УДК 517.956.4

І. П. Мединський[✉]

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ДВОМА ГРУПАМИ ПРОСТОРОВИХ ЗМІННИХ ВИРОДЖЕННЯ

Для неоднорідного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження встановлено деякі властивості фундаментального розв'язку та породжуваного ним об'ємного потенціалу, а також наведено теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші в класах вагових функцій.

Ключові слова: *ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова, фундаментальний розв'язок задачі Коші, об'ємний потенціал, інтегральні зображення розв'язків, коректна розв'язність задачі Коші.*

Вступ. У цій статті досліджуються деякі властивості класичних фундаментальних розв'язків задачі Коші та їх застосування до побудови інтегральних зображень розв'язків і встановлення коректної розв'язності задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь другого порядку типу рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова [22]. Таке рівняння і його різноманітні узагальнення вивчались багатьма авторами [18]. Причиною цього є застосування таких рівнянь при побудові і дослідженні моделей, які виникають у деяких задачах теорії ймовірностей, математичного моделювання опціонів, у теорії броунівського руху, теорії конвективної дифузії, теорії бінарних електролітів, під час моделювання процесів дифузії з інерцією та розсіювання електронів, у віковому наближенні теорії сповільнених електронів, у біології, економіці та інших галузях науки [10, 14–21, 23–25].

У шістдесятих роках минулого сторіччя С. Д. Ейдельман у працях [11–13] з теорії параболічних за Петровським систем запропонував підхід, згідно з яким еволюція за часом t розв'язків задачі Коші характеризується належністю до сім'ї банахових просторів U_t (при кожному t до свого простору). Виявилось, що такий підхід дає можливість одержати точні результати про коректну розв'язність задачі Коші та зображення розв'язків, визначених у відкритому шарі $\Pi_T := (0, T] \times \mathbb{R}^n$, через їхні граничні значення на гіперплощині $\{t = 0\}$ для параболічних рівнянь різної структури. У праці [2] С. Д. Івасишен довів, що простір U_t можна означити як простір класичних розв'язків u, які є обмеженими за нормою простору U_t. Так означений простір U_t можна охарактеризувати як множину значень оператора Пуассона, ядром якого є фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) Z для відповідного рівняння. Отже, С. Д. Івасишен поповнив розглянуті С. Д. Ейдельманом сім'ї просторів, поширив результати на ширший клас систем і довів у певному сенсі обернене твердження. У подальшому підхід Ейдельмана – Івасишена [16, 17] розвивався і багатократно реалізовувався С. Д. Івасишеном [3] і його учнями. Застосування цього підходу у випадках конкретного рівняння зводиться до побудови ФРЗК Z і встановлення оцінок Z і його похідних, вибору підходящих просторів Φ і знаходження відповідних просторів U_t, $t \in (0, T]$. Реалізація підходу істотно залежить від наявності точної інформації про ФРЗК.

Основним джерелом такої інформації і методом побудови ФРЗК є метод Леві та його модифікації [18, 21]. Проте застосування цього методу до вироджених рівнянь типу Колмогорова із залежними від усіх змінних ко-

✉ i.p.medynsky@gmail.com

ефіцієнтами істотно ускладнюється. Крім традиційних, виникають серйозні труднощі, пов'язані з виродженістю рівняння. Подолати ці труднощі вдалося за допомогою поетапного застосування класичного методу Леві. У працях [4–8] цей підхід розвивався і застосовувався до ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з різною кількістю груп просторових змінних. Класичний ФРЗК (КФРЗК) для рівнянь, коефіцієнти яких не залежать від змінних виродження, побудовано в [4], у [5, 6] – для рівнянь з однією групою просторових змінних виродження, а в працях [7, 8] – для рівнянь з двома групами просторових змінних виродження. У цих працях також знайдено оцінки функції Z та оцінки її похідних.

В статті [9] реалізовано підхід Ейдельмана – Івасишена для однорідного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова. Пропонована стаття є продовженням розпочатих раніше досліджень ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами змінних виродження в напрямку отримання додаткових властивостей КФРЗК і їх застосування до встановлення теорем про інтегральні зображення розв'язків, а також коректну розв'язність задачі Коші для відповідного неоднорідного рівняння.

1. Позначення, припущення і допоміжні відомості. Нехай n, n_1, n_2 і n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \ge n_2 \ge n_3 \ge 1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$; $\mathbb{N}_j := \{1, \dots, j\}$, $\mathbb{Z}_j := \mathbb{N}_j \cup \{0\}$, $j \in \mathbb{N}$, $m_j = j - 1/2$, $j \in \mathbb{N}_3$. Будемо вважати, що просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x := (x_1, x_2, x_3)$, де компоненти $x_j := (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1, k_2, k_3)$, де $k_j := (k_{j1}, \dots, k_{jn_j}) \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$, $j \in \mathbb{N}_3$. Будемо використовувати позначення $M := m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3$; $M_k := m_1 |k_1| + m_2 |k_2| + m_3 |k_3|$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, де $|k_j| := k_{j1} + \ldots + k_{jn_j}$. Для кожного додатного $T > 0$ замикання множини $\Pi_T := (0, T] \times \mathbb{R}^n$ позначимо через $\overline{\Pi}_T$.

Крім наведених вище, користуватимемось ще такими позначеннями:

$$\Delta_x^z f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, z, \cdot), \quad \Delta_{x_s}^{z_s} f(\cdot, x, \cdot) := \Delta_x^{z^{(s)}} f(\cdot, x, \cdot), \quad s \in \mathbb{N}_3,$$

$$z^{(0)} := x, \quad z^{(1)} := (z_1, x_2, x_3), \quad z^{(2)} := (x_1, z_2, x_3), \quad z^{(3)} := (x_1, x_2, z_3),$$

$$x^{(1)} := (x_1, z_2, z_3), \qquad x^{(2)} := (x_1, x_2, z_3),$$

$$X(t) := \left(X_1(t), X_2(t), X_3(t)\right),$$

$$X_1(t) := x_1, \quad X_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1, \quad X_3(t) := x_3 + t x_2' + 2^{-1} t^2 x_1', \qquad t \in \mathbb{R},$$

$$\hat{x}_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_2}), \quad x_1' := (x_{11}, \dots, x_{1n_3}), \quad x_2' := (x_{21}, \dots, x_{2n_3}),$$

$$\Xi^1(t) := \left(\xi_1, X_2(t), X_3(t)\right), \quad \Xi^2(t) := \left(\xi_1, \xi_2, X_3(t)\right),$$

$$\rho(t, x, \xi) := \sum_{j=1}^{3} t^{1-2j} \left| X_j(t) - \xi_j \right|^2, \qquad t > 0, \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$E_c(t, x, \xi) := \exp\{-c\,\rho(t, x, \xi)\}, \qquad t > 0, \qquad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Розглянемо рівняння

$$Lu(t, x) := \left(S - A(t, x, \partial_{x_1})\right) u(t, x) = f(t, x), \qquad (t, x) \in \Pi_T, \tag{1}$$

в якому

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} ,$$

$$A(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{j,\ell=1}^{n_1} a_{j\ell}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1\ell}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,x),$$

де f − задана, а u − невідома функції.

Будемо припускати, що коефіцієнти $a_{j\ell}$, a_j і a_0 рівняння (1) є комплекснозначними функціями в $\bar{\Pi}_T$, які задовольняють такі умови:

(***i***) $a_{j\ell}$, a_j, a_0 є обмеженими й неперервними за t та існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x) \in \bar{\Pi}_T$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11},\dots,\sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{j,\ell=1}^{n_1} a_{j\ell}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1\ell} \ge \delta|\sigma_1|^2 ;$$

(***ii***) $a_{j\ell}$, a_j, a_0 є гельдеровими за просторовими змінними в такому сенсі:

$\exists H_1 > 0, \quad \exists \alpha_1 \in (0,1) \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(1)})\} \subset \bar{\Pi}_T :$

$$\left|\Delta_{x_1}^{z_1} a(t,x)\right| \le H_1 |x_1 - z_1|^{\alpha_1}, \tag{2}$$

$\exists H_2 > 0, \quad \exists \alpha_2 \in (1/3,\ 2/3] \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(2)})\} \subset \bar{\Pi}_T, \quad \forall h \in [0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t,x)\right| \le H_2\big(h^{m_2\alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2}\big), \tag{3}$$

$\exists H_3 > 0, \quad \exists \alpha_3 \in (3/5,\ 2/3] \quad \forall\{(t,x),(t,z^{(3)})\} \subset \bar{\Pi}_T, \quad \forall h \in [0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_3}^{z_3} a(t,x)\right| \le H_3\big(h^{m_3\alpha_3} + |X_3(h) - z_3|^{\alpha_3}\big), \tag{4}$$

$\exists H_4 > 0, \quad \forall\{(t,x),(t,\xi^{(r)}),(t,z^{(s)})\} \subset \bar{\Pi}_T, \ r \in \{\mathbb{N}_3 \mid r < s \in \{2,3\}\},$

$\forall h \in [0,T]:$

$$\left|\Delta_{x_r}^{\xi_r}\Delta_{x_s}^{z_s} a(t,x)\right| \le H_4 |x_r - \xi_r|^{\alpha_r}\big(h^{m_s\alpha_s} + |X_s(h) - z_s|^{\alpha_s}\big), \tag{5}$$

де a − будь-який з коефіцієнтів $a_{j\ell}$, a_j і a_0. В умові (5) сталі α_1, α_2 і α_3 такі, як у відповідних умовах (2)−(4);

(***iii***) коефіцієнти $a_{j\ell}$, a_j, a_0 виразу $A(t,x,\partial_{x_1})$ мають обмежені похідні того самого вигляду, при яких вони стоять. Похідні від цих коефіцієнтів в шарі $\bar{\Pi}_T$ задовольняють умову (***ii***).

Зауважимо, що при $h = 0$ з умов (3), (4) випливають звичайні умови Гельдера за змінними x_2 і x_3. Достатні умови виконання (3), (4) подані відповідно в працях [5] і [7].

КФРЗК для рівняння (1) − це така функція $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 \le \tau < t \le T$, яка має за змінними t і x всі похідні, що входять у рівняння (1), і для будь-якого $\tau \in [0,T)$ і довільних неперервних та обмежених функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ вираз

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\,, \tag{6}$$

або

$$u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi) \tag{7}$$

(у випадку узагальненої міри) визначає в шарі $(\tau, T] \times \mathbb{R}^n$ розв'язок однорідного рівняння (1) за початкової умови

$$u(t,x)\big|_{t=\tau} = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

При цьому функція (6) задовольняє умову (8) у такому сенсі:

$$\lim_{t\to\tau} u(t,x) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Зауважимо, що прямування до границі $\varphi(x)$ в (9) рівномірне на кожному компакті простору $\mathbb{R}^n$. Функція (7) задовольняє умову (8) у слабкому сенсі.

2. Допоміжні відомості. Як доведено в [7, 8], за умов (***i***)–(***ii***) для рівняння (3) існує КФРЗК Z, для якого справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-M_k} E_c(t-\tau,x,\xi)\,, \tag{10}$$

$$\left|SZ(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-1} E_c(t-\tau,x,\xi)\,, \tag{11}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_s}^{k_s} Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-m_s(1-\alpha_s)}, \quad k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s}\setminus\{0\}, \quad s \in \mathbb{N}_3\,, \tag{12}$$

$$\left|\Delta_{x_\ell}^{\xi_\ell} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_s}^{k_s} Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\right| \le C\left|x_\ell - \xi_\ell\right|^{\alpha_\ell} (t-\tau)^{-m_s(1-\alpha_s)-m_\ell\alpha_\ell}\,,$$
$$k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s}\setminus\{0\}, \quad \{\ell,s\} \in \mathbb{N}_3\,, \tag{13}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_s}^{k_s} Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-m_1n_1-m_s(1-\alpha_s)} E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\,,$$
$$k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s}\setminus\{0\}, \quad s \in \{2,3\}\,, \tag{14}$$

$$\left|\Delta_{x_\ell}^{\xi_\ell} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_s}^{k_s} Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\right| \le C\left|x_\ell - \xi_\ell\right|^{\alpha_\ell} (t-\tau)^{-m_s(1-\alpha_s)-m_\ell\alpha_\ell} \times$$
$$\times E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1), \qquad k_s \in \mathbb{Z}_+^{n_s}\setminus\{0\}, \quad \{\ell,s\} \in \mathbb{N}_3\,, \tag{15}$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_{x_3}^{k_3} Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-m_1n_1-m_2n_2-m_3(1-\alpha_3)} E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)\times$$
$$\times E_c^2(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2), \quad k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \quad |k_3| = 1\,, \tag{16}$$

$$\left|\Delta_{x_\ell}^{\xi_\ell} \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_s}^{k_s} Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\right| \le C\left|x_\ell - \xi_\ell\right|^{\alpha_\ell} (t-\tau)^{-m_s(1-\alpha_s)-m_\ell\alpha_\ell} \times$$
$$\times E_c^1(t-\tau,x_1-\xi_1)E_c^2(t-\tau,X_2(t-\tau)-\xi_2)\,,$$
$$k_3 \in \mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}, \quad |k_3| = 1\,, \tag{17}$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k := (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1| + |k_2| + |k_3| \le 1$, C – додатна стала.

Зауважимо, що умови (4)–(6) для показників Гельдера виконуються, якщо покласти $\alpha_3 = (3+\alpha_1)/5$, $\alpha_2 = (1+\alpha_1)/3$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha \in (0,1]$. У цьому випадку за допомогою відповідно модифікованої методики з праці [6] на випадок двох груп просторових змінних виродження, отримуються ще такі оцінки:

$$\left|\Delta_x^{\xi}\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(d(x;\xi))^{\alpha}(t-\tau)^{-M-M_k-m_1\alpha}E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{18}$$

$$\left|\Delta_x^{\xi} S Z(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(d(x;\xi))^{\alpha}(t-\tau)^{-M-1-m_1\alpha}E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{19}$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $k := (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_1|k_1| + |k_2| + |k_3| \le 1$, C – додатна стала, а $d(x;\xi) := \sum_{\ell=1}^{3}\left|x_\ell - \xi_\ell\right|^{1/(2\ell-1)}$ – параболічна відстань між точками x і ξ, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$.

Наведемо властивості об'ємного потенціалу

$$u(t,x) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{20}$$

породженого ФРЗК Z для рівняння (3).

Будемо використовувати норми і простори з праці [9]. Для функції $f : \Pi_T \to \mathbb{C}$ приймемо такі умови:

(f_0): функція f є неперервною і локально гельдеровою за просторовими змінними x_1, x_2 і x_3 з відповідними показниками α_1, α_2 і α_3 рівномірно стосовно t і для довільного $t \in (0,T]$ є скінченними величини

$$\|f(t,\cdot)\|_0^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left(|f(t,x)|\exp\{-[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),x]\}\right),$$

$$F_0(t) := \int_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_0^{\mathbf{k}(\tau,\mathbf{a})}\, d\tau;$$

(f_p): функція f є неперервною і локально гельдеровою за просторовими змінними x_1, x_2 і x_3 з відповідними показниками α_1, α_2 і α_3 рівномірно стосовно t і для довільного $t \in (0,T]$ є скінченними величини

$$\|f(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})},$$

$$F_p(t) := \int_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(\tau,\mathbf{a})}\, d\tau, \qquad p \in [1,\infty].$$

Лема 1. *Якщо функція f задовольняє умови* **(f_0)**, *або* **(f_p)**, *то функція (20) має неперервні похідні $\partial_x^k u$, $m_1|k_1| + |k_2| + |k_3| \le 1$, Su, для яких справджуються формули*

$$\partial_{x_1}^{k_1} u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi, \qquad |k_1| = 1,$$

$$\partial_x^k u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} \partial_{x_1}^{k_1} Z(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_2\, d\xi_3\right)\times$$

$$\times\, \Delta_{\Xi^1(t-\tau)}^{X(t-\tau)} f(\tau,\Xi^1(t-\tau))\, d\xi_1 +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_3}} \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_3 \right) \times$$

$$\times \Delta_{\Xi^2(t-\tau)}^{\Xi^1(t-\tau)} f(\tau, \Xi^2(t-\tau))\, d\xi_1\, d\xi_2 +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\, d\xi_3 \Delta_\xi^{\Xi^2(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi +$$

$$+\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z(t,x;\tau,\xi)\, d\xi \right) f(\tau, X(t-\tau))\, d\tau\,,$$

$$m_1 |k_1| + |k_2| + |k_3| = 1\,,$$

$$Su(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} SZ(t,x;\tau,\xi) \Delta_\xi^{X(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi +$$

$$+\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} SZ(t,x;\tau,\xi)\, d\xi \right) f(\tau, X(t-\tau))\, d\tau, \qquad (t,x) \in \Pi_T\,.$$

Д о в е д е н н я леми проводиться за допомогою оцінок ФРЗК (10)–(17) і методики, яка використовувалась в [6–8]. ♦

Лема 2. *Нехай для функції* f *виконується умова* **(** f_0 **).** *Тоді функція* (20) *є розв'язком рівняння* (1), *для якого справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_0^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C\, F_0(t), \qquad t \in (0,T]\,, \tag{21}$$

і для довільної компактної множини $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$

$$u(t,x) \underset{t\to 0}{\to} 0, \qquad x \in \mathcal{K}\,. \tag{22}$$

Д о в е д е н н я. Те, що функція (20) є розв'язком рівняння (1) випливає з леми 1 і з того, що Z є розв'язком відповідного однорідного рівняння.

Зауважимо, що для довільних $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ і $\delta > 0$ справджується рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} t^{-M} \exp\{-\delta\rho(t,x,\xi)\}\, d\xi = C\,. \tag{23}$$

На підставі оцінок (12) та (13), (14) з [6] і рівності (23) маємо

$$|u(t,x)| \le C \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-M} \exp\{-(c-c_0)\rho(t-\tau,x,\xi)\} \times$$

$$\times \exp\{-c_0\rho(t-\tau,x,\xi) + [\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),\xi]\} \times$$

$$\times \left(|f(\tau,\xi)| \exp\{-[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}),\xi]\}\right) d\xi \le$$

$$\le C \exp\{[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}), X(t)]\} F_0(t)\, d\xi, \qquad (t,x) \in \Pi_T\,.$$

Звідси випливає оцінка (21).

Співвідношення (22) є наслідком того, що $F_0(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$, і нерівності

$$\sup_{x\in\mathcal{K}} |u(t,x)| \le C \sup_{(t,x)\in(0,T]\times\mathcal{K}} \exp\{[\mathbf{k}(t,\mathbf{a}), X(t)]\}\, F_0(t) \le C\, C_0 F_0(t)\,,$$

$$C_0 := \sup_{x\in\mathcal{K}} \exp\{[\ell(T), x]\}\,.$$ ♦

Лема 3. *Якщо функція* f *задовольняє умову* (f_2), *то функція* (20) *є розв'язком рівняння* (1), *для якого справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C\,F_p(t), \qquad t \in (0,T], \tag{24}$$

і рівність

$$\lim_{t\to 0}\|u(t,\cdot)\|_p^{\ell(T)} = 0\,. \tag{25}$$

Д о в е д е н н я. Те, що функція (20) є розв'язком рівняння (1) обґрунтовується так само, як в лемі 2. Для доведення леми досить довести оцінку (24), оскільки з цієї нерівності, а також нерівності (15) з [6] і з того, що $F_0(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$, випливає (25).

Зауважимо, що справджується нерівність

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le \int_0^t \|P(t,\tau,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}\,d\tau, \qquad t \in (0,T], \tag{26}$$

де

$$P(t,\tau,x) := \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi\,.$$

Для $p = 1$ або $p = \infty$ нерівність (26) є очевидною, а для $p \in (1,\infty)$ нерівність (26) справджується на підставі нерівності Мінковського. За допомогою оцінок (10) і нерівностей (13), (14) з праці [9] доводиться оцінка

$$\|P(t,\tau,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C\,\|f(\tau,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(\tau,\mathbf{a})}, \qquad 0 \le \tau < t \le T\,.$$

Звідси та з нерівності (26) випливає оцінка (24). ♦

3. Основні результати. Теореми, які наведені у цьому пункті, є аналогами теорем 2 і 3 з [9] для випадку неоднорідного рівняння.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (3) *виконуються умови* (***i***)–(***iii***). *Тоді правильними є такі твердження:*

1°) *для довільних функції* $\varphi \in L_p^{\mathbf{a}}$ *і функції* f, *яка задовольняє умову* (f_p), $p \in [1,\infty]$, *формулою*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + {}$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi, \qquad (t,x) \in \Pi_T\,, \tag{27}$$

визначається єдиний розв'язок рівняння (3), *для якого справджуються оцінки*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C\big(\|\varphi\|_p^{\mathbf{a}} + F_p(t)\big), \qquad t \in (0,T],$$

і співвідношення

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t,\cdot) - \varphi(\,\cdot\,)\|_p^{\ell(t)} = 0$$

при $p \in [1,\infty)$, *а при* $p = \infty$ *розв'язок* $u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \varphi$ *у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *з простору* $L_1^{-\ell(T)}$ *виконується*

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)\,dx\,;$$

2°) *для довільних узагальненої міри* $\mu \in M^{\mathbf{a}}$ *і функції* f, *яка задовольняє умову* (f_1), *формулою*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\, d\mu(\xi) + $$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi, \qquad (t,x) \in \Pi_T, \qquad (28)$$

визначається єдиний розв'язок рівняння (3), *для якого справджуються оцінки*

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C(\|\mu\|^{\mathbf{a}} + F_1(t)), \qquad t \in (0,T],$$

і $u(t,\cdot) \underset{t\to 0}{\to} \mu$ *у слабкому сенсі, тобто для будь-яких функцій* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *з простору* $C_0^{-\ell(T)}$ *виконується*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u(t,x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, d\mu(x).$$

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (3) *виконуються умови* (***i***)−(***iii***), *для його правої частини* f − *умова* (f_p), *а для розв'язку* u, *визначеного в шарі* Π_T, *виконується нерівність*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C, \qquad t \in (0,T],$$

з деякими сталими $C > 0$ *і* $p \in [1,\infty]$. *Тоді при* $p \in (1,\infty]$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{\mathbf{a}}$, *а при* $p = 1$ − *єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{\mathbf{a}}$ *такі, що розв'язок* u *зображується у вигляді* (27) *і* (28) *відповідно.*

Д о в е д е н н я теорем 1 і 2 із урахуванням леми 3 зводяться до фактичного повторення доведень теорем 2 і 3 з [9].

Зауваження. Теореми 1 і 2 мають такі самі наслідки, як наслідки з теорем 2 і 3 з праці [9], і є реалізацією вищеописаного підходу Ейдельмана − Івасишена до класу неоднорідних ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження і коефіцієнтами, залежними від усіх змінних.

Наведемо ще теорему про коректну розв'язність задачі Коші для рівняння (1) за припущення, що початкова функція належить до простору $C_0^{\mathbf{a}}$ неперервних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, які мають скінченну норму

$$\|\varphi\|_0^{\mathbf{a}} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \le C\left(|\varphi(x)| \exp\{-[\mathbf{a},x]\}\right).$$

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* (***i***)−(***iii***) *для коефіцієнтів рівняння* (3), *умова* (f_0) *для функції* f *і* $\varphi \in C_0^{\mathbf{a}}$, *то формулою* (27) *визначається єдиний розв'язок рівняння* (1), *для якого справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_0^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C(\|\varphi\|_0^{\mathbf{a}} + F_0(t)), \qquad t \in (0,T],$$

і для довільної компактної множини $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ *виконується співвідношення*

$$u(t,x) \underset{t\to 0}{\to} \varphi(x), \qquad x \in \mathcal{K}.$$

Д о в е д е н н я цієї теореми аналогічне до доведення теореми 2 з праці [9].

Висновки. Для неоднорідного ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження встановлено деякі властивості об'ємного потенціалу, який породжується класичним фундаментальним розв'язком задачі Коші, а також наведено теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші в класах вагових, експоненціально зростаючих при $|x| \to \infty$ функцій. Представлені тут результати будуть використовуватись для встановлення відповідних тверджень для загальніших рівнянь.

1. *Дронь В. С., Івасишен С. Д.* Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Укр. мат. вісн. – 2004. – **1,** № 1. – С. 61–68.
2. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$ -параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 4. – С. 500–506.
3. *Івасишен С. Д.* Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових просторів, залежних від часу // Мат. студії. – 2013. – **40**, № 2. – С. 172–181.
4. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок виродженого рівняння Колмогорова, коефіцієнти якого не залежать від змінних виродження // Буков. мат. журн. – 2014. – **2,** № 2-3. – С. 94–106.
5. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних // Диференц. рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. В. А. Михайлець. – 2016. – **13**, № 1. – С. 108–155.
6. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Про класичні фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 2. – С. 28–42.
   Те саме: *Ivasyshen S. D., Medyns'kyi I. P.* On the classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables // J. Math. Sci. – 2018. – **231**, No. 4. – P. 507–526. – https://doi.org/10.1007/s10958-018-3830-0.
7. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 3. – С. 9–31.
   Те саме: *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* Classical fundamental solutions of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables. I // J. Math. Sci. – 2020. – **246**, No. 2. – P. 121–151. – https://doi.org/10.1007/s10958-020-04726-z.
8. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Класичний фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження. II // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 4. – С. 7–24.
9. *Івасишен С. Д., Мединський І. П.* Властивості фундаментальних розв'язків, теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61,** № 4. – С. 7–16.
10. *Процах Н. П., Пташник Б. Й.* Нелінійні ультрапараболічні рівняння та варіаційні нерівності. – Київ: Наук. думка, 2017. – 280 с.
11. *Эйдельман С. Д.* Фундаментальные матрицы решений общих параболических систем // Докл. АН СССР. – 1958. – **120,** № 5. – С. 980–983.
12. *Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях параболических систем. II // Мат. сб. – 1961. – **53,** № 1. – С. 73–126.
13. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 443 с.
14. *Citti G., Pascucci A., Polidoro S.* On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equations arising in mathematical finance // Differ. Integral Equat. – 2001. – **14**, No. 6. – P. 701–738.
15. *Di Francesco M., Pascucci A.* A continuous dependence result for ultraparabolic equations in option pricing // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – **336,** No. 2. – P. 1026–1041. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.031.

16. *Di Francesco M., Pascucci A.* On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Appl. Math. Res. Express. – 2005. – **2005,** No. 3. – P. 77–116. – https://doi.org/10.1155/AMRX.2005.77.
17. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D.* On solutions of parabolic equations from families of Banach spaces dependent on time // In: Differential Operators and Related Topics. Operator Theory: Advances and Applications / Adamyan V. M. et al. (eds). – Basel: Birkhäuser, 2000. – Vol. 117. – P. 111–125. – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8403-7_10.
18. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.) – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7844-9.
19. *Foschi P., Pascucci A.* Kolmogorov equations arising in finance: direct and inverse problems // Lect. Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. Universita degli Studi della Basilicata. – 2007. – **VI.** – P. 145–156.
20. *Ivasishen S. D., Medynsky I. P.* The Fokker–Planck–Kolmogorov equations for some degenerate diffusion processes // Theory Stoch. Process. – 2010. – **16(32),** No. 1. – C. 57–66.
21. *Ivasyshen S. D., Medynsky I. P.* On applications of the Levi method in the theory of parabolic equations // Мат. студії. – 2017. – **47**, № 1. – C. 33–46. – https://doi.org/10.15330/ms.47.1.33-46.
22. *Kolmogoroff A.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math. – 1934. – **35**, No. 1. – P. 116–117. – https://doi.org/10.2307/1968123.
23. *Lanconelli E., Polidoro S.* On a class of hypoelliptic evolution operators // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. Partial Diff. Eqs. – 1994. – **52**, No. 1. – P. 29–63.
24. *Pascucci A.* Kolmogorov equations in physics and in finance // In: Elliptic and Parabolic Problems. – Basel: Birkhauser, 2005. – Ser. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications / Ed. H. Brezis. – Vol. 63. – P. 313–324.
25. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // Le Matematiche. – 1994. – **49**, No. 1. – P. 53–105.

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛМОГОРОВА С ДВУМЯ ГРУППАМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ВЫРОЖДЕНИЯ

Для неоднородного ультрапараболического уравнения типа Колмогорова с двумя группами пространственных переменных вырождения установлены некоторые свойства фундаментального решения и порождаемого ним объёмного потенциала, а также приведены теоремы об интегральных представлениях решений и корректной разрешимости задачи Коши в классах весовых функций.

***Ключевые слова**: ультрапараболическое уравнение типа Колмогорова, фундаментальное решение задачи Коши, объёмный потенциал, интегральные представления решений, корректная разрешимость задачи Коши.*

CORRECT SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM AND INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS FOR ULTRAPARABOLIC KOLMOGOROV-TYPE EQUATIONS WITH TWO GROUPS OF SPATIAL VARIABLES OF DEGENERATION

Some properties of the classical fundamental solution of the Cauchy problem for nonhomogeneous ultraparabolic Kolmogorov-type equation with two groups of spatial variables of degeneration and generated by it the volume potential are established. Theorems on integral representations of solutions and correct solvability of the Cauchy problem are presented. These results are obtained in appropriate classes of weight functions.

***Key words:** ultraparabolic equations of the Kolmogorov type, fundamental solution of the Cauchy problem, volume potential, integral representations of solutions, correct solvability of the Cauchy problem.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
21.10.18