УДК 517.95

А. О. Лопушанський[1], Г. П. Лопушанська[2✉]

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ДРОБОВОЇ ДИФУЗІЇ У ПРОСТОРАХ ТИПУ ШВАРЦА

Встановлено достатні умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення двох невідомих функцій із простору типу Шварца швидко спадаючих на безмежності гладких функцій у правій частині рівняння дифузії з похідною Капуто – Джрбашяна дробового порядку за часом. Використано дві інтегральні за часом умови перевизначення.

Ключові слова: *похідна дробового порядку, обернена задача, простори типу Шварца, інтегральна за часом умова перевизначення.*

Вступ. Умови класичної розв'язності задачі Коші і крайових задач для рівнянь із дробовими похідними за часом одержано в працях [1, 5–10, 15 та ін.] (див. також бібліографію в них). Найбільше робіт по обернених задачах для таких рівнянь присвячено задачам із невідомими правими частинами рівнянь, в основному при регулярних даних (див. [11–13, 17–19] та бібліографію). Параболічні задачі з похідними дробового порядку за просторовими змінними, зокрема, у просторах функцій типу Шварца [2], досліджувались у [3, 4].

У цій статті вивчається обернена задача для рівняння дифузії з дробовою похідною Капуто – Джрбашяна порядку $\beta \in (0,1)$ із двома невідомими функціями з простору типу Шварца швидко спадаючих на безмежності гладких функцій у правій частині рівняння.

1. Допоміжні факти і формулювання задачі. Нехай $Q = \mathbb{R}^n \times (0,T]$, $S(\mathbb{R}^n)$ – простір швидко спадаючих на безмежності нескінченно диференційовних функцій (простір Шварца), а $S_\gamma(\mathbb{R}^n)$, $\gamma > 0$, є простором типу Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ [2, с. 201]:

$$S_\gamma(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \in S(\mathbb{R}^n) : \left| D^\alpha v(x) \right| \le C_\alpha e^{-a|x|^{1/\gamma}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \right\},$$

де $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\overline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha)$ – мультиіндекс, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{0, \ldots, n\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $C_\alpha = C_\alpha(v)$ – деякі додатні сталі, $a = a(v)$. Через $f * g$ позначаємо згортку функцій f і g. Будемо використовувати функцію $f_\lambda(t)$:

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{\theta(t) t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \le 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(\lambda)$ – ґамма-функція, $\theta(t)$ – функція Гевісайда.

Похідна Рімана – Ліувілля $v^{(\beta)}(t)$ порядку $\beta > 0$ для функції $v(t)$ визначається формулою

$$v^{(\beta)}(t) = f_{-\beta}(t) * v(t),$$

а похідна Капуто – Джрбашяна дробового порядку (регуляризована дробова похідна) [16] – формулою

$$D^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\beta-1} \frac{d^m}{d\tau^m} v(\tau)\, d\tau, \quad \beta \in (m-1, m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

✉ lhp@ukr.net

Тоді

$$D^{\beta}v(t) = v^{(\beta)}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} f_{j+1-\beta}(t)v^{(j)}(0). \qquad (1)$$

При $\beta \in (0,1]$ розглянемо обернену задачу

$$D_t^{\beta}u - A(x,D)u = R_1(x)g(t) + R_2(x), \qquad (x,t) \in Q\,, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = F_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n\,, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_1(t)\,dt = \Phi_1(x), \quad \frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_2(t)\,dt = \Phi_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n\,, \quad (4)$$

про визначення трійки функцій (u, R_1, R_2). Тут Φ_1, Φ_2, F_1, g, η_1, η_2 – задані функції, функція $g(t)$ відмінна від тотожної сталої, $A(x,D)$ – еліптичний диференціальний вираз другого порядку:

$$A(x,D)u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u\,.$$

Відомо [2, с. 202, 211], що $S_{\gamma}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{a>0} S_{\gamma,a}(\mathbb{R}^n)$, де

$$S_{\gamma,a}(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \in S(\mathbb{R}^n) : \left|D^{\alpha}v(x)\right| \le C_{\alpha,\delta}e^{-(a-\delta)|x|^{1/\gamma}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall\alpha, \forall\delta > 0 \right\}$$

із деякими додатними сталими $C_{\alpha,\delta} = C_{\alpha,\delta}(v)$,

$$S_{\gamma,a_2}(\mathbb{R}^n) \subset S_{\gamma,a_1}(\mathbb{R}^n), \qquad a_1 < a_2\,,$$

а також

$$S_{\gamma,a}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ v \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) :$$

$$\|v\|_{k,a} = \sup_{|\alpha|\le k, x\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{1/\gamma}} \left|D^{\alpha}v(x)\right| < +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N},\ k \ge 2 \Big\}.$$

Зауважимо, що

$$\|v\|_{k,a} \le \|v\|_{k+p,a} \qquad \forall k,p \in \mathbb{N}, \quad k \ge 2, \qquad v \in S_{\gamma,a}(\mathbb{R}^n)\,,$$

$$\|Av\|_{k,a} = \sup_{|\alpha|\le k, x\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{1/\gamma}} \left|D^{\alpha}(Av)(x)\right| \le$$

$$\le \sup_{|\alpha|\le k+2, x\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k+2})|x|^{1/\gamma}} \left|D^{\alpha}v(x)\right| = \|v\|_{k+2,a}\,.$$

Введемо простори

$$\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ v \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) :$$

$$\|v\|_{k,(a)} = \max\left\{\|v\|_{k,a}, \|Av\|_{k,a}\right\} < +\infty \quad \forall k \in \mathbb{N},\ k \ge 2 \Big\}.$$

Будемо говорити, що послідовність $v_m(x)$ при $m \to +\infty$ збігається до нуля у просторі $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, якщо для кожного мультиіндексу α послідовність $D^{\alpha}v_m(x)$ при $m \to +\infty$ збігається до нуля рівномірно на довільному компакті $|x| \le C < +\infty$, і норми $\|v_m\|_{k,(a)}$ обмежені для всіх $m,k \in \mathbb{N}$, $k \ne 1$.

Нехай $C_{2,\beta}(Q) = \{v \in C(Q) : Av,\, D_t^{\beta} v \in C(Q)\}$, $C_{2,\beta}(\bar{Q}) = C_{2,\beta}(Q) \cap C(\bar{Q})$, $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ – простір функцій $v \in C_{2,\beta}(\bar{Q})$ таких, що $v(\bullet, t) \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ для всіх $t \in [0,T]$.

Далі вважаємо, що коефіцієнти a_{ij}, a_i, a, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, оператора $A(x,D)$ є мультиплікаторами у просторі $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, тобто добутки їх і всіх їхніх похідних із функціями з $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ належать до $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$.

Означення 1. Трійку $(u, R_1, R_2) \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) \times \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ називаємо розв'язком задачі (2)–(4), якщо вона задовольняє рівняння (2) в Q і умови (3), (4).

Означення 2. Вектор-функцію $(G_0(x,t,y,\tau), G_1(x,t,y))$ називають вектор-функцією Ґріна задачі Коші (3) для рівняння

$$D_t^{\beta} u - A(x,D)u = F(x,t), \qquad (x,t) \in Q\,, \tag{5}$$

якщо за достатньо регулярних F і F_1 функція

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau) F(y,\tau)\, dy + \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y) F_1(y)\, dy\,, \qquad (x,t) \in \bar{Q}\,, \tag{6}$$

є класичним (із $C_{2,\beta}(\bar{Q})$) розв'язком задачі Коші (5), (3).

Вектор-функція Ґріна задачі Коші (5), (3) існує [1, 7], при цьому

$$G_1(x,t,y) = \int_0^t f_{1-\beta}(\tau) G_0(x,t,y,\tau)\, d\tau, \qquad (x,t) \in Q\,.$$

В [1, 7, 9] знайдено оцінки компонент вектор-функції Ґріна. Зокрема, у випадку $n \ge 3$ отримано

$$|G_0(x,t,y,\tau)| \le \frac{C_0 |x-y|^{2-n}}{t-\tau} e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{(t-\tau)^{\beta}}\right)^{1/(2-\beta)}}, \qquad (x,t),(y,\tau) \in Q, \quad (x,t) \ne (y,\tau)\,,$$

$$|G_1(x,t,y)| \le \frac{C_0 t^{-\beta}}{|x-y|^{n-2}} e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{t^{\beta}}\right)^{1/(2-\beta)}}, \quad x,y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T]\,,$$

де c, C_0 – додатні сталі, $c < (2-\beta)\left(\frac{\beta^{\beta}}{4}\right)^{1/(2-\beta)}$ при $A(x,D) = \Delta$ [1], множник $e^{-c\left(\frac{|x-y|^2}{(t-\tau)^{\beta}}\right)^{1/(2-\beta)}}$ можна опустити у випадку, коли $|x-y|^2 < (t-\tau)^{\beta}$.

Позначимо

$$(G_0\varphi)(x,t,\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\varphi(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 \le \tau < t \le T\,,$$

$$(G_1\varphi)(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)\varphi(y)\, dy, \qquad (x,t) \in Q\,,$$

$$(\mathcal{G}_0\varphi)(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\varphi(y,\tau)\, dy, \qquad (x,t) \in \bar{Q}\,.$$

Лема 1. *Для довільних* $\gamma \geq 1 - \beta/2$, $a > 0$, $\varphi \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ *існують числа* $C > 0$, $a' \in (0, a]$ $\left(\text{де } a' = c_\gamma \min\{cT^{-\beta/(2\gamma)}, a\},\ c_\gamma = \begin{cases} 2^{1-1/\gamma}, & \gamma \in [1-\beta/2, 1], \\ 1, & \gamma \geq 1, \end{cases} \right.$ $\left. a' = a \text{ при } \gamma \geq 1 \text{ і } aT^{\beta/(2\gamma)} \leq c \right)$ *такі, що для всіх* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, *маємо*

$$\|(G_0\varphi)(\bullet, t, \tau)\|_{k,(a)} \leq C(t-\tau)^{\beta-1} \max_{t\in[0,T]} \|\varphi(\bullet, t)\|_{k,(a)}, \qquad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

$$\|(G_1\varphi)(\bullet, t)\|_{k,(a)} \leq C \max_{t\in[0,T]} \|\varphi(\bullet, t)\|_{k,(a)}, \qquad t \in [0, T],$$

$$\mathcal{G}_0 : \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \to \tilde{S}_{\gamma,(a')}(\bar{Q}). \tag{7}$$

Д о в е д е н н я. Лема доводиться за схемою доведень подібних результатів у [5, 14]. Використовуючи оцінки компонент вектор-функції Ґріна і нерівність [9, с. 25]

$$|A|^{1/\gamma} + |B|^{1/\gamma} \geq c_\gamma |A + B|^{1/\gamma},$$

покладаючи $a_1 = \min\{cT^{-\beta/(2\gamma)}, a\}$, $a_2 = c_\gamma a_1$, показуємо, що

$$e^{-c(1-\frac{1}{k})\left(\frac{|x-y|}{T^{\beta/2}}\right)^{1/\gamma}} e^{-a(1-\frac{1}{k})|x|^{1/\gamma}} \leq e^{-a_2(1-\frac{1}{k})|y|^{1/\gamma}}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad k \neq 1,$$

а звідси отримуємо, що для всіх $a > 0$, $\varphi \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ і мультиіндексу $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha)$, $D^\alpha v(x,t) = D_x^\alpha v(x,t) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} v(x,t)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $D^{\bar{\alpha}} v(x,t) = \left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0} D^\alpha v(x,t)$, і виконується нерівність

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} D^{\bar{\alpha}} \varphi(x,t) G_0(x,t,y,\tau)\, dx \right| \leq \hat{C}(t-\tau)^{\beta-1} e^{-a_2(1-\frac{1}{k})|y|^{1/\gamma}} \times$$
$$\times \sup_{t\in[0,T], y\in\mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|y|^{1/\gamma}} \left| D^{\bar{\alpha}} \varphi(y,t) \right|,$$
$$(y, \tau) \in Q, \quad t > \tau, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \neq 1.$$

Інтегруючи частинами, одержуємо першу оцінку в (7) із $a' = a_2$, а також, що $\mathcal{G}_0 : \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \to \tilde{S}_{\gamma,(a_2)}(\bar{Q})$. Другу оцінку в (7) одержуємо аналогічно. ♦

2. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

Теорема 1. *Нехай* $\gamma \geq 1$, $0 < aT^{\beta/(2\gamma)} \leq c$, $F_1 \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $F \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u \in S_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ *задачі Коші* (5), (3), *який визначається формулою* (6).

Д о в е д е н н я. В [1, 9] доведено існування єдиного класичного (із $C_{2,\beta}(\bar{Q})$) розв'язку задачі Коші у випадку обмеженої і локально гельдерової в $\mathbb{R}^n$ функції F_1 та неперервної, обмеженої і локально гельдерової за просторовими змінними $x \in \mathbb{R}^n$ функції $F(x,t)$ для кожного $t \in [0,T]$, а також доведено однозначну розв'язність задачі у ширшому класі функцій (експонентного зростання на безмежності) і одержано зображення розв'язку у вигляді (6). А із (6) і леми 1 одержуємо, що за умов теореми визначена формулою (6) функція u належить до $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$. ♦

3. Розв'язок оберненої задачі. Перейдемо до вивчення задачі (2)–(4). Нехай виконується

Припущення (**A**):

$$\gamma \ge 1, \quad 0 < aT^{\beta/(2\gamma)} \le c,$$

$$F_1, \Phi_1, \Phi_2 \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n), \quad g \in C[0,T], \quad \eta_1, \eta_2 \in C^1[0,T].$$

Нехай $u \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ є розв'язком задачі Коші (2), (3). Враховуючи зв'язок (1) між регуляризованою похідною і похідною Рімана – Ліувілля порядку $\beta \in (0,1)$, подамо задачу (2), (3) у вигляді

$$f_{-\beta}(t) * u(x,t) = (Au)(x,t) + R_1(x)g(t) + R_2(x) + f_{1-\beta}(t)F_1(x), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u(x,0) = F_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Діючи оператором $f_\beta(t) *$ на обидві частини цього рівняння і використовуючи, що $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$, а отже, $f_\beta * f_{-\beta} = f_0 = \delta$ і $\delta(t) * u(x,t) = u(x,t)$ (тут $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака), одержуємо

$$u(x,t) = (Au)(x,t) * f_\beta(t) + R_1(x)(g * f_\beta)(t) + R_2(x)f_{1+\beta}(t) + F_1(x), \quad (x,t) \in Q.$$

Тоді

$$\int_0^T u(x,t)\eta_j(t)\,dt = \int_0^T \Big[(Au)(x,t) * f_\beta(t)\Big]\eta_j(t)\,dt + R_1(x)\int_0^T (g * f_\beta)(t)\eta_j(t)\,dt + R_2(x)\int_0^T f_{1+\beta}(t)\eta_j(t)\,dt + F_1(x)\int_0^T \eta_j(t)\,dt, \qquad j \in \{1,2\}. \tag{8}$$

Позначаючи

$$g_j = g_j(T) = \frac{1}{T}\int_0^T (g * f_\beta)(t)\eta_j(t)\,dt,$$

$$N_j = N_j(T) = \frac{1}{T}\int_0^T f_{1+\beta}(t)\eta_j(t)\,dt,$$

$$P_j = P_j(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \eta_j(t)\,dt, \qquad j \in \{1,2\},$$

і враховуючи умови перевизначення (4), одержуємо

$$\Phi_j(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \Big[(Au)(x,t) * f_\beta(t)\Big]\eta_j(t)\,dt + g_jR_1(x) + N_jR_2(x) + P_jF_1(x), \qquad j \in \{1,2\}.$$

Звідси за припущення

$$d(T) := g_1 N_2 - g_2 N_1 \neq 0 \tag{9}$$

знаходимо

$$R_1(x) = \frac{1}{Td(T)} \int_0^T \Big[(Au)(x,s) * f_\beta(s)\Big]\Big[N_1\eta_2(s) - N_2\eta_1(s)\Big]\,ds + v_1(x),$$

$$R_2(x) = \frac{1}{Td(T)} \int_0^T \Big[(Au)(x,s) * f_\beta(s)\Big][g_2\eta_1(s) - g_1\eta_2(s)]\,ds + v_2(x),$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

де

$$v_1(x) = \frac{1}{d(T)}\Big[N_2\Phi_1(x) - N_1\Phi_2(x) + (N_1P_2 - N_2P_1)F_1(x)\Big],$$

$$v_2(x) = \frac{1}{d(T)}\Big[g_1\Phi_2(x) - g_2\Phi_1(x) + (P_1g_2 - P_2g_1)F_1(x)\Big], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

За умов (**A**) при $u \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ маємо $R_j \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \{1,2\}$. Підставляючи вирази (10) у формулу (6) при $F(x,t) = g(t)R_1(x) + R_2(x)$, одержуємо

$$u(x,t) = \frac{1}{Td(T)} \int_0^t g(\tau)\,d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\,dy \times$$

$$\times \int_0^T \Big[(Au)(x,s) * f_\beta(s)\Big][N_1\eta_2(s) - N_2\eta_1(s)]\,ds +$$

$$+ \frac{1}{Td(T)} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\,dy \int_0^T \Big[(Au)(x,s) * f_\beta(s)\Big] \times$$

$$\times [g_2\eta_1(s) - g_1\eta_2(s)]\,ds + u_0(x,t), \tag{11}$$

де

$$u_0(x,t) = \frac{1}{d(T)} \int_0^t g(\tau)\,d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\,dy \int_0^T \big[N_2\Phi_1(s) - N_1\Phi_2(s) +$$

$$+ (N_1P_2 - N_2P_1)F_1(s)\big]\,ds + \frac{1}{d(T)} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\,dy \times$$

$$\times \int_0^T [g_1\Phi_2(s) - g_2\Phi_1(s) + (P_1g_2 - P_2g_1)F_1(s)\big]\,ds +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x,t,y)F_1(y)\,dy, \qquad (x,t) \in \bar{Q}. \tag{12}$$

Отже, для знаходження функції u одержали інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (11) у просторі $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$.

Лема 2. *За припущень* (**A**) *і* (9) *трійка* $(u, R_1, R_2) \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) \times \times \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ *є розв'язком задачі* (2)–(4) *тоді й тільки тоді, коли* u *– розв'язок рівняння* (11), *а* R_1 *і* R_2 *визначені формулами* (10).

Д о в е д е н н я. Було показано, що розв'язок u задачі (2)–(4) задовольняє рівняння (11), а R_1 і R_2 визначаються згідно з (10). Навпаки, нехай $u \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q})$ є розв'язком рівняння (11). Оскільки рівняння (11) збігається з (6) при $F(x,t) = R_1(x)g(t) + R_2(x)$, якщо у (6) замість $R_1(x)$ і $R_2(x)$ підставити вирази (10), то за теоремою 1 функція u задовольняє пряму задачу – задачу Коші (2), (3). Покажемо, що u задовольняє умову (4), якщо R_1 і R_2 визначені формулами (10).

Припустимо, що це не так. Нехай

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x,t)\eta_j(t)\,dt = \Phi_j^*(t), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \{1,2\}.$$

Введемо позначення

$$H_j(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \Big[(Au)(x,s) * f_\beta(s)\Big]\eta_j(s)\,ds,$$

$$H_j^*(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \Big[(Au^*)(x,s) * f_\beta(s)\Big]\eta_j(s)\,ds, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \{1,2\},$$

де u^* – розв'язок рівняння (11), в якому у виразі для u_0 є функції Φ_j^* замість Φ_j, $j \in \{1,2\}$. Тоді з (10) одержуємо

$$B_1(x) := \ N_2\Big[\big(\Phi_1(x) - \Phi_1^*(x)\big) - \big(H_1(x) - H_1^*(x)\big)\Big] -$$

$$- N_1\Big[\big(\Phi_2(x) - \Phi_2^*(x)\big) - \big(H_2(x) - H_2^*(x)\big)\Big] = 0,$$

$$B_2(x) := \ g_1\Big[\big(\Phi_2(x) - \Phi_2^*(x)\big) - \big(H_2(x) - H_2^*(x)\big)\Big] -$$

$$- g_2\Big[\big(\Phi_1(x) - \Phi_1^*(x)\big) - \big(H_1(x) - H_1^*(x)\big)\Big] = 0, \tag{13}$$

звідки, враховуючи умову (9), матимемо

$$\Phi_j(x) - \Phi_j^*(x) = H_j(x) - H_j^*(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \{1,2\}.$$

Із (11) і (12)

$$\Phi_j(x) - \Phi_j^*(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \Big[u(x,t) - u^*(x,t)\Big]\eta_j(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{Td(T)}\int_0^T \eta_j(t)\Big[\int_0^t g(\tau)\,d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)B_1(y)\,dy +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)B_2(y)\,dy\Big]dt, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad j \in \{1,2\}.$$

Тепер на підставі (13) одержуємо, що $\Phi_j(x) - \Phi_j^*(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1,2\}$. Лему доведено. ♦

Введемо простір

$$\mathcal{M}_{k,(a)} = \mathcal{M}_{k,(a)}(T) = \left\{ v \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) : \|v\| = \max_{t\in[0,T]} \|v(\bullet,t)\|_{k,(a)} < +\infty \right\},$$

$$k \in \{2,3,\ldots\}.$$

Зауважимо, що $\mathcal{M}_{k+p,(a)} \subset \mathcal{M}_{k,(a)}$ при $p \in \mathbb{N}$.

Припущення (B): $g(t)$ не дорівнює тотожно одиниці і

$$0 < g_{\min} \le g(t) \le g_{\max}, \quad t \in [0, T_0].$$

Лема 3. *Існує* $T_1 \in [0, T_0]$ *таке, що для всіх* $T \in (0, T_1)$ *за припущень* (**A**), (**B**) *і* (9) *для довільної* $u_0 \in \mathcal{M}_{k,(a)}(T)$ *інтегральне рівняння* (11) *має єдиний розв'язок* $u \in \mathcal{M}_{k,(a)}(T)$.

Д о в е д е н н я. Введемо оператор

$$(Kv)(x,t) = \frac{1}{Td(T)} \int_0^t g(\tau)\, d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau) \times$$

$$\times \left[\int_0^T \big((Av)(y,s) * f_\beta(s)\big)\big(N_1\eta_2(s) - N_2\eta_1(s)\big)\, ds \right] dy +$$

$$+ \frac{1}{Td(T)} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau) \times$$

$$\times \left[\int_0^T \big((Au)(y,s) * f_\beta(s)\big)\big(g_2\eta_1(s) - g_1\eta_2(s)\big)\, ds \right] dy + u_0(x,t) =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)(Av)(y,s)\, dy * f_\beta(s) \right) \times \right.$$

$$\times \frac{N_1\eta_2(s) - N_2\eta_1(s)}{d(T)} +$$

$$+ \left(\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)(Av)(y,s)\, dy * f_\beta(s) \right) \times$$

$$\left. \times \frac{g_2\eta_1(s) - g_1\eta_2(s)}{d(T)} \right] ds + u_0(x,t), \qquad (x,t) \in Q, \quad v \in \mathcal{M}_{k,(a)}.$$

За означенням

$$\|Kv\| = \max_{t \in [0,T]} \sup_{|\alpha| \le k,\, x \in \mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{1/\gamma}} \left| D^\alpha (Kv)(x,t) \right|.$$

Позначимо через C_m, $m \in \mathbb{N}$, додатні сталі. За лемою 1 при $\mu \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \tau < t \le T$,

$$\sup_{|\alpha| \le k,\, x \in \mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^{1/\gamma}} \left| D_x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x,t,y,\tau)\mu(y)\, dy \right| \le C_1 (t-\tau)^{\beta-1} \|\mu\|_{k,(a)}.$$

Тоді

$$\|Kv\| \le \frac{C_1}{T} \max_{t \in [0,T]} \int_0^T \left[\int_0^t g(\tau)(t-\tau)^{\beta-1} d\tau \big(f_1 * f_\beta\big)(s) \left| \frac{N_1\eta_2(s) - N_2\eta_1(s)}{d(T)} \right| + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} d\tau \big(f_1 * f_\beta\big)(s) \left| \frac{g_1\eta_2(s) - g_2\eta_1(s)}{d(T)} \right| \right] ds \|v\| + \|u_0\|.$$

Зауважимо, що за припущень леми

$$g_{\min} f_{1+\beta}(t) \le \int_0^t g(\tau) f_\beta(t-\tau)\, d\tau \le g_{\max} f_{1+\beta}(t),$$

а при

$$\omega(s) := \int_0^T f_{1+\beta}(t)\big[\eta_1(s)\eta_2(t) - \eta_1(t)\eta_2(s)\big]\, dt, \qquad s \in (0,T),$$

маємо

$$d(T) = \frac{1}{T^2}\int_0^T \left(\int_0^s g(\tau) f_\beta(s-\tau)\, d\tau\right)\omega(s)\, ds,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f_{1+\beta}(s)\left|\frac{N_1\eta_2(s) - N_2\eta_1(s)}{d(T)}\right| ds \le \frac{1}{g_{\min}} \frac{\int_0^T (g * f_\beta)(s)\,|\omega(s)|\, ds}{\left|\int_0^T (g * f_\beta)(s)\omega(s)\, ds\right|},$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f_{1+\beta}(s)\left|\frac{g_1\eta_2(s) - g_2\eta_1(s)}{d(T)}\right| ds \le \frac{1}{g_{\min}} \frac{\int_0^T (g * f_\beta)(s)\,|\omega(s)|\, ds}{\left|\int_0^T (g * f_\beta)(s)\omega(s)\, ds\right|}\, ds.$$

Тоді

$$\|Kv\| \le C_2 T^\beta \left[\frac{g_{\max}}{g_{\min}} + 1\right]\|v\| + \|u_0\| \qquad \forall v \in \mathcal{M}_{k,(a)},$$

аналогічно

$$\|Kv_1 - Kv_2\| \le C_2 T^\beta \left[\frac{g_{\max}}{g_{\min}} + 1\right]\|v_1 - v_2\|$$
$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{M}_{k,(a)}.$$

Отже, існує таке число $T_1 \in (0, T_0]$, що $K : \mathcal{M}_{k,(a)} \to \mathcal{M}_{k,(a)}$ і при всіх $T \in (0, T_1)$ оператор K є оператором стиску. За теоремою Банаха про нерухому точку рівняння $u = Ku$, тобто інтегральне рівняння (11), має єдиний розв'язок $u \in \mathcal{M}_{k,(a)}$, $k \in \{2, 3, \ldots\}$. ♦

Теорема 2. *Існує $T_1 \in (0, T_0]$ таке , що при всіх $T \in (0, T_1)$ за умов* (**A**), (**B**) *і* (9) *задача* (2)–(4) *має єдиний розв'язок* $(u, R_1, R_2) \in \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) \times \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) \times \times \tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, *причому u – розв'язок рівняння* (11), *де u_0 визначена згідно з* (12), *а R_1 і R_2 визначені формулами* (10).

Д о в е д е н н я. За припущень теореми $u_0 \in \mathcal{M}_{k,(a)}$ при всіх $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Тому згідно з лемою 3 існує таке число $T_1 > 0$, що при всіх $T \in (0, T_1)$ рівняння (11) однозначно розв'язне в $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$. За лемою 2 визначена згідно з (11), (10) трійка функцій (u, R_1, R_2) є розв'язком задачі (2)–(4).

Покажемо єдиність розв'язку задачі (2)–(4). Якщо (u_1, R_{11}, R_{21}), (u_2, R_{12}, R_{22}) – два розв'язки задачі (2)–(4) і $u = u_1 - u_2$, $R_1 = R_{11} - R_{12}$, $R_2 = R_{21} - R_{22}$, то трійка (u, R_1, R_2) є розв'язком задачі

$$D_t^{\beta} u - A(x, D)u = R_1(x)g(t) + R_2(x), \qquad (x, t) \in Q ,$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n ,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(x, t)\eta_1(t)\, dt = 0, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T u(x, t)\eta_2(t)\, dt = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n .$$

Як вище, одержуємо, що кожний розв'язок $u(x, t)$ цієї задачі є розв'язком інтегрального рівняння (11) з $u_0(x, t) = 0$ в області Q і

$$R_1(x) = \frac{1}{Td(T)}\int_0^T \Big[(Au)(x, s) * f_{\beta}(s)\Big][N_1\eta_2(s) - N_2\eta_1(s)]\, ds ,$$

$$R_2(x) = \frac{1}{Td(T)}\int_0^T \Big[(Au)(x, s) * f_{\beta}(s)\Big][g_2\eta_1(s) - g_1\eta_2(s)]\, ds, \qquad x \in \mathbb{R}^n . \tag{14}$$

За лемою 3 існує таке число $T_1 > 0$, що функція $u(x, t) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, є єдиним розв'язком одержаного рівняння при всіх $T \in (0, T_1)$. Тоді з (14) одержуємо, що $R_j = 0$ в $\tilde{S}_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \{1, 2\}$. ♦

Висновки. Знайдено достатні умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення двох невідомих функцій із простору типу Шварца гладких швидко спадаючих на безмежності функцій у правій частині рівняння дифузії з дробовою похідною за часом. Розв'язування задачі зводиться до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду у просторі типу Шварца.

1. *Ворошилов А. А., Килбас А. А.* Условия существования классического решения задачи Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Докл. Акад. наук. – 2007. – **414**, № 4. – С. 451–454.
   Те саме: *Voroshilov A. A., Kilbas A. A.* Existence conditions for a classical solution of the Cauchy problem for the diffusion-wave equation with a partial Caputo derivative // Doklady Math. – 2007. – **75**, No. 3. – P. 407–410. – https://doi.org/10.1134/S1064562407030209.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – Обобщенные функции. – Вып. 2. – Москва: Физматгиз, 1958. – 307 с.
   Те саме: *Gelfand I. M., Shilov G. E.* Generalized functions. Vol. 2: Spaces of fundamental and generalized functions. – New York: Chelsea Publ. Co., 2016. – 261 p.
3. *Городецький В. В., Дрінь Я. М.* Багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 5. – С. 619–633.
   Те саме: *Horodetskyi V. V., Drin Ja. M.* Multipoint (in time) problem for one class of evolutionary pseudodifferential equations // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, No. 5. – P. 690–706. – https://doi.org/10.1007/s11253-014-0965-0.
4. *Городецький В. В., Літовченко В. А.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь в просторах узагальнених функцій типу S' // Доп. АН України. – 1992. – № 10. – С. 6–9.
5. *Кочубей А. Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 8. – С. 1359–1368.
6. *Матійчук М. І.* Про зв'язок між фундаментальними розв'язками параболічних рівнянь і рівнянь з дробовими похідними // Буков. мат. журн. – 2016. – **4**, № 3-4. – С. 101–114.
7. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. – Москва: Наука, 2005. – 199 с.
8. *Aleroev T. S., Kirane M., Malik S. A.* Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition // Electron. J. Differ. Equat. – 2013. – **2013**, No. 270. – P. 1–16.
9. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birk-

häuser, 2004. – 390 p. – Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.
https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.
10. *Guner O., Bekir A.* Exact solutions to the time-fractional differential equations via local fractional derivatives // Waves in Random and Complex Media. – 2018. – **28**, No. 1. – P. 139–149. – https://doi.org/10.1080/17455030.2017.1332442.
11. *Ismailov M. I., Çiçek M.* Inverse source problem for a time-fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions // Appl. Math. Model. – 2016. – **40**, No. 7-8. – P. 4891–4899. – https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.12.020.
12. *Jin B., Rundell W.* A turorial on inverse problems for anomalous diffusion processes // Inverse Probl. – 2015. – **31**, 035003. – 40 p.
– https://doi.org/10.1088/0266-5611/31/3/035003.
13. *Lopushanska H.* A problem with an integral boundary condition for a time fractional diffusion equation and an inverse problem // Fractional Differ. Calcul. – 2016. – **6**, No. 1. – P. 133–145. – https://doi.org/10.7153/fdc-06-09.
14. *Lopushansky A., Lopushanska H.* Inverse source Cauchy problem to a time fractional diffusion-wave equation with distributions // Electron. J. Differ. Equat. – 2017. – **2017**, No. 182. – P. 1–14.
https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2017/182/lopushansky.
15. *Mainardi F.* The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // Appl. Math. Lett. – 1996. – **9**, No. 6. – P. 23–28.
– https://doi.org/10.1016/0893-9659(96)00089-4.
16. *Povstenko Y.* Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers. New York: Birkhäuser, 2015. – xiv+460 p.
17. *Sakamoto K., Yamamoto M.* Initial value/boundary-value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – **382**, No. 1. – P. 426–447.
– https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.04.058.
18. *Yang F., Liu X., Li X.-X., Ma C.-Y.* Landweber iterative regularization method for identifying the unknown source of the time-fraction diffusion equation // Adv. Differ. Equat. – 2017. – **2017**. – Article 388.
– https://doi.org/10.1186/s13662-017-1423-8.
19. *Ying Zhang, Xiang Xu.* Inverse source problem for a fractional diffusion equation // Inverse Probl. – 2011. – **27,** No 3. – Article 035010. – P. 1–12.
– https://doi.org/10.1088/0266-5611/27/3/035010.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ШВАРЦА

Установлены достаточные условия однозначной разрешимости обратной задачи определения двух неизвестных функций из пространства типа Шварца быстро убывающих на бесконечности гладких функций в правой части уравнения диффузии с производной Капуто – Джрбашяна дробного порядка по времени. Использованы два интегральные по времени условия переопределения.

Ключевые слова: *производная дробного порядка, обратная задача, пространства типа Шварца, интегральное по времени условие переопределения.*

INVERSE PROBLEM FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION IN SCHWARZ-TYPE SPACES

The sufficient conditions of the unique solvability are found for an inverse problem of determining two unknown functions from the Schwarz-type space of smooth functions rapidly decreasing at infinity in a source term of a diffusion equation with the Djrbashian – Caputo time fractional derivative. The two time integral over-determination conditions are used.

Key words: *fractional derivative, inverse problem, Schwarz type spaces, time integral over-determination condition.*

[1] Жешувський ун-т, Жешув, Польща,
[2] Львів. нац. ун-т ім. Ів. Франка, Львів

Одержано
10.09.19