УДК 517.524

Х. Й. Кучмінська ✉

ПРО ТЕОРЕМУ СЛЄШИНСЬКОГО – ПРІНҐСГЕЙМА ДЛЯ ТРИВИМІРНОГО УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕПЕРЕРВНОГО ДРОБУ

Запропоновано тривимірне узагальнення неперервного дробу. Встановлено формулу різниці між наближеннями запропонованого дробу та отримано оцінки його залишків. Побудовано мажорантний дріб і досліджено абсолютну збіжність такого узагальненого дробу.

Ключові слова: *тривимірний неперервний дріб, наближення, залишки, формула різниці, абсолютна збіжність.*

Одним із можливих підходів представлення функції комплексної змінної неперервним дробом є побудова відповідного неперервного дробу [2]. Для функції n, $n \ge 2$, комплексних змінних також будуються відповідні багатовимірні неперервні дроби, дослідження яких вимагають знання їх властивостей при $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 1$ [1, 3, 4, 7].

Трикратний степеневий ряд можна розвинути у відповідний тривимірний неперервний дріб [5, 6]:

$$\frac{a_{0,0,0}}{F_0(z_1,z_2,z_3) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{a_{i,i,i} z_1, z_2, z_3}{F_i(z_1,z_2,z_3)}} \qquad \text{або} \qquad F_0(z_1,z_2,z_3) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,i,i} z_1, z_2, z_3}{F_i(z_1,z_2,z_3)},$$

де

$$F_i(z_1,z_2,z_3) = b_{i,i,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i,i} z_1}{b_{i+j,i,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j,i} z_2}{b_{i,i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i,i+j} z_3}{b_{i,i,i+j}} +$$

$$\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i+j,i} z_1 z_2}{\Phi_{i+j,i+j,i}(z_1,z_2)} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i,i+j} z_1 z_3}{\Phi_{i+j,i,i+j}(z_1,z_3)} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j,i+j} z_2 z_3}{\Phi_{i,i+j,i+j}(z_2,z_3)},$$

$$\Phi_{k,k,i}(z_1,z_2) = b_{k,k,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j,k,i} z_1}{b_{k+j,k,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k,k+j,i} z_2}{b_{k,k+j,i}},$$

$$\Phi_{k,i,k}(z_1,z_3) = b_{k,i,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j,i,k} z_1}{b_{k+j,i,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k,i,k+j} z_3}{b_{k,i,k+j}},$$

$$\Phi_{i,k,k}(z_2,z_3) = b_{k,i,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,k+j,k} z_2}{b_{k,k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,k,k+j} z_3}{b_{i,k,k+j}}.$$

У цій роботі розглянемо числовий тривимірний неперервний дріб (ТНД), утворений з відповідного тривимірного неперервного дробу при $z_1 = z_2 = z_3 = 1$ і дослідимо його абсолютну збіжність.

Введемо означення тривимірного неперервного дробу .

Означення 1. Тривимірний неперервний дріб − це вираз вигляду

$$\frac{a_{0,0,0}}{F_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{a_{i,i,i}}{F_i}}, \tag{1}$$

або

✉ khkuchminska@gmail.com

$$F_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,i,i}}{F_i}, \tag{2}$$

де

$$F_i = b_{i,i,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i,i}}{b_{i+j,i,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j,i}}{b_{i,i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i,i+j}}{b_{i,i,i+j}} +$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i+j,i}}{\Phi_{i+j,i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i,i+j}}{\Phi_{i+j,i,i+j}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j,i+j}}{\Phi_{i,i+j,i+j}}, \tag{3}$$

$$\Phi_{k,k,i} = b_{k,k,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j,k,i}}{b_{k+j,k,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k,k+j,i}}{b_{k,k+j,i}},$$

$$\Phi_{k,k,i} = b_{k,k,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j,k,i}}{b_{k+j,k,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k,k+j,i}}{b_{k,k+j,i}},$$

$$\Phi_{i,k,k} = b_{i,k,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,k+j,k}}{b_{i,k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,k,k+j}}{b_{i,k,k+j}}, \tag{4}$$

$a_{i,j,k} \neq 0$, $b_{i,j,k}$ − комплексні числа, $i, j, k = 0, 1, \ldots$.

Вважатимемо, що (1), (2) мають сенс, якщо при згортанні дробу не виникне невизначеність $0/0$. Перші три доданки дробу (1) є неперервними дробами, а наступні три доданки − двовимірними неперервними дробами .

Елементи ТНД (1)/(2)

$$a_{i,i,i}, \quad a_{i-1,i,i}, \quad a_{i,i-1,i}, \quad a_{i,i,i-1}, \quad a_{i-1,i-1,i}, \quad a_{i-1,i,i-1}, \quad a_{i,i-1,i-1}$$

називають i-ми *частинними чисельниками*, елементи

$$b_{i,i,i}, \quad b_{i-1,i,i}, \quad b_{i,i-1,i}, \quad b_{i,i,i-1}, \quad b_{i-1,i-1,i}, \quad b_{i-1,i,i-1}, \quad b_{i,i-1,i-1}$$

називають i-ми *частинними знаменниками*, а відношення

$$\frac{a_{i,i-1,i}}{b_{i,i-1,i}}, \quad \frac{a_{i,i,i-1}}{b_{i,i,i-1}}, \quad \frac{a_{i-1,i-1,i}}{b_{i-1,i-1,i}}, \quad \frac{a_{i-1,i,i-1}}{b_{i-1,i-1,i}}, \quad \frac{a_{i,i-1,i-1}}{b_{i,i-1,i-1}}$$

називають i-ми *частинними ланками* ТНД (1)/(2). Сукупність семи i ланок утворює i-й поверх ТНД (1)/(2). Неперервні дроби, що складають F_i, $\Phi_{k,k,i}$, $\Phi_{k,i,k}$, $\Phi_{i,k,k}$, називають i-ми гілками ТНД (1)/(2).

Означення 2. Скінченний ТНД

$$f_n = \frac{A_n}{B_n} = \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=0}^{n-1} \frac{a_{i,i,i}}{F_i^{(n-1-i)}}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

де

$$F_i^{(m)} = b_{i,i,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m} \frac{a_{i+j,i,i}}{b_{i+j,i,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m} \frac{a_{i,i+j,i}}{b_{i,i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m} \frac{a_{i,i,i+j}}{b_{i,i,i+j}} +$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m} \frac{a_{i+j,i+j,i}}{\Phi_{i+j,i+j,i}^{(m-j)}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m} \frac{a_{i+j,i,i+j}}{\Phi_{i+j,i,i+j}^{(m-j)}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m} \frac{a_{i,i+j,i+j}}{\Phi_{i,i+j,i+j}^{(m-j)}}, \quad F_i^{(0)} = b_{i,i,i}, \tag{6}$$

$$\Phi_{k,k,i}^{(m)} = b_{k,k,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m} \frac{a_{k+j,k,i}}{b_{k+j,k,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m} \frac{a_{k,k+j,i}}{b_{k,k+j,i}}, \qquad \Phi_{k,k,i}^{(0)} = b_{k,k,i},$$

$$\Phi_{k,i,k}^{(m)} = b_{k,i,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m} \frac{a_{k+j,i,k}}{b_{k+j,i,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m} \frac{a_{k,i,k+j}}{b_{k,i,k+j}}, \qquad \Phi_{k,i,k}^{(0)} = b_{k,i,k},$$

$$\Phi_{i,k,k}^{(m)} = b_{i,k,k} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{m} \frac{a_{i,k+j,k}}{b_{i,k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{m} \frac{a_{i,k,k+j}}{b_{i,k,k+j}}, \qquad \Phi_{i,k,k}^{(0)} = b_{i,k,k},$$

$a_{i,i,i}$, $b_{i,i,i}$, $a_{i,j,k}$, $b_{i,j,k} \in \mathbb{C}$, називають n-м наближенням або n-м підхідним дробом ТНД (1), а A_n, B_n − чисельником і знаменником n-го наближення f_n або n-м підхідним чисельником і n-м підхідним знаменником відповідно.

Для ТНД (2) n-м наближенням називаються скінченний ТНД вигляду

$$f_n = \frac{A_n}{B_n} = F_0^{(n)} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{n} \frac{a_{i,i,i}}{F_i^{(n-i)}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

де $F_i^{(m)}$ визначаються формулами (6).

На відміну від неперервних дробів, можна утворювати різні типи наближень для ТНД (1), (2) залежно від кількості поверхів (довжини) його i-х ланок.

Розглянемо ще один спосіб утворення наближень ТНД (1), яке вичерпує почергово всі ланки дробу. Позначимо ці наближення через $\hat{f}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Нехай

$$\hat{f}_1 = \frac{a_{0,0,0}}{b_{0,0,0}}, \qquad \hat{f}_2 = \frac{a_{0,0,0}}{b_{0,0,0} + \frac{a_{1,0,0}}{b_{1,0,0}}}, \qquad \hat{f}_3 = \frac{a_{0,0,0}}{b_{0,0,0} + \frac{a_{1,0,0}}{b_{1,0,0}} + \frac{a_{0,1,0}}{b_{0,1,0}}},$$

$$\hat{f}_4 = \frac{a_{0,0,0}}{b_{0,0,0} + \frac{a_{1,0,0}}{b_{1,0,0}} + \frac{a_{0,1,0}}{b_{0,1,0}} + \frac{a_{0,0,1}}{b_{0,0,1}}},$$

$$\hat{f}_5 = \frac{a_{0,0,0}}{b_{0,0,0} + \frac{a_{1,0,0}}{b_{1,0,0}} + \frac{a_{0,1,0}}{b_{0,1,0}} + \frac{a_{0,0,1}}{b_{0,0,1}} + \frac{a_{1,1,0}}{b_{1,1,0}}},$$

$$\hat{f}_6 = \frac{a_{0,0,0}}{b_{0,0,0} + \frac{a_{1,0,0}}{b_{1,0,0}} + \frac{a_{0,1,0}}{b_{0,1,0}} + \frac{a_{0,0,1}}{b_{0,0,1}} + \frac{a_{1,1,0}}{b_{1,1,0}} + \frac{a_{1,0,1}}{b_{1,0,1}}},$$

$$\hat{f}_7 = \frac{a_{0,0,0}}{b_{0,0,0} + \frac{a_{1,0,0}}{b_{1,0,0}} + \frac{a_{0,1,0}}{b_{0,1,0}} + \frac{a_{0,0,1}}{b_{0,0,1}} + \frac{a_{1,1,0}}{b_{1,1,0}} + \frac{a_{1,0,1}}{b_{1,0,1}} + \frac{a_{0,1,1}}{b_{0,1,1}}},$$

$$\hat{f}_8 = \frac{a_{0,0,0}}{b_{0,0,0} + \frac{a_{1,0,0}}{b_{1,0,0}} + \frac{a_{0,1,0}}{b_{0,1,0}} + \frac{a_{0,0,1}}{b_{0,0,1}} + \frac{a_{1,1,0}}{b_{1,1,0}} + \frac{a_{1,0,1}}{b_{1,0,1}} + \frac{a_{0,1,1}}{b_{0,1,1}} + \frac{a_{1,1,1}}{b_{1,1,1}}}.$$

Таким чином, кожне наступне наближення утворюється додаванням однієї наступної ланки дробу. Неважко зауважити, що

$$\hat{f}_{k^3} = \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{k-1} \frac{a_{i,i,i}}{F_i^{(k-1-i)}}. \tag{8}$$

Зазначимо, що $\mathop{\mathrm{D}}_{i=m}^{n} \frac{a_{i,i,i}}{b_{i,i,i}} = 0$, $\mathop{\mathrm{D}}_{j=m}^{n} \frac{a_{i,j,k}}{b_{i,j,k}} = 0$, $\mathop{\mathrm{D}}_{k=m}^{n} \frac{a_{i,j,k}}{b_{i,j,k}} = 0$, якщо $n < m$, і також

$$\hat{f}_{k^3+1} = a_{0,0,0}\left(b_{0,0,0} + \mathop{D}_{j=1}^{k}\frac{a_{j,0,0}}{b_{j,0,0}} + \mathop{D}_{j=1}^{k-1}\frac{a_{0,j,0}}{b_{0,j,0}} + \mathop{D}_{j=1}^{k-1}\frac{a_{0,0,j}}{b_{0,0,j}} + \mathop{D}_{j=1}^{k-1}\frac{a_{j,j,0}}{\Phi_{j,j,0}^{(k-1-j)}} + \right.$$

$$\left. + \mathop{D}_{j=1}^{k-1}\frac{a_{j,0,j}}{\Phi_{j,0,j}^{(k-1-j)}} + \mathop{D}_{j=1}^{k-1}\frac{a_{0,j,j}}{\Phi_{0,j,j}^{(k-1-j)}} + \hat{f}_{k^3}\right)^{-1}.$$

Формула (8) складається з $k + 6(k-1)^2$ частинних ланок $\frac{a_{i,j,\ell}}{b_{i,j,\ell}}$, $i, j, \ell = 0, 1, \dots, k-1$:

k ланок вигляду $\frac{a_{i,i,i}}{b_{i,i,i}}$, $i = 0, 1, \dots, k-1$,

$3[(k-1) + (k-2) + \dots + 1]$ ланок вигляду $\frac{a_{i+j,i,i}}{b_{i+j,i,i}}$, $\frac{a_{i,i+j,i}}{b_{i,i+j,i}}$, $\frac{a_{i,i,i+j}}{b_{i,i,i+j}}$, $i, j = 0, 1, \dots, k-1$,

$6[(k-2) + (k-3) + \dots + 1]$ ланок вигляду $\frac{a_{i+j+1,i+j,i}}{b_{i+j+1,i+j,i}}$, $\frac{a_{i+j,i+j+1,i}}{b_{i+j,i+j+1,i}}$, $\frac{a_{i,i+j,i+j+1}}{b_{i,i+j,i+j+1}}$, $\frac{a_{i+j+1,i,i+j}}{b_{i+j+1,i,i+j}}$, $\frac{a_{i+j,i,i+j+1}}{b_{i+j,i,i+j+1}}$, $\frac{a_{i,i+j+1,i+j}}{b_{i,i+j+1,i+j}}$, $i, j = 0, 1, \dots, k-1$,

(разом $k + 6\frac{k(k-1)}{2} + 6\frac{(k-1)(k-2)}{2} = k + 6(k-1)^2$).

Щоб отримати наступний поверх дробу (8), треба кожну ланку збільшити на один поверх, тобто додати $12(k-1)$ ланок до попередніх $k + 6(k-1)^2$ частинних ланок і ще додати сім ланок $\frac{a_{k,k,k}}{b_{k,k,k}}$, $\frac{a_{k-1,k,k}}{b_{k-1,k,k}}$, $\frac{a_{k,k-1,k}}{b_{k,k-1,k}}$, $\frac{a_{k,k,k-1}}{b_{k,k,k-1}}$, $\frac{a_{k-1,k-1,k}}{b_{k-1,k-1,k}}$, $\frac{a_{k-1,k,k-1}}{b_{k-1,k,k-1}}$, $\frac{a_{k,k-1,k-1}}{b_{k,k-1,k-1}}$, що у сумі дасть $12k - 5$ і, враховуючи кількість ланок дробу (8), матимемо, що наближення $\hat{f}_{(k+1)^3}$ складається з $k + 1 + 6k^2$ частинних ланок, тобто

$$\hat{f}_{(k+1)^3} = \mathop{D}_{i=0}^{k}\frac{a_{i,i,i}}{F_i^{(k-i)}}.$$

Запишемо довільне наближення $\hat{f}_k$ через f_k. Оскільки $\hat{f}_{k^3} = f_k$, $\hat{f}_{(k+1)^3} = f_{k+1}$, то неважко перевірити, що $f_{[\sqrt[3]{k}]} \le \hat{f}_k \le f_{([\sqrt[3]{k}]+1)}$, $k = 1, 2, \dots$, тобто, що наближення $\hat{f}_k$ – це $\left(\left[\sqrt[3]{k}\right] + 1\right)$-те звичайне наближення $f_{([\sqrt[3]{k}]+1)}$, у якому всі його $\left(\left[\sqrt[3]{k}\right] + 1\right)$-ті ланки, що йдуть за $\frac{a_{[\sqrt[3]{k}],r,r}}{b_{[\sqrt[3]{k}],r,r}}$, $\frac{a_{r,[\sqrt[3]{k}],r}}{b_{r,[\sqrt[3]{k}],r}}$, $\frac{a_{r,r,[\sqrt[3]{k}]}}{b_{r,r,[\sqrt[3]{k}]}}$, $\frac{a_{[\sqrt[3]{k}],[\sqrt[3]{k}],r}}{b_{[\sqrt[3]{k}],[\sqrt[3]{k}],r}}$, $\frac{a_{[\sqrt[3]{k}],r,[\sqrt[3]{k}]}}{b_{[\sqrt[3]{k}],r,[\sqrt[3]{k}]}}$, $\frac{a_{r,[\sqrt[3]{k}],[\sqrt[3]{k}]}}{b_{r,[\sqrt[3]{k}],[\sqrt[3]{k}]}}$, $0 \le r \le \left[\sqrt[3]{k}\right]$, замінено на $\frac{0}{1}$, $[k]$ – ціла частина додатного числа k.

Введемо залишки ТНД (5).

Означення 3. Скінченні неперервні дроби

$$Q_{i+k,i,i}^{(0)} = b_{i+k,i,i}, \qquad Q_{i+k,i,i}^{(m+1)} = b_{i+k,i,i} + \frac{a_{i+k+1,i,i}}{Q_{i+k+1,i,i}^{(m)}},$$

$$Q_{i,i+k,i}^{(0)} = b_{i,i+k,i}, \qquad Q_{i,i+k,i}^{(m+1)} = b_{i,i+k,i} + \frac{a_{i,i+k+1,i}}{Q_{i,i+k+1,i}^{(m)}},$$

$$Q_{i,i,i+k}^{(0)} = b_{i,i,i+k}, \qquad Q_{i,i,i+k}^{(m+1)} = b_{i,i,i+k} + \frac{a_{i,i,i+k+1}}{Q_{i,i,i+k+1}^{(m)}},$$

$$i, m = 0, 1, \ldots, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

називають одновимірними залишками ТНД (5).

Двовимірні неперервні дроби

$$Q_{i+k,i+k,i}^{(0)} = b_{i+k,i+k,i},$$

$$Q_{i+k,i+k,i}^{(m+1)} = b_{i+k,i+k,i} + \frac{a_{i+k+1,i+k+1,i}}{Q_{i+k+1,i+k+1,i}^{(m)}} + \frac{a_{i+k+1,i+k,i}}{Q_{i+k+1,i+k,i}^{(m)}} + \frac{a_{i+k,i+k+1,i}}{Q_{i+k,i+k+1,i}^{(m)}},$$

$$Q_{i+k,i,i+k}^{(0)} = b_{i+k,i,i+k},$$

$$Q_{i+k,i,i+k}^{(m+1)} = b_{i+k,i,i+k} + \frac{a_{i+k+1,i,i+k+1}}{Q_{i+k+1,i,i+k+1}^{(m)}} + \frac{a_{i+k+1,i,i+k}}{Q_{i+k+1,i,i+k}^{(m)}} + \frac{a_{i+k,i,i+k+1}}{Q_{i+k,i,i+k+1}^{(m)}},$$

$$Q_{i,i+k,i+k}^{(0)} = b_{i,i+k,i+k},$$

$$Q_{i,i+k,i+k}^{(m+1)} = b_{i,i+k,i+k} + \frac{a_{i,i+k+1,i+k+1}}{Q_{i,i+k+1,i+k+1}^{(m)}} + \frac{a_{i,i+k+1,i+k}}{Q_{i,i+k+1,i+k}^{(m)}} + \frac{a_{i,i+k,i+k+1}}{Q_{i,i+k,i+k+1}^{(m)}},$$

$$i, m = 0, 1, \ldots, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

називають двовимірними залишками скінченного ТНД (5), а тривимірний неперервний дріб

$$Q_i^{(0)} = b_{i,i,i}, \qquad Q_i^{(m+1)} = b_{i,i,i} + \frac{a_{i+1,i,i}}{Q_{i+1,i,i}^{(m)}} + \frac{a_{i,i+1,i}}{Q_{i,i+1,i}^{(m)}} + \frac{a_{i,i,i+1}}{Q_{i,i,i+1}^{(m)}} +$$

$$+ \frac{a_{i+1,i+1,i}}{Q_{i+1,i+1,i}^{(m)}} + \frac{a_{i+1,i,i+1}}{Q_{i+1,i,i+1}^{(m)}} + \frac{a_{i,i+1,i+1}}{Q_{i,i+1,i+1}^{(m)}} + \frac{a_{i+1,i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(m)}},$$

$$i, m = 0, 1, \ldots, \tag{11}$$

називають загальним i-м залишком скінченного ТНД (5).

Встановимо формулу різниці двох наближень $f_n - f_m$, $n > m$, ТНД (1). У рекурентних формулах для залишків (9)–(11) позначимо $m+1$ через $s-1-i$, тобто загальний залишок запишемо як

$$Q_{s-1}^{(0)} = b_{s-1,s-1,s-1},$$

$$Q_i^{(s-1-i)} = b_{i,i,i} + \frac{a_{i+1,i,i}}{Q_{i+1,i,i}^{(s-2-i)}} + \frac{a_{i,i+1,i}}{Q_{i,i+1,i}^{(s-2-i)}} + \frac{a_{i,i,i+1}}{Q_{i,i,i+1}^{(s-2-i)}} +$$

$$+ \frac{a_{i+1,i+1,i}}{Q_{i+1,i+1,i}^{(s-2-i)}} + \frac{a_{i+1,i,i+1}}{Q_{i+1,i,i+1}^{(s-2-i)}} + \frac{a_{i,i+1,i+1}}{Q_{i,i+1,i+1}^{(s-2-i)}} + \frac{a_{i+1,i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(s-2-i)}},$$

$$i = 0, 1, \ldots, s-2.$$

Цей дріб має $s-1-i$ поверхів, а в одновимірних і двовимірних залишках дроби мають рівно $s-1-i-k$ поверхів, $k=1,2,\ldots,s-2-i$.

Припускаючи, що всі $Q_j^{(s-1-j)}\neq 0$, $s=m,n$, отримаємо формулу різниці між n-м і m-м наближеннями, $n>m$:

$$f_n-f_m=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^i(F_i^{(m-1-i)}-F_i^{(n-1-i)})\prod_{j=0}^{i}a_{j,j,j}}{\prod_{j=0}^{i}Q_j^{(m-1-j)}Q_j^{(n-1-j)}}+$$

$$+\frac{(-1)^m\prod_{j=0}^{m}a_{j,j,j}}{Q_m^{(n-1-m)}\prod_{j=0}^{m-1}Q_j^{(m-1-j)}Q_j^{(n-1-j)}}. \qquad (12)$$

Дійсно, якщо $n>m$, то маємо

$$f_n-f_m=\frac{a_{0,0,0}}{Q_0^{(n-1)}}-\frac{a_{0,0,0}}{Q_0^{(m-1)}}=\frac{a_{0,0,0}}{Q_0^{(n-1)}Q_0^{(m-1)}}(Q_0^{(m-1)}-Q_0^{(n-1)})=$$

$$=\frac{a_{0,0,0}}{Q_0^{(n-1)}Q_0^{(m-1)}}(F_0^{(m-1)}-F_0^{(n-1)})-$$

$$-\frac{a_{0,0,0}}{Q_0^{(n-1)}Q_1^{(n-2)}Q_0^{(m-1)}Q_1^{(m-2)}}(Q_1^{(n-2)}-Q_1^{(m-2)}).$$

Для довільного $k<n$ встановлюємо співвідношення

$$Q_k^{(m-1-k)}-Q_k^{(n-1-k)}=F_k^{(m-1-k)}-F_k^{(n-1-k)}-$$

$$-\frac{a_{k+1,k+1,k+1}}{Q_{k+1}^{(n-2-k)}Q_{k+1}^{(m-2-k)}}(Q_{k+1}^{(m-2-k)}-Q_1^{(n-2-k)}). \qquad (13)$$

Послідовно застосовуючи (13) і враховуючи, що

$$Q_{m-1}^{(0)}-Q_{m-1}^{(n-m)}=F_{m-1}^{(0)}-F_{m-1}^{(n-m)}-\frac{a_{m,m,m}}{Q_m^{(n-1-m)}},$$

після m-го кроку отримаємо формулу (12).

Використовуючи рекурентні співвідношення для одновимірних (9) і двовимірних залишків (10) за аналогічною схемою, отримаємо формулу різниці для $F_i^{(p)}-F_i^{(q)}$, $p>q$ [4].

Означення 4. Тривимірний неперервний дріб (1)/(2) є збіжним, якщо існує і є скінченною границя послідовності його наближень $\{f_n\}$. Величину цієї границі назвемо *значенням тривимірного неперервного дробу* (1)/(2).

Означення 5. Тривимірний неперервний дріб (1)/(2) є розбіжним, якщо нескінченне число його наближень не має сенсу або не існує єдиної скінченної границі послідовності його наближень $\{f_n\}$ або $\lim_{n\to\infty}\{f_n\}=\infty$.

Означення 6. Тривимірний неперервний дріб (1)/(2) є *абсолютно збіжним*, якщо збіжним є ряд, складений з абсолютних величин різниці наближень дробу $\sum_{i=1}^{\infty}\left|f_{i+1}-f_i\right|$.

Одним із основних методів дослідження збіжності багатовимірних неперервних дробів з постійними елементами є метод мажорант [1, 4].

Означення 7. Тривимірний неперервний дріб з числовими комплексними елементами

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty}\frac{c_{i,i,i}}{\tilde{F}_i}, \tag{14}$$

де

$$\tilde{F}_i = d_{i,i,i} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{i+j,i,i}}{d_{i+j,i,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{i,i+j,i}}{d_{i,i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{i,i,i+j}}{d_{i,i,i+j}} +$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{i+j,i+j,i}}{\tilde{\Phi}_{i+j,i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{i+j,i,i+j}}{\tilde{\Phi}_{i+j,i,i+j}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{i,i+j,i+j}}{\tilde{\Phi}_{i,i+j,i+j}},$$

$$\tilde{\Phi}_{k,k,i} = d_{k,k,i} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{k+j,k,i}}{d_{k+j,k,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{k,k+j,i}}{d_{k,k+j,i}},$$

$$\tilde{\Phi}_{k,i,k} = d_{k,i,k} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{k+j,i,k}}{d_{k+j,i,k}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{k,i,k+j}}{d_{k,i,k+j}},$$

$$\tilde{\Phi}_{i,k,k} = d_{i,k,k} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{i,k+j,k}}{d_{i,k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{c_{i,k,k+j}}{d_{i,k,k+j}}.$$

$c_{i,j,k} \neq 0$, $d_{i,j,k}$, $i,j,k = 0,1,\ldots$, – комплексні числа, назвемо *мажорантним дробом* для ТНД (1), якщо існує таке невід'ємне число m_0 і додатна стала $M > 0$, що для всіх цілих $m, n \geq m_0$ виконується

$$|f_m - f_n| \leq M\,|q_m - q_n| \qquad \left(|f_m - f_n| \geq M\,|q_m - q_n|\right),$$

де f_n, q_n – n-ті наближення тривимірних неперервних дробів (1) і (14) відповідно.

Твердження 1. *Якщо мажорантний дріб* (14) *для ТНД* (1) *є абсолютно збіжним, то ТНД* (1) *є абсолютно збіжним.*

Твердження 2. *Нехай існують такі додатні числа* $g_{i,j,k} > 0$, $i,j,k = 0,1,\ldots$, *що елементи ТНД* (1) *задовольняють нерівності*

$$|b_{i,i,i}| \geq \frac{|a_{i+1,i+1,i+1}|}{g_{i+1,i+1,i+1}} + \frac{|a_{i+1,i,i}|}{g_{i+1,i,i}} + \frac{|a_{i,i+1,i}|}{g_{i,i+1,i}} + \frac{|a_{i,i,i+1}|}{g_{i,i,i+1}} +$$

$$+ \frac{|a_{i+1,i+1,i}|}{g_{i+1,i+1,i}} + \frac{|a_{i+1,i,i+1}|}{g_{i+1,i,i+1}} + \frac{|a_{i,i+1,i+1}|}{g_{i,i+1,i+1}} + g_{i,i,i}, \tag{15}$$

$$|b_{i+j,i,i}| \geq \frac{|a_{i+j+1,i,i}|}{g_{i+j+1,i,i}} + g_{i+j,i,i},$$

$$|b_{i,i+j,i}| \geq \frac{|a_{i,i+j+1,i}|}{g_{i,i+j+1,i}} + g_{i,i+j,i},$$

$$|b_{i,i,i+j}| \geq \frac{|a_{i,i,i+j+1}|}{g_{i,i,i+j+1}} + g_{i,i,i+j}, \tag{16}$$

$$\left|b_{i+j,i+j,i}\right| \ge \frac{\left|a_{i+j+1,i+j+1,i}\right|}{g_{i+j+1,i+j+1,i}} + \frac{\left|a_{i+j+1,i+j,i}\right|}{g_{i+j+1,i+j,i}} + \frac{\left|a_{i+j,i+j+1,i}\right|}{g_{i+j,i+j+1,i}} + g_{i+j,i+j,i}\,,$$

$$\left|b_{i+j,i,i+j}\right| \ge \frac{\left|a_{i+j+1,i,i+j+1}\right|}{g_{i+j+1,i,i+j+1}} + \frac{\left|a_{i+j+1,i,i+j}\right|}{g_{i+j+1,i,i+j}} + \frac{\left|a_{i+j,i,i+j+1}\right|}{g_{i+j,i,i+j+1}} + g_{i+j,i,i+j}\,,$$

$$\left|b_{i,i+j,i+j}\right| \ge \frac{\left|a_{i,i+j+1,i+j+1}\right|}{g_{i,i+j+1,i+j+1}} + \frac{\left|a_{i,i+j+1,i+j}\right|}{g_{i,i+j+1,i+j}} + \frac{\left|a_{i,i+j,i+j+1}\right|}{g_{i,i+j,i+j+1}} + g_{i,i+j,i+j}\,. \tag{17}$$

Тоді ТНД

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{-\left|a_{i,i,i}\right|}{\hat{F}_i}\,, \tag{18}$$

де

$$\hat{F}_i = \left|b_{i,i,i}\right| + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{i+j,i,i}\right|}{\left|b_{i+j,i,i}\right|} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{i,i+j,i}\right|}{\left|b_{i,i+j,i}\right|} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{i,i,i+j}\right|}{\left|b_{i,i,i+j}\right|} +$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{i+j,i+j,i}\right|}{\hat{\Phi}_{i+j,i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{i+j,i,i+j}\right|}{\hat{\Phi}_{i+j,i,i+j}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{i,i+j,i+j}\right|}{\hat{\Phi}_{i,i+j,i+j}}\,,$$

$$\hat{\Phi}_{k,k,i} = \left|b_{k,k,i}\right| + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{k+j,k,i}\right|}{\left|b_{k+j,k,i}\right|} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{k,k+j,i}\right|}{\left|b_{k,k+j,i}\right|}\,,$$

$$\hat{\Phi}_{k,i,k} = \left|b_{k,i,k}\right| + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{k+j,i,k}\right|}{\left|b_{k+j,i,k}\right|} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{k,i,k+j}\right|}{\left|b_{k,i,k+j}\right|}\,,$$

$$\hat{\Phi}_{i,k,k} = \left|b_{i,k,k}\right| + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{i,k+j,k}\right|}{\left|b_{i,k+j,k}\right|} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{-\left|a_{i,k,k+j}\right|}{\left|b_{i,k,k+j}\right|}\,,$$

є мажорантним дробом для ТНД (1).

Д о в е д е н н я. Введемо для залишків скінченного ТНД (18), аналогічно, як для залишків ТНД (5), позначення

$$\hat{Q}_i^{(n-1-i)} = \hat{F}_i^{(n-1-i)} - \frac{\left|a_{i+1,i+1,i+1}\right|}{Q_{i+1}^{(n-2-i)}}, \qquad \hat{Q}_{n-1}^{(0)} = \left|b_{n-1,n-1,n-1}\right|,$$

$$\hat{Q}_{i+k,i,i}^{(n-1-i)} = \left|b_{i+k,i,i}\right| - \frac{\left|a_{i+k+1,i,i}\right|}{\hat{Q}_{i+k+1,i,i}^{(n-1-i)}}, \qquad \hat{Q}_{n-1,i,i}^{(n-1-i)} = \left|b_{n-1,i,i}\right|,$$

$$\hat{Q}_{i,i+k,i}^{(n-1-i)} = \left|b_{i,i+k,i}\right| - \frac{\left|a_{i,i+k+1,i}\right|}{\hat{Q}_{i,i+k+1,i}^{(n-1-i)}}, \qquad \hat{Q}_{i,n-1,i}^{(n-1-i)} = \left|b_{i,n-1,i}\right|,$$

$$\hat{Q}_{i,i,i+k}^{(n-1-i)} = \left|b_{i,i,i+k}\right| - \frac{\left|a_{i,i,i+k+1}\right|}{\hat{Q}_{i,i,i+k+1}^{(n-1-i)}}, \qquad \hat{Q}_{i,i,n-1}^{(n-1-i)} = \left|b_{i,i,n-1}\right|,$$

$$\hat{Q}_{n-1,n-1,i}^{(n-1-i)} = \left|b_{n-1,n-1,i}\right|,$$

$$\hat{Q}_{i+k,i+k,i}^{(n-1-i)} = \left|b_{i+k,i+k,i}\right| - \frac{\left|a_{i+k+1,i+k+1,i}\right|}{\hat{Q}_{i+k+1,i+k+1,i}^{(n-1-i)}} - \frac{\left|a_{i+k+1,i+k,i}\right|}{\hat{Q}_{i+k+1,i+k,i}^{(n-1-i)}} - \frac{\left|a_{i+k,i+k+1,i}\right|}{\hat{Q}_{i+k,i+k+1,i}^{(n-1-i)}}\,,$$

$$\hat{Q}^{(n-1-i)}_{n-1,i,n-1} = \left| b_{n-1,i,n-1} \right|,$$

$$\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+k,i,i+k} = \left| b_{i+k,i,i+k} \right| - \frac{\left| a_{i+k+1,i,i+k+1} \right|}{\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+k+1,i,i+k+1}} - \frac{\left| a_{i+k+1,i,i+k} \right|}{\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+k+1,i,i+k}} - \frac{\left| a_{i+k,i,i+k+1} \right|}{\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+k,i,i+k+1}},$$

$$\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i,n-1,n-1} = \left| b_{i,n-1,n-1} \right|,$$

$$\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i,i+k,i+k} = \left| b_{i,i+k,i+k} \right| - \frac{\left| a_{i,i+k+1,i+k+1} \right|}{\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i,i+k+1,i+k+1}} - \frac{\left| a_{i,i+k+1,i+k} \right|}{\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i,i+k+1,i+k}} - \frac{\left| a_{i,i+k,i+k+1} \right|}{\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i,i+k,i+k+1}},$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-2, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1-i, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Методом повної математичної індукції неважко перевірити, що

$$\left| Q^{(n-1-i)}_{i} \right| \ge \hat{Q}^{(n-1-i)}_{i} \ge g_{i,i,i}, \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1, 0, \tag{19}$$

$$\left| Q^{(n-1-i)}_{i+k,i+k,i} \right| \ge \hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+k,i+k,i} \ge g_{i+k,i+k,i},$$

$$\left| Q^{(n-1-i)}_{i+k,i,i+k} \right| \ge \hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+k,i,i+k} \ge g_{i+k,i,i+k},$$

$$\left| Q^{(n-1-i)}_{i,i+k,i+k} \right| \ge \hat{Q}^{(n-1-i)}_{i,i+k,i+k} \ge g_{i,i+k,i+k},$$

$$i = n-1, n-2, \ldots, 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1-i. \tag{20}$$

$$\left| Q^{(n-1-i)}_{i+k,i,i} \right| \ge \hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+k,i,i} \ge g_{i+k,i,i},$$

$$\left| Q^{(n-1-i)}_{i,i+k,i} \right| \ge \hat{Q}^{(n-1-i)}_{i,i+k,i} \ge g_{i,i+k,i},$$

$$\left| Q^{(n-1-i)}_{i,i,i+k} \right| \ge \hat{Q}^{(n-1-i)}_{i,i,i+k} \ge g_{i,i,i+k},$$

$$i = n-1, n-2, \ldots, 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1-i. \tag{21}$$

Доведемо першу із нерівностей (21). Покладемо $k = n-1-i$. Тоді матимемо

$$\left| Q^{(n-1-i)}_{n-1,i,i} \right| = \left| b_{n-1,i,i} \right| \ge \hat{Q}^{(n-1-i)}_{n-1,i,i} \ge g_{n-1,i,i}, \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1, 0.$$

Припустимо, що перша нерівність із (21) виконується для $k = m+1$ і доведемо її правильність для $k = m$:

$$\left| Q^{(n-1-i)}_{i+m,i,i} \right| = \left| b_{i+m,i,i} + \frac{a_{i+m+1,i,i}}{Q^{(n-1-i)}_{i+m+1,i,i}} \right| \ge \left| b_{i+m,i,i} \right| - \frac{\left| a_{i+m+1,i,i} \right|}{\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+m+1,i,i}} = \hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+m,i,i} \ge g_{i+m,i,i}.$$

Аналогічно доводиться правильність ще двох нерівностей (21).

При $k = n-1-i$ перша з нерівностей (20) виконується:

$$\left| Q^{(n-1-i)}_{n-1,n-1,i} \right| = \left| b_{n-1,n-1,i} \right| \ge g_{n-1,n-1,i}.$$

Нехай ця нерівність виконується для $k = m+1$. Тоді для $k = m$ будемо мати

$$\left| Q^{(n-1-i)}_{i+m,i+k,i} \right| \ge \left| b_{i+m,i+m,i} \right| - \frac{\left| a_{i+m+1,i+m+1,i} \right|}{\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+m+1,i+m+1,i}} -$$

$$- \frac{\left| a_{i+m+1,i+m,i} \right|}{\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+m+1,i+m,i}} - \frac{\left| a_{i+m,i+m+1,i} \right|}{\hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+m,i+m+1,i}} = \hat{Q}^{(n-1-i)}_{i+m,i+m,i} \ge g_{i+m,i+m,i}.$$

Дві інші нерівності з цієї групи нерівностей доводяться подібно.

Тепер доведемо нерівність (19). При $i = n-1$ маємо

$$\left| Q_{n-1}^{(0)} \right| = \left| b_{n-1,n-1,n-1} \right| \geq g_{n-1,n-1,n-1}.$$

Припустимо, що нерівність (19) виконується при $i = k+1$. Оскільки

$$\left|F_k^{(n-1-k)}\right| \geq \left|b_{k,k,k}\right| - \frac{\left|a_{k+1,k,k}\right|}{\hat{Q}_{k+1,k,k}^{(n-1-k)}} - \frac{\left|a_{k,k+1,k}\right|}{\hat{Q}_{k,k+1,k}^{(n-1-k)}} - \frac{\left|a_{k,k,k+1}\right|}{\hat{Q}_{k,k,k+1}^{(n-1-k)}} -$$

$$- \frac{\left|a_{k+1,k+1,k}\right|}{\hat{Q}_{k+1,k+1,k}^{(n-1-k)}} - \frac{\left|a_{k+1,k,k+1}\right|}{\hat{Q}_{k+1,k,k+1}^{(n-1-k)}} - \frac{\left|a_{k,k+1,k+1}\right|}{\hat{Q}_{k,k+1,k+1}^{(n-1-k)}} \geq$$

$$\geq g_{k,k,k} + \frac{\left|a_{k+1,k+1,k+1}\right|}{g_{k+1,k+1,k+1}},$$

то знаходимо

$$\left| Q_k^{(n-1-k)} \right| = \left| F_k^{(n-1-k)} - \frac{a_{k+1,k+1,k+1}}{Q_{k+1}^{(n-2-k)}} \right| \geq$$

$$\geq \hat{F}_k^{(n-1-k)} - \frac{\left|a_{k+1,k+1,k+1}\right|}{\hat{Q}_{k+1}^{(n-2-k)}} = \hat{Q}_k^{(n-1-k)} \geq g_{k,k,k}.$$

Щоб оцінити зверху різницю $\left| F_k^{(m-1-k)} - F_k^{(n-1-k)} \right|$, треба використати формули різниці для наближень одновимірних і двовимірних залишків [4] і оцінки цих залишків:

$$\left| F_k^{(m-1-k)} - F_k^{(n-1-k)} \right| \leq \hat{F}_k^{(m-1-k)} - \hat{F}_k^{(n-1-k)}.$$

Тепер використаємо формулу різниці (12) для двох підхідних дробів $f_n - f_m$, $q_n - q_m$:

$$\left| f_n - f_m \right| = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\left| F_i^{(m-1-i)} - F_i^{(n-1-i)} \right| \prod_{j=0}^{i} \left| a_{j,j,j} \right|}{\prod_{j=0}^{i} \left| Q_j^{(m-1-j)} \right| \left| Q_j^{(n-1-j)} \right|} +$$

$$+ \frac{\prod_{j=0}^{m} \left| a_{j,j,j} \right|}{\left| Q_m^{(n-1-m)} \right| \prod_{j=0}^{m-1} \left| Q_j^{(m-1-j)} \right| \left| Q_j^{(n-1-j)} \right|} \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^{i+1} (\hat{F}_i^{(m-1-i)} - \hat{F}_i^{(n-1-i)}) \prod_{j=0}^{i} (-\left| a_{j,j,j} \right|)}{\prod_{j=0}^{i} \hat{Q}_j^{(m-1-j)} \hat{Q}_j^{(n-1-j)}} +$$

$$+ \frac{\prod_{j=0}^{m} (-\left| a_{j,j,j} \right|)}{\hat{Q}_m^{(n-1-m)} \prod_{j=0}^{m-1} \hat{Q}_j^{(m-1-j)} \hat{Q}_j^{(n-1-j)}} = -(q_n - q_m). \qquad (22)$$

Твердження доведено. ♦

Використовуючи твердження 2, отримаємо тривимірний аналог теореми Слєшинського – Прінґсгейма.

Теорема 1. *Тривимірний неперервний дріб* (1) *з комплексними елементами, які задовольняють умови* (15)–(17), *є абсолютно збіжним і множина його значень належить кругу* $|z| \le |a_{0,0,0}| / g_{0,0,0}$.

Д о в е д е н н я. Згідно з доведеним твердженням 2, ТНД (18) є мажорантним дробом для ТНД (1), елементи якого задовольняють нерівності (15)–(17). Оскільки з (22) випливає, що

$$|f_{m+1} - f_m| \le q_m - q_{m+1}, \qquad m = 1,2,\ldots, \tag{23}$$

то це доводить, що послідовність наближень ТНД (18) $\{q_m\}$ є монотонно спадною. З (19) маємо

$$q_m = \frac{-|a_{0,0,0}|}{Q_0^{(m-1)}} \ge \frac{-|a_{0,0,0}|}{g_{0,0,0}}.$$

Отже, границя послідовності $\{q_m\}$ існує і є скінченною.

Абсолютна збіжність ТНД (1) випливає з (23). Беручи до уваги (19), відразу отримуємо, що

$$|f_n| \le \left| \frac{a_{0,0,0}}{Q_0^{(n-1)}} \right| \le \frac{|a_{0,0,0}|}{\hat{Q}_0^{(n-1)}} \le \frac{|a_{0,0,0}|}{g_{0,0,0}}.$$

Теорему доведено. ♦

Висновки. Отриманий результат можна використати для доведення теорем збіжності багатовимірних узагальнень неперервних дробів.

1. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Розвиток теорії гіллястих ланцюгових дробів у 1996–2016 роках // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 2. – С. 7–18.
   Те саме: *Bodnar D. I., Kuchmins'ka Kh. Yo.* Development of the theory of branched continued fractions in 1996–2016 // J. Math. Sci. – 2018. – **231**, No. 4. – P. 481–494.
   – DOI 10.1007/s10958-018-3828-7.
2. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
   Те саме: *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – xxii + 428 p. – Encyclopedia of Mathematics and its Applications / Ed. G.-C. Rota. – Vol. 11.
3. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 613–617.
4. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.
5. *Кучмінська Х. Й., Возна С. М.* Розвинення N-кратного степеневого ряду в N-вимірний правильний C-дріб // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 3. – С. 70–75.
6. *Kuchminska Kh.* Corresponding N-dimensional continued fractions for N-multiple power series // Voronoï's Impact on Modern Science: Proc. 6th Int. Conf. on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations / Jörn Steuding and M. Pratsiovytyi (Eds). – Kyiv: National Pedagog. Drahomanov Univ. Publ., 2018. – Vol. 1. – P. 169–176.
7. *Murphy J. A., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comput. Appl. Math. – 1978. – **4**, No. 3. – P. 181–190.
   – https://doi.org/10.1016/0771-050X(78)90002-5.

О ТЕОРЕМЕ СЛЕШИНСКОГО – ПРИНГСГЕЙМА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ОБОБЩЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ

Предложено трехмерное обобщение непрерывной дроби. Установлена формула разности между приближениями предложенной дроби и получены оценки ее остатков. Построена мажорантная дробь и исследована абсолютная сходимость такой обобщенной дроби.

***Ключевые слова**: трехмерная непрерывная дробь, приближения, остатки, формула разности, абсолютная сходимость.*

ON THE ŚLESZYŃSKY – PRINGSHEIM THEOREM FOR THREE-DIMENSIONAL GENERALIZATION OF CONTINUED FRACTION

A three-dimensional generalization of a continued fraction is proposed. The difference formula between the approximants of the proposed fraction is established and estimates of its residuals are obtained. A majorant fraction is constructed and the absolute convergence of this generalized fraction is investigated.

***Key words:** three-dimensional continued fraction, approximants, residuals, difference formula, absolute convergence.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
27.08.19