УДК 539.3

В. І. Острик ✉

СИМЕТРІЯ ІНВЕРСІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КОНУСА

Із застосуванням інтегрального перетворення Мелліна отримано розв'язки осесиметричних задач теорії пружності для конуса: першої крайової задачі, змішаної задачі та задачі кручення. Показано, що у випадках, коли одна із крайових умов на всій або на частині поверхні конуса є неоднорідною і має симетрію інверсії, а інша – однорідна, окремі компоненти розв'язку також мають симетрію інверсії.

Ключові слова: *симетрія інверсії, пружний конус, сферичні координати, функції Лежандра, інтеграл Мелліна.*

Симетрію інверсії розв'язків задач теорії пружності для клина розглянуто у роботах [2, 3, 5], для півпростору – у [4]. Показано, що у випадку, коли одна або дві крайові умови є незмінними при перетворенні інверсії, а інші умови – однорідні, окремі компоненти розв'язків також залишаються незмінними. Нижче вивчається симетрія інверсії розв'язків першої і змішаної осесиметричних задач, а також задачі кручення для пружного конуса.

1. Перша крайова задача. Нехай пружний конус з кутом α між віссю і твірною, модуль зсуву якого дорівнює G, коефіцієнт Пуассона ν, у сферичній системі координат займає область $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \vartheta \le \alpha$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

В осесиметричному випадку ($u_\varphi \equiv 0$, $\tau_{\rho\varphi} \equiv 0$, $\tau_{\vartheta\varphi} \equiv 0$) розглянемо першу задачу теорії пружності для конуса. Крайові умови цієї задачі мають вигляд

$$\frac{1}{2G}\sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\alpha} = g_1(\rho), \qquad \frac{1}{2G}\tau_{\rho\vartheta}\Big|_{\vartheta=\alpha} = g_2(\rho). \tag{1}$$

До рівнянь рівноваги Ляме [6] застосуємо інтегральне перетворення Мелліна [8] за координатою ρ. Для трансформант переміщень

$$(\tilde{u}_\rho, \tilde{u}_\vartheta) = \int_0^\infty (u_\rho, u_\vartheta)\rho^{s-1}\, d\rho \tag{2}$$

отримаємо [7]

$$\tilde{u}_\rho = (s+3-4\nu)sP_s(\cos\vartheta)A(s) + (s-1)P_{s-2}(\cos\vartheta)B(s),$$

$$\tilde{u}_\vartheta = -(s-4+4\nu)P_s^1(\cos\vartheta)A(s) - P_{s-2}^1(\cos\vartheta)B(s),$$

$$P_s^1(\cos\vartheta) = \frac{d}{d\vartheta}P_s(\cos\vartheta), \tag{3}$$

де $P_s(\cos\vartheta)$ – функція Лежандра, $P_s^1(\cos\vartheta)$ – приєднана функція Лежандра [1], $A(s)$, $B(s)$ – довільні функції параметра s. Оберненням перетворення Мелліна [8] дістаємо переміщення

$$(u_\rho, u_\vartheta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\tilde{u}_\rho, \tilde{u}_\vartheta)\rho^{-s}\, ds, \qquad 0 < c < 1. \tag{4}$$

Напруження виражаються через переміщення так [6]:

$$\frac{1}{2G}\sigma_\rho = \frac{\nu}{1-2\nu}\theta + \frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}, \qquad \frac{1}{2G}\sigma_\vartheta = \frac{\nu}{1-2\nu}\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta} + u_\rho\right),$$

✉ v.i.ostryk@gmail.com

$$\frac{1}{2G}\sigma_\varphi = \frac{\nu}{1-2\nu}\theta + \frac{1}{\rho}(u_\rho + u_\vartheta \operatorname{ctg}\vartheta), \qquad \frac{1}{G}\tau_{\rho\vartheta} = \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u_\vartheta}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\vartheta},$$

$$\theta = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 u_\rho) + \frac{1}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(u_\vartheta\sin\vartheta). \tag{5}$$

На підставі рівностей (5) для трансформант напружень

$$(\tilde\sigma_\rho, \tilde\sigma_\vartheta, \tilde\sigma_\varphi, \tilde\tau_{\rho\vartheta}) = \int_0^\infty (\sigma_\rho, \sigma_\vartheta, \sigma_\varphi, \tau_{\rho\vartheta})\rho^s\, d\rho \tag{6}$$

знаходимо

$$\frac{1}{2G}\tilde\sigma_\rho = -(s^2+3s-2\nu)sP_s(\cos\vartheta)A(s) - (s-1)sP_{s-2}(\cos\vartheta)B(s),$$

$$\frac{1}{2G}\tilde\sigma_\vartheta = \left[(s^2-2s-1+2\nu)sP_s(\cos\vartheta) + (s-4+4\nu)P_s^1(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta\right]A(s) +$$

$$+\left[(s-1)^2P_{s-2}(\cos\vartheta) + P_{s-2}^1(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta\right]B(s),$$

$$\frac{1}{2G}\tilde\sigma_\varphi = \left\{[(1-4\nu)s+3-2\nu]sP_s(\cos\vartheta) - (s-4+4\nu)P_s^1(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta\right\}A(s) +$$

$$+\left[(s-1)P_{s-2}(\cos\vartheta) - P_{s-2}^1(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta\right]B(s),$$

$$\frac{1}{2G}\tilde\tau_{\rho\vartheta} = (s^2-2+2\nu)P_s^1(\cos\vartheta)A(s) + sP_{s-2}^1(\cos\vartheta)B(s). \tag{7}$$

Функції Лежандра, які входять до формул (3) і (7) трансформант переміщень і напружень, використовуючи співвідношення [1]

$$(s-m)P_s^m(\cos\vartheta) = (s+m)P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\cos\vartheta + P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$(s+m-1)P_{s-2}^m(\cos\vartheta) = (s-m-1)P_{s-1}^m(\cos\vartheta)\cos\vartheta - P_{s-1}^{m+1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$P_{s-1}^2(\cos\vartheta) = -(s-1)sP_{s-1}(\cos\vartheta) - 2P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta, \quad m = 0,1, \tag{8}$$

виразимо через функції Лежандра з нижнім індексом $s-1$:

$$P_s(\cos\vartheta) = P_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta + \frac{1}{s}P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$P_s^1(\cos\vartheta) = P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\cos\vartheta - sP_{s-1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$P_{s-2}(\cos\vartheta) = P_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta - \frac{1}{s-1}P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\vartheta,$$

$$P_{s-2}^1(\cos\vartheta) = P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\cos\vartheta + (s-1)P_{s-1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta. \tag{9}$$

Тоді із (3), (7) матимемо

$$\tilde u_\rho = (s+3-4\nu)\left[sP_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta + P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\vartheta\right]A(s) +$$

$$+\left[(s-1)P_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta - P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\vartheta\right]B(s),$$

$$\tilde u_\vartheta = (s-4+4\nu)\left[sP_{s-1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta - P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\cos\vartheta\right]A(s) -$$

$$-\left[(s-1)P_{s-1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta + P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\cos\vartheta\right]B(s),$$

$$\frac{1}{2G}\tilde\sigma_\rho = -(s^2+3s-2\nu)\left[sP_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta + P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\vartheta\right]A(s) -$$

$$-s\left[(s-1)P_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta - P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\vartheta\right]B(s),$$

$$\frac{1}{2G}\tilde{\sigma}_\vartheta = \Big[(s^2-3s+3-2\nu)sP_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta +$$

$$+\left(s^2-3s+3-2\nu+\frac{s-4+4\nu}{\sin^2\vartheta}\right)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\vartheta\Big]A(s)+$$

$$+\big[(s-1)sP_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta -$$

$$-(s-1-\mathrm{ctg}^2\,\vartheta)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\vartheta\big]B(s)\,,$$

$$\frac{1}{2G}\tilde{\sigma}_\varphi = \Big[(1-2\nu)(2s-1)sP_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta+\left((1-2\nu)(2s-1)-\frac{s-4+4\nu}{\sin^2\vartheta}\right)\times$$

$$\times P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\vartheta\Big]A(s)-P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\frac{B(s)}{\sin^2\vartheta}\,,$$

$$\frac{1}{2G}\tilde{\tau}_{\rho\vartheta} = -(s^2-2+2\nu)\big[sP_{s-1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta-P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\cos\vartheta\big]A(s)+$$

$$+s\big[(s-1)P_{s-1}(\cos\vartheta)\sin\vartheta+P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\cos\vartheta\big]B(s)\,. \qquad (10)$$

Здійснивши інтегральне перетворення Мелліна крайових умов (1), маємо

$$\frac{1}{2G}\tilde{\sigma}_\vartheta\Big|_{\vartheta=\alpha}=\tilde{g}_1(s), \qquad \frac{1}{2G}\tilde{\tau}_{\rho\vartheta}\Big|_{\vartheta=\alpha}=\tilde{g}_2(s)\,, \qquad (11)$$

де

$$\tilde{g}_j(s)=\int_0^\infty g_j(\rho)\rho^s\,d\rho, \qquad j=1,2\,.$$

Підставивши із (10) вирази для $\tilde{\sigma}_\vartheta$, $\tilde{\tau}_{\rho\vartheta}$ в умови (11), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно $A(s)$, $B(s)$, розв'язавши яку, знаходимо

$$(2s-1)A(s)\Delta(s)=s\big[(s-1)P_{s-1}(\cos\alpha)\sin\alpha+P_{s-1}^1(\cos\alpha)\cos\alpha\big]\tilde{g}_1(s)-$$

$$-\big[(s-1)sP_{s-1}(\cos\alpha)\cos\alpha-$$

$$-(s-1-\mathrm{ctg}^2\,\alpha)P_{s-1}^1(\cos\alpha)\sin\alpha\big]\tilde{g}_2(s)\,,$$

$$(2s-1)B(s)\Delta(s)=(s^2-2+2\nu)\big[sP_{s-1}(\cos\alpha)\sin\alpha-P_{s-1}^1(\cos\alpha)\cos\alpha\big]\tilde{g}_1(s)+$$

$$+\Big[(s^2-3s+3-2\nu)sP_{s-1}(\cos\alpha)\cos\alpha+$$

$$+\left(s^2-3s+3-2\nu+\frac{s-4+4\nu}{\sin^2\alpha}\right)P_{s-1}^1(\cos\alpha)\sin\alpha\Big]\tilde{g}_2(s)\,,$$

$$\Delta(s)=\Big\{s^2(s-1)^2[P_{s-1}(\cos\alpha)]^2-s(s-1)P_{s-1}(\cos\alpha)P_{s-1}^1(\cos\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha+$$

$$+\left(s(s-1)-\frac{2(1-\nu)}{\sin^2\alpha}\right)\big[P_{s-1}^1(\cos\alpha)\big]^2\Big\}\sin\alpha\cos\alpha\,. \qquad (12)$$

Вирази для трансформант переміщень і напружень із (10) з урахуванням (12) перетворимо до вигляду

$$(\tilde{u}_\rho, \tilde{u}_\vartheta, \tilde{\sigma}_\rho, \tilde{\sigma}_\vartheta, \tilde{\sigma}_\varphi, \tilde{\tau}_{\rho\vartheta}) = \frac{1}{\Delta(s)} \sum_{j=1}^{2} \left(\tilde{u}_\rho^{(j)}, \tilde{u}_\vartheta^{(j)}, \tilde{\sigma}_\rho^{(j)}, \tilde{\sigma}_\vartheta^{(j)}, \tilde{\sigma}_\varphi^{(j)}, \tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(j)}\right) \tilde{g}_j(s)\,,$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_\rho^{(1)} = {} & s(s-1)(s+2-2\nu) P_{s-1}(\cos\alpha) P_{s-1}(\cos\vartheta) \sin\alpha \cos\vartheta + \\
& + (1-2\nu) s P_{s-1}(\cos\alpha) P_{s-1}^1(\cos\vartheta) \sin\alpha \sin\vartheta + \\
& + 2(1-\nu)(s+1) P_{s-1}^1(\cos\alpha) P_{s-1}(\cos\vartheta) \cos\alpha \cos\vartheta + \\
& + (s+2-2\nu) P_{s-1}^1(\cos\alpha) P_{s-1}^1(\cos\vartheta) \cos\alpha \sin\vartheta\,, \\
\tilde{u}_\rho^{(2)} = {} & -(3-2\nu) s(s-1) P_{s-1}(\cos\alpha) P_{s-1}(\cos\vartheta) \cos\alpha \cos\vartheta - \\
& - (s-2\nu) s P_{s-1}(\cos\alpha) P_{s-1}^1(\cos\vartheta) \cos\alpha \sin\vartheta + \\
& + \left[(s-1)(s+1-2\nu) - 4(1-\nu)\operatorname{ctg}^2\alpha\right] \times \\
& \times P_{s-1}^1(\cos\alpha) P_{s-1}(\cos\vartheta) \sin\alpha \cos\vartheta + \\
& + \left[2(1-\nu) - \operatorname{ctg}^2\alpha\right] P_{s-1}^1(\cos\alpha) P_{s-1}^1(\cos\vartheta) \sin\alpha \sin\vartheta\,, \\
\tilde{u}_\vartheta^{(1)} = {} & -2(1-\nu) s(s-1) P_{s-1}(\cos\alpha) P_{s-1}(\cos\vartheta) \sin\alpha \sin\vartheta - \\
& - s\left[s - 2(1-\nu)\right] P_{s-1}(\cos\alpha) P_{s-1}^1(\cos\vartheta) \sin\alpha \cos\vartheta + \\
& + \left[s^2 - 2(1-\nu)(s+1)\right] P_{s-1}^1(\cos\alpha) P_{s-1}(\cos\vartheta) \cos\alpha \sin\vartheta + \\
& + 2(1-\nu) P_{s-1}^1(\cos\alpha) P_{s-1}^1(\cos\vartheta) \cos\alpha \cos\vartheta\,, \\
\tilde{u}_\vartheta^{(2)} = {} & -s(s-1)(s-3+2\nu) P_{s-1}(\cos\alpha) P_{s-1}(\cos\vartheta) \cos\alpha \sin\vartheta - \\
& - (1-2\nu) s P_{s-1}(\cos\alpha) P_{s-1}^1(\cos\vartheta) \cos\alpha \cos\vartheta - \\
& - \left[(1-2\nu)(s-1) + (s-4+4\nu)\operatorname{ctg}^2\alpha\right] \times \\
& \times P_{s-1}^1(\cos\alpha) P_{s-1}(\cos\vartheta) \sin\alpha \sin\vartheta - \\
& - (s-3+2\nu) P_{s-1}^1(\cos\alpha) P_{s-1}^1(\cos\vartheta) \sin\alpha \cos\vartheta\,, \\
\frac{1}{2G}\tilde{\sigma}_\rho^{(1)} = {} & -s^2(s-1)(s+2) P_{s-1}(\cos\alpha) P_{s-1}(\cos\vartheta) \sin\alpha \cos\vartheta - \\
& - s(s-2\nu) P_{s-1}(\cos\alpha) P_{s-1}^1(\cos\vartheta) \sin\alpha \sin\vartheta - \\
& - 2s(s+1-\nu) P_{s-1}^1(\cos\alpha) P_{s-1}(\cos\vartheta) \cos\alpha \cos\vartheta - \\
& - s(s+2) P_{s-1}^1(\cos\alpha) P_{s-1}^1(\cos\vartheta) \cos\alpha \sin\vartheta\,, \\
\frac{1}{2G}\tilde{\sigma}_\rho^{(2)} = {} & 3s^2(s-1) P_{s-1}(\cos\alpha) P_{s-1}(\cos\vartheta) \cos\alpha \cos\vartheta + \\
& + s(s^2-2\nu) P_{s-1}(\cos\alpha) P_{s-1}^1(\cos\vartheta) \cos\alpha \sin\vartheta - \\
& - s\left[s^2 - 1 - 2(2-\nu)\operatorname{ctg}^2\alpha\right] \times \\
& \times P_{s-1}^1(\cos\alpha) P_{s-1}(\cos\vartheta) \sin\alpha \cos\vartheta -
\end{aligned}$$

$$-\left[2(s-\nu)-(s+2\nu)\operatorname{ctg}^2\alpha\right]\times$$

$$\times P_{s-1}^1(\cos\alpha)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\alpha\sin\vartheta\,,$$

$$\frac{1}{2G}\tilde{\sigma}_\vartheta^{(1)}=s^2(s-1)^2P_{s-1}(\cos\alpha)P_{s-1}(\cos\vartheta)\sin\alpha\cos\vartheta-$$

$$-s\left[s-1-(s-2+2\nu)\operatorname{ctg}^2\vartheta\right]\times$$

$$\times P_{s-1}(\cos\alpha)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\alpha\sin\vartheta-$$

$$-s(s-2+2\nu)P_{s-1}^1(\cos\alpha)P_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\alpha\cos\vartheta+$$

$$+\left[s(s-1)-2(1-\nu)\operatorname{cosec}^2\vartheta\right]\times$$

$$\times P_{s-1}^1(\cos\alpha)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\cos\alpha\sin\vartheta\,,$$

$$\frac{1}{2G}\tilde{\sigma}_\vartheta^{(2)}=-s\left[(s-1)(s-2)-(1-2\nu)\operatorname{ctg}^2\vartheta\right]\times$$

$$\times P_{s-1}(\cos\alpha)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\cos\alpha\sin\vartheta+$$

$$+s\left[(s-1)(s-2)-(1-2\nu)\operatorname{ctg}^2\alpha\right]\times$$

$$\times P_{s-1}^1(\cos\alpha)P_{s-1}(\cos\vartheta)\sin\alpha\cos\vartheta+(s-3+2\nu)\times$$

$$\times\left(\operatorname{ctg}^2\vartheta-\operatorname{ctg}^2\alpha\right)P_{s-1}^1(\cos\alpha)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\alpha\sin\vartheta\,,$$

$$\frac{1}{2G}\tilde{\sigma}_\varphi^{(1)}=(1-2\nu)s^2(s-1)P_{s-1}(\cos\alpha)P_{s-1}(\cos\vartheta)\sin\alpha\cos\vartheta-$$

$$-s\left[2\nu s-1+(s-2+2\nu)\operatorname{ctg}^2\vartheta\right]\times$$

$$\times P_{s-1}(\cos\alpha)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\alpha\sin\vartheta+$$

$$+(1-2\nu)s^2P_{s-1}^1(\cos\alpha)P_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\alpha\cos\vartheta+$$

$$+\left[(1-2\nu)s+2(1-\nu)\operatorname{cosec}^2\vartheta\right]\times$$

$$\times P_{s-1}^1(\cos\alpha)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\cos\alpha\sin\vartheta\,,$$

$$\frac{1}{2G}\tilde{\sigma}_\varphi^{(2)}=-(1-2\nu)s^2(s-1)P_{s-1}(\cos\alpha)P_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\alpha\cos\vartheta-$$

$$-(1-2\nu)s(s+\operatorname{ctg}^2\vartheta)P_{s-1}(\cos\alpha)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\cos\alpha\sin\vartheta+$$

$$+(1-2\nu)s(s-\operatorname{cosec}^2\vartheta)P_{s-1}^1(\cos\alpha)P_{s-1}(\cos\vartheta)\sin\alpha\cos\vartheta-$$

$$-\left[2\nu s-2+(1-2\nu)\operatorname{ctg}^2\alpha+(s-3+2\nu)\operatorname{ctg}^2\vartheta\right]\times$$

$$\times P_{s-1}^1(\cos\alpha)P_{s-1}^1(\cos\alpha\vartheta)\sin\alpha\sin\vartheta\,,$$

$$\frac{1}{2G}\tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(1)}=s(s^2-2+2\nu)\left[P_{s-1}(\cos\alpha)P_{s-1}^1(\cos\vartheta)\sin\alpha\cos\vartheta-\right.$$

$$\left.-P_{s-1}^1(\cos\alpha)P_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\alpha\sin\vartheta\right],$$

$$\frac{1}{2G}\tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(2)}=s^2(s-1)^2P_{s-1}(\cos\alpha)P_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\alpha\sin\vartheta-$$

$$- s(s-2+2\nu)P_{s-1}(\cos\alpha)P^1_{s-1}(\cos\vartheta)\cos\alpha\cos\vartheta -$$

$$- s\left[s-1-(s-2+2\nu)\operatorname{ctg}^2\alpha\right]\times$$

$$\times P^1_{s-1}(\cos\alpha)P_{s-1}(\cos\vartheta)\sin\alpha\sin\vartheta +$$

$$-\left[s(s-1)-2(1-\nu)\operatorname{cosec}^2\alpha\right]\times$$

$$\times P^1_{s-1}(\cos\alpha)P^1_{s-1}(\cos\vartheta)\sin\alpha\cos\vartheta\,. \tag{13}$$

Напруження знаходимо оберненням перетворення Мелліна:

$$(\sigma_\rho,\sigma_\vartheta,\sigma_\varphi,\tau_{\rho\vartheta}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}(\tilde\sigma_\rho,\tilde\sigma_\vartheta,\tilde\sigma_\varphi,\tilde\tau_{\rho\vartheta})\rho^{-s-1}\,ds\,. \tag{14}$$

Із тотожностей для функцій Лежандра [1]:

$$P_{s-1}(\cos\vartheta)\equiv P_{-s}(\cos\vartheta),\qquad P^1_{s-1}(\cos\vartheta)\equiv P^1_{-s}(\cos\vartheta) \tag{15}$$

випливає тотожність для характеристичного визначника $\Delta(s)$ із (12):

$$\Delta(1-s)\equiv\Delta(s)\,, \tag{16}$$

а також подібні тотожності для деяких складових трансформант переміщень і напружень із (13):

$$\tilde u^{(2)}_\rho(1-s,\vartheta)\equiv\tilde u^{(2)}_\rho(s,\vartheta),\qquad \tilde u^{(1)}_\vartheta(1-s,\vartheta)\equiv\tilde u^{(1)}_\vartheta(s,\vartheta)\,,$$

$$\tilde\sigma^{(1)}_\vartheta(1-s,\vartheta)\equiv\tilde\sigma^{(1)}_\vartheta(s,\vartheta),\qquad \tilde\tau^{(2)}_{\rho\vartheta}(1-s,\vartheta)\equiv\tilde\tau^{(2)}_{\rho\vartheta}(s,\vartheta),\qquad \nu=0.5\,,$$

$$\tilde u^{(2)}_\rho(1-s,\alpha)\equiv\tilde u^{(2)}_\rho(s,\alpha),\qquad \tilde u^{(1)}_\vartheta(1-s,\alpha)\equiv\tilde u^{(1)}_\vartheta(s,\alpha)\,,$$

$$\tilde\sigma^{(1)}_\vartheta(1-s,\alpha)\equiv\tilde\sigma^{(1)}_\vartheta(s,\alpha),\qquad \tilde\tau^{(2)}_{\rho\vartheta}(1-s,\alpha)\equiv\tilde\tau^{(2)}_{\rho\vartheta}(s,\alpha)\,. \tag{17}$$

Далі розглянемо окремо два випадки, коли одна із крайових умов (1) має симетрію при перетворенні інверсії відносно точки $\rho=\ell$, тобто при заміні ρ на ℓ^2/ρ, а інша умова є однорідною.

1°. Нехай у крайових умовах (1) функція $\sqrt{\rho^3}\,g_1(\rho)$ є симетричною при перетворенні інверсії, а функція $g_2(\rho)$ тотожно дорівнює нулеві:

$$\sqrt{\rho^3}\,g_1(\rho)\equiv\frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\,g_1\left(\frac{\ell^2}{\rho}\right),\qquad g_2(\rho)\equiv 0\,. \tag{18}$$

Тоді функція $\tilde g_1(s)$ із (11) набуває вигляду

$$\tilde g_1(s)=\ell^s\int\limits_0^\ell g_1(\rho)\left[\left(\frac{\rho}{\ell}\right)^s+\left(\frac{\rho}{\ell}\right)^{1-s}\right]ds \tag{19}$$

і задовольняє тотожності

$$\tilde g_1(1-s)\equiv\ell^{1-2s}\tilde g_1(s)\,, \tag{20}$$

а функція $\tilde g_2(s)\equiv 0$.

На підставі (20) із (16), (17) маємо

$$\tilde u_\vartheta(1-s,\vartheta)\equiv\ell^{1-2s}\tilde u_\vartheta(s,\vartheta),\qquad \tilde\sigma_\vartheta(1-s,\vartheta)\equiv\ell^{1-2s}\tilde\sigma_\vartheta(s,\vartheta),\qquad \nu=0.5\,,$$

$$\tilde u_\vartheta(1-s,\alpha)\equiv\ell^{1-2s}\tilde u_\vartheta(s,\alpha),\qquad \tilde\sigma_\vartheta(1-s,\alpha)\equiv\ell^{1-2s}\tilde\sigma_\vartheta(s,\alpha)\,. \tag{21}$$

Меридіональні переміщення u_ϑ і нормальні меридіональні напруження

σ_ϑ, перетворені за інверсією, згідно з (4), (14) мають вигляд

$$u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\tilde u_\vartheta(s,\vartheta)\left(\frac{\ell^2}{\rho}\right)^{-s}ds,$$

$$\sigma_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\tilde\sigma_\vartheta(s,\vartheta)\left(\frac{\ell^2}{\rho}\right)^{-s-1}ds.$$

Замінивши змінну інтегрування s на $1-s$, з урахуванням перших двох тотожностей із (21) знайдемо

$$u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right)=\frac{\rho}{\ell}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-c-i\infty}^{1-c+i\infty}\tilde u_\vartheta(s,\vartheta)\rho^{-s}ds,$$

$$\sigma_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right)=\frac{\rho^3}{\ell^3}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-c-i\infty}^{1-c+i\infty}\tilde\sigma_\vartheta(s,\vartheta)\rho^{-s}\,ds,\qquad \nu=0.5\,.$$

В останніх інтегралах перемістимо контур інтегрування паралельно самому собі у положення $\mathrm{Re}\,s=c$, $0<c<1$. З огляду на відсутність полюсів підінтегральної функції у смузі $0<\mathrm{Re}\,s<1$ значення інтегралів при цьому не зміняться. У результаті отримаємо тотожності

$$\sqrt{\rho}\,u_\vartheta(\rho,\vartheta)\equiv\frac{\ell}{\sqrt{\rho}}\,u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right),$$

$$\sqrt{\rho^3}\,\sigma_\vartheta(\rho,\vartheta)\equiv\frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\,\sigma_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right),\qquad \nu=0.5\,. \tag{22}$$

Аналогічним чином встановлюємо тотожність

$$\sqrt{\rho}u_\vartheta\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right)\equiv\frac{\ell}{\sqrt{\rho}}\,u_\vartheta\left(\frac{\ell^2}{\rho},\frac{\pi}{2}\right). \tag{23}$$

Отже, при перетворенні інверсії у випадку нестисливого матеріалу ($\nu=0.5$) помножені на $\sqrt{\rho}$ переміщення u_ϑ і помножені на $\sqrt{\rho^3}$ напруження σ_ϑ симетричні у будь-якому напрямку $\vartheta=\mathrm{const}$ як всередині конуса ($0\le\vartheta<\alpha$), так і на його поверхні $\vartheta=\alpha$. Для стисливого матеріалу ($\nu\ne0.5$) симетричними є помножені на $\sqrt{\rho}$ переміщення u_ϑ лише на межі конуса.

Приклад 1. Уздовж кола $\rho=\ell$ на поверхні конуса прикладено розподілені нормальні сили інтенсивності P. Маємо задачу про оперезаний конус [8] з крайовими умовами (1), у яких $g_1(\rho)=-\dfrac{P}{2G}\delta(\rho-\ell)$, $\delta(\rho-\ell)$ – дельта-функція Дірака, а $g_2(\rho)\equiv0$. Для цієї задачі умови (18) виконані, і тому її розв'язку властива часткова симетрія інверсії у вигляді тотожностей (22), (23). У [8] наведено, зокрема, результати обчислень напружень σ_ϑ уздовж осі конуса для коефіцієнта Пуассона $\nu=0.25$, згідно з якими ці напруження спадають до нуля при $\rho\to0$ і $\rho\to\infty$, а у точці $\rho\approx1.1\,\ell$ їх розподіл має мінімум. Відмітимо, що згідно з другою із тотожностей (22) згаданий мінімум для $\nu=0.5$ досягається при $\rho<\ell$, але поблизу точки $\rho=\ell$, оскільки з огляду на симетричність функції $\sqrt{\rho^3}\,\sigma_\vartheta$ остання має мінімум у точці $\rho=\ell$.

2°. Розглянемо тепер протилежний до ***1°*** випадок, коли у крайових умовах (1) функція $\sqrt{\rho^3}\,g_2(\rho)$ є симетричною, а функція $g_1(\rho)$ тотожно дорівнює нулеві:

$$\sqrt{\rho^3}\, g_2(\rho) \equiv \frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\, g_2\left(\frac{\ell^2}{\rho}\right), \qquad g_1(\rho) \equiv 0\,. \tag{24}$$

Аналогічно до випадку ***1°*** встановлюємо тотожності

$$\sqrt{\rho}\, u_\rho(\rho,\vartheta) \equiv \frac{\ell}{\sqrt{\rho}}\, u_\rho\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right),$$

$$\sqrt{\rho^3}\, \tau_{\rho\vartheta}(\rho,\vartheta) \equiv \frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\, \tau_{\rho\vartheta}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right), \qquad \nu = 0.5\,,$$

$$\sqrt{\rho} u_\rho\left(\rho,\frac{\pi}{2}\right) \equiv \frac{\ell}{\sqrt{\rho}}\, u_\rho\left(\frac{\ell^2}{\rho},\frac{\pi}{2}\right). \tag{25}$$

Отже, для нестисливого матеріалу симетричними є функції $\sqrt{\rho} u_\rho$, $\sqrt{\rho^3}\,\tau_{\rho\vartheta}$ у всьому конусі, а для стисливого матеріалу функція $\sqrt{\rho} u_\rho$ має симетрію інверсії лише на поверхні конуса.

2. Змішана задача. Розіб'ємо поверхню конуса $S = \{\rho \in L,\ \vartheta = \alpha,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$, де $L = \{0 \le \rho < \infty\}$, на дві області $S' = \{\rho \in L',\ \vartheta = \alpha,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$ і $S'' = \{\rho \in L'',\ \vartheta = \alpha,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$, де $L' \subset L$, $L'' = L \setminus L'$ такі, що кожна з областей S', S'' при перетворенні інверсії відносно кола $\rho = \ell$, $\vartheta = \alpha$, $0 \le \varphi < 2\pi$ переходить сама в себе.

Нехай в області S' задано умови гладкого контакту, а в області S'' – умови першої крайової задачі за відсутності дотичних напружень:

$$u_\vartheta\Big|_{\vartheta=\alpha,\rho\in L'} = g_0(\rho), \qquad \frac{1}{2G}\,\sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\alpha,\rho\in L''} = g_1(\rho), \qquad \tau_{\rho\vartheta}\Big|_{\vartheta=\alpha} = 0\,. \tag{26}$$

При цьому вважаємо, що функції $\sqrt{\rho}\, g_0(\rho)$, $\sqrt{\rho^3}\, g_1(\rho)$ є симетричними:

$$\sqrt{\rho}\, g_0(\rho) \equiv \frac{\ell}{\sqrt{\rho}}\, g_0\left(\frac{\ell^2}{\rho}\right), \qquad \sqrt{\rho^3}\, g_1(\rho) \equiv \frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\, g_1\left(\frac{\ell^2}{\rho}\right). \tag{27}$$

Зауважимо, що змішана задача з крайовими умовами (26) відповідає осесиметричній контактній задачі для конуса з областю контакту S' і довантаженням нормальними зусиллями поза областю контакту.

Уведемо невідому функцію

$$g(\rho) = \frac{1}{2G}\,\sigma_\vartheta\Big|_{\vartheta=\alpha,\rho\in L'}\,. \tag{28}$$

Тоді нормальні переміщення на поверхні конуса на підставі рівностей (4), (11), (13) набувають вигляду

$$u_\vartheta\Big|_{\vartheta=\alpha} = \int\limits_{L'} k\left(\frac{\rho}{r}\right) g(r)\,dr + \int\limits_{L''} k\left(\frac{\rho}{r}\right) g_1(r)\,dr\,, \tag{29}$$

$$k\left(\frac{\rho}{r}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{u}_\vartheta^{(1)}(s,\alpha)}{\Delta(s)}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{-s} ds\,. \tag{29}$$

Підставивши (29) у першу з крайових умов (26), отримаємо інтегральне рівняння відносно функції $g(r)$:

$$\int\limits_{L'} k\left(\frac{\rho}{r}\right) g(r)\,dr = f(\rho), \quad \rho \in L', \quad f(\rho) = g_0(\rho) - \int\limits_{L''} k\left(\frac{\rho}{r}\right) g_1(r)\,dr\,. \tag{30}$$

Дослідимо симетрію розв'язку $g(r)$ інтегрального рівняння (30). В інтегралі із другої рівності (29), який задає ядро цього рівняння, замінимо змінну інтегрування s на $1-s$ і використаємо тотожність (16) і шосту із тотожностей (17):

$$k\left(\frac{\rho}{r}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-c-i\infty}^{1-c+i\infty}\frac{\tilde{u}_{\vartheta}^{(1)}(s,\alpha)}{\Delta(s)}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{1-s}ds\,.$$

Перемістивши контур інтегрування у положення $\operatorname{Re}s=c$, $0<c<1$, з огляду на відсутність полюсів підінтегральної функції у смузі $0<\operatorname{Re}s<1$ отримуємо тотожність

$$k\left(\frac{\rho}{r}\right)\equiv\frac{r}{\rho}k\left(\frac{r}{\rho}\right). \tag{31}$$

Замінивши після цього у другій із рівностей (30) ρ на ℓ^2/ρ, а r – на ℓ^2/r, з урахуванням першої із тотожностей (27) і тотожності (31) маємо

$$\sqrt{\rho}\,f(\rho)\equiv\frac{\ell}{\sqrt{\rho}}f\left(\frac{\ell^2}{\rho}\right). \tag{32}$$

Виконавши у рівнянні (30) заміну змінних r, ρ відповідно на ℓ^2/r, ℓ^2/ρ, перетворимо це рівняння, враховуючи (31), (32), до вигляду

$$\int\limits_{L'}\frac{\ell^3}{r^3}k\left(\frac{\rho}{r}\right)g\left(\frac{\ell^2}{r}\right)dr=f(\rho),\qquad \rho\in L'. \tag{33}$$

На підставі еквівалентності інтегральних рівнянь (30) і (33) та однозначності їх розв'язку, доходимо до висновку, що помножений на $\sqrt{r^3}$ розв'язок $g(r)$ є симетричним, тобто виконується тотожність

$$\sqrt{\rho^3}g(\rho)\equiv\frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}g\left(\frac{\ell^2}{\rho}\right). \tag{34}$$

Замінивши позначення невідомої функції $g(\rho)$, заданої в області L', на $g_1(\rho)$, помічаємо, що друга із тотожностей (27) відносно нормальних напружень σ_ϑ виконується на всій поверхні конуса, як і у випадку ***1°*** першої крайової задачі при умові (18). Отже, розв'язок змішаної задачі при умові (27) має симетрію інверсії для тих самих компонент, що і у випадку ***1°*** першої крайової задачі, розглянутій у **п. 1**, тобто справджуються тотожності (22), (23).

Приклад 2. У поверхню конуса вдавлюється кільцевий штам, основа якого займає область $S'=\{\ell_1\le\rho\le\ell_2,\ \vartheta=\alpha,\ 0\le\varphi<2\pi\}$ ($L'=\{\ell_1\le\rho\le\ell_2\}$). Поверхню основи задано рівнянням $\vartheta=\alpha+g_0(\rho)/\rho$, де $g_0(\rho)=A_0/\sqrt{\rho}$, $A_0=\text{const}$. Поза областю контакту S' – в області S'' – поверхня конуса вільна від напружень ($g_1(\rho)\equiv 0$). При нехтуванні силами тертя в області контакту крайові умови задачі мають вигляд (26), у яких $\ell=\sqrt{\ell_1\ell_2}$. При цьому виконуються тотожності (27). Як показано вище, розв'язок цієї задачі має часткову симетрію інверсії, виражену тотожностями (22), (23).

3. Задача кручення. Деформація кручення пружного середовища відносно осі $\vartheta=0,\pi$ характеризується наявністю тільки однієї компоненти u_φ вектора переміщень ($u_\rho\equiv 0$, $u_\vartheta\equiv 0$), яка не залежить від змінної φ і задовольняє рівняння

$$\nabla^2 u_\varphi - \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \vartheta} u_\varphi = 0 ,$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\right]. \tag{35}$$

Не рівними тотожно нулеві є лише напруження

$$\tau_{\rho\varphi} = G\rho \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u_\varphi}{\rho}\right), \qquad \tau_{\vartheta\varphi} = \frac{G}{\rho\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(u_\varphi \sin\vartheta) . \tag{36}$$

Нехай на поверхні конуса задано напруження

$$\frac{1}{G}\tau_{\vartheta\varphi}\Big|_{\vartheta=\alpha} = t(\rho) , \tag{37}$$

для яких виконується умова симетрії

$$\sqrt{\rho^3}\, t(\rho) \equiv \frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\, t\left(\frac{\ell^2}{\rho}\right). \tag{38}$$

Застосувавши до рівняння (35) інтегральне перетворення Мелліна, для трансформанти переміщень

$$\tilde{u}_\varphi = \int_0^\infty u_\varphi \rho^{s-1}\, d\rho \tag{39}$$

отримаємо

$$\tilde{u}_\varphi = P_{s-1}^1(\cos\vartheta) C(s) , \tag{40}$$

де $C(s)$ – довільна функція параметра s. Оберненням перетворення Мелліна дістаємо переміщення

$$u_\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{u}_\varphi \rho^{-s}\, ds . \tag{41}$$

Із (36) для трансформант напружень

$$(\tilde{\tau}_{\rho\varphi}, \tilde{\tau}_{\vartheta\varphi}) = \int_0^\infty (\tau_{\rho\varphi}, \tau_{\vartheta\varphi})\rho^s\, d\rho \tag{42}$$

маємо

$$\frac{1}{G}\tilde{\tau}_{\rho\varphi} = -(s+1)\tilde{u}_\varphi ,$$

$$\frac{1}{G}\tilde{\tau}_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{dP_{s-1}(\cos\vartheta)}{d\vartheta}\sin\vartheta\right)C(s) = -s(s-1)P_{s-1}(\cos\vartheta)C(s) . \tag{43}$$

Останній вираз у (43) отримано з урахуванням третьої з рівностей (3) і диференціального рівняння для функції Лежандра [1]. Оберненням перетворення Мелліна знаходимо напруження

$$(\tau_{\rho\varphi}, \tau_{\vartheta\varphi}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (\tilde{\tau}_{\rho\varphi}, \tilde{\tau}_{\vartheta\varphi})\rho^{-s-1}\, ds . \tag{44}$$

Перейшовши до трансформант у крайовій умові (37), з урахуванням останньої рівності (43) знаходимо

$$C(s) = -\frac{\tilde{t}(s)}{s(s-1)P_{s-1}(\cos\alpha)} , \qquad \tilde{t}(s) = \int_0^\infty t(\rho)\rho^s\, d\rho . \tag{45}$$

Аналогічно до (20), (21) із рівностей (15), (38), (40), (43), (45) випливають тотожності

$$\tilde{t}(1-s) \equiv \ell^{1-2s}\tilde{t}(s),$$

$$\tilde{u}_\varphi(1-s,\vartheta) \equiv \ell^{1-2s}\tilde{u}_\varphi(s,\vartheta), \qquad \tilde{\tau}_{\vartheta\varphi}(1-s,\vartheta) \equiv \ell^{1-2s}\tilde{\tau}_{\vartheta\varphi}(s,\vartheta). \tag{46}$$

Із (46) аналогічно до (22) встановлюємо тотожності

$$\sqrt{\rho}\, u_\varphi(\rho,\vartheta) \equiv \frac{\ell}{\sqrt{\rho}}\, u_\varphi\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right), \qquad \sqrt{\rho^3}\,\tau_{\vartheta\varphi}(\rho,\vartheta) \equiv \frac{\ell^3}{\sqrt{\rho^3}}\,\tau_{\vartheta\varphi}\left(\frac{\ell^2}{\rho},\vartheta\right), \tag{47}$$

які означають, що функції $\sqrt{\rho}\, u_\varphi$, $\sqrt{\rho^3}\,\tau_{\vartheta\varphi}$ є симетричними в усьому конусі.

Приклад 3. Кільцевий штамп, форма основи якого така, як і в ***прикладі 2***, вдавлюється у поверхню конуса і при цьому рівномірно обертається навколо своєї осі з урахуванням сил тертя в області контакту. В області S' виникають дотичні напруження $\tau_{\vartheta\varphi}\big|_{\vartheta=\alpha} = \mu_0\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha}$, де μ_0 – коефіцієнт тертя. Напруження $\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha}$ визначаються розв'язком задачі із ***прикладу 2***. Розв'язок вихідної задачі є суперпозицією розв'язків задачі із ***прикладу 2*** і задачі кручення, для якої $t(\rho) = \mu_0 G\sigma_\vartheta\big|_{\vartheta=\alpha}$. Оскільки в осесиметричному випадку переміщення і напруження, які виникають у першій крайовій задачі, відсутні у задачі кручення і навпаки, то розв'язок розглядуваної задачі має симетрію інверсії для тих своїх компонент, які є симетричними як у першій крайовій задачі при умові (18), так і в задачі кручення при умові (38). Ця симетрія виражається тотожностями (22), (23), (47).

Висновки. Встановлено часткову симетрію розв'язків осесиметричних задач теорії пружності для конуса. У першій крайовій задачі, якщо при перетворенні інверсії помножені на $\sqrt{\rho^3}$ нормальні напруження, задані на поверхні конуса, є симетричними, а дотичні напруження відсутні, вказана симетрія нормальних меридіональних напружень σ_ϑ зберігається і всередині конуса тільки для випадку нестисливого матеріалу. При цьому помножені на $\sqrt{\rho}$ меридіональні переміщення u_ϑ є також симетричними. Для стисливого матеріалу із усіх компонент розв'язку симетричними виявляються лише помножені на $\sqrt{\rho}$ меридіональні переміщення на поверхні конуса. Вказані властивості розв'язку першої крайової задачі зберігаються і для змішаної задачі, коли на одній частині поверхні конуса задано умови гладкого контакту із симетричними помноженими на $\sqrt{\rho}$ нормальними переміщеннями, а на іншій – симетричні помножені на $\sqrt{\rho^3}$ нормальні напруження і нульові значення дотичних напружень. Якщо задані на поверхні конуса помножені на $\sqrt{\rho^3}$ дотичні напруження є симетричними, а нормальні напруження відсутні, розв'язок першої крайової задачі має аналогічні властивості стосовно дотичних напружень $\tau_{\rho\vartheta}$ і радіальних переміщень u_ρ.

У задачі кручення пружного конуса, якщо задані на поверхні конуса помножені на $\sqrt{\rho^3}$ дотичні напруження є симетричними за інверсією, симетричними у всьому конусі виявляються також помножені на $\sqrt{\rho}$ колові переміщення u_φ і помножені на $\sqrt{\rho^3}$ меридіонально-колові дотичні напруження $\tau_{\vartheta\varphi}$. При цьому помножені на $\sqrt{\rho^3}$ радіально-колові дотичні напруження $\tau_{\rho\varphi}$ не є симетричними.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
2. *Некислих К. М., Острик В. І.* Розклинювання пружного клина // Вісн. Київ. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 3. – С. 91–96.
3. *Острик В. І.* Симетрія інверсії розв'язків основних крайових задач двовимірної теорії пружності для клина // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 4. – С. 90–110.
4. *Острик В. І.* Симетрія інверсії розв'язку першої крайової задачі теорії пружності для півпростору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 1. – С. 112–126.
5. *Острик В. І., Щокотова О. М.* Ковзний контакт штампа з пружним клином // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47,** № 4. – С. 82–91.
   Те саме: *Ostryk V. I., Shchokotova O. M.* Sliding contact of a punch with elastic wedge // Mater. Sci. – 2012. – **47,** No. 4. – P. 514–526.
6. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
7. *Улитко А. Ф.* Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академпериодика, 2002. – 342 с.
8. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.

СИММЕТРИЯ ИНВЕРСИИ РЕШЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КОНУСА

С применением интегрального преобразования Меллина получены решения осесимметричных задач теории упругости для конуса: первой краевой задачи, смешанной задачи и задачи кручения. Показано, что в случаях, когда одно из граничных условий на всей или на части поверхности конуса является неоднородным и имеет симметрию инверсии, а другое – однородно, отдельные компоненты решения также имеют симметрию инверсии.

***Ключевые слова**: симметрия инверсии, упругий конус, сферические координаты, функции Лежандра, интеграл Меллина.*

THE INVERSION SYMMETRY OF SOLUTIONS OF THE AXIALLY SYMMETRIC PROBLEMS OF ELASTIC THEORY FOR A CONE

Using the Mellin integral transformation, solutions of the axially symmetric problems of elastic theory for a cone: of the first boundary value problem, of the mixed problem and of the problem of torsion is obtained. It is shown that separate components of solution also have the inversion symmetry in cases, when one non-homogeneous boundary condition on the all ore the fraction of surface of cone has inversion sunmmetry, while two other conditions is homogeneous.

***Key words**: inversion symmetry, elastic cone, spherical coordinates, Legendre functions, Mellin integral.*

Ін-т прикл. фізики НАН України, Суми

Одержано
28.10.19