этих трех множествах направлений.

Ключевые слова: остаточные напряжения, несовместимая деформация, вариационный метод однородных решений, поляризационно-оптические параметры поля напряжений.

POLARIZATION-OPTICAL PARAMETERS OF AXISYMMETRIC RESIDUAL STRESSES OF AN ISOTROPIC DIELECTRIC CYLINDER

The direct problem for determination of axisymmetric residual stresses in a finite isotropic dielectric cylindrical body caused by diagonal tensor of incompatible eigenstrains, which components depend only on radial coordinate, is considered. Based on the obtained solution of the problem, the parameters of the stress field are investigated. They can be determined empirically by raysounding the body with polarized light in different directions and used as input data for formulation of the inverse problems of nondestructive determination of the residual stress-strain state. Three sets of directions in the planes of spatial symmetry of the stress-strain state are studied. For each set, the integral relations that connect the values of the corresponding polarization-optical parameter with the stress component distributions in the direction of raysounding are established. Quantitative studies of polarization-optical parameters depending on the level of residual stresses and their gradients allow one to evaluate the informativeness of empirical data, which can be obtained by raysounding the cylinder in these three sets of directions.

Key words: residual stresses, incompatible eigenstrain, variational method of homogeneous solutions, polarization-optical parameters of the stress field.