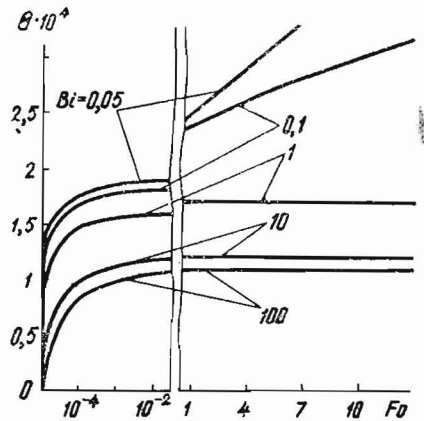


По формуле (6) произведены расчеты температурного поля в пластине из иттрий-алюминиевого граната ($Y_3Al_5O_{12}$), покрытой тонким алюминиевым слоем, на границе раздела слоев в точке с координатами $\varphi=0, \frac{r}{R}=0,5$ при $R=3,25 \cdot 10^{-2}$ м, $z_1=5 \cdot 10^{-3}$ м, $z_2-z_1=100$ нм, $k=3 \cdot 10^8$ м⁻².

Согласно [5, 6], $K_\lambda=6,28 \cdot 10^{-2}$, $K_a=5,43 \cdot 10^{-2}$. Результаты расчетов представлены в виде графиков на рисунке. С ростом теплоотдачи с поверхности $z=0$ кусочно-однородной пластины температура уменьшается и быстрее достигает своего стационарного значения.



1. Галицин А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. — Киев: Наук. думка, 1972.—278 с.
2. Коляно Ю. М., Попович В. С. Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой. — Физ.-хим. Механика материалов, 1976, № 2, с. 108—112.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высш. шк., 1967.—596 с.
4. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. — М.: Машиностроение, 1973.—659 с.
5. Таблицы физических величин: Справочник / Под ред. И. К. Кикоина. — М.: Атомиздат, 1976.—1005 с.
6. Robertson J. M., Van Tol M. W., Heynen J. P. H. et al. Thin single crystalline phosphor layers grown by liquid phase epitaxy. — Phil. J. Res., 1980, 35, p. 354—371.

Получено 08.02.84

УДК 539.3

И. С. Костенко

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СИСТЕМОЙ ПРОДОЛЬНЫХ ТЕРМОИЗОЛИРОВАННЫХ РАЗРЕЗОВ

Поскольку детали и элементы конструкций оболочечного типа при их изготовлении и эксплуатации зачастую подвергаются тепловым воздействиям, то важный практический интерес представляют исследования поведения температурного поля в тонких оболочках. Для бесконечной цилиндрической оболочки с одним разрезом подобные исследования проведены в работе [2]. В настоящей работе рассматривается замкнутая изотропная цилиндрическая оболочка длины $2l_1$, ослабленная системой периодически расположенных продольных термоизолированных разрезов, находящаяся в условиях переменной температуры и теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона.

Выберем начало координат в центре разреза $\beta=0, |\alpha| \leq \alpha_0$ ($\alpha_0 = l/R$; R — радиус оболочки; l — полудлина разреза). Рассмотрим случай, когда граничные условия на его берегах задаются в виде

$$\partial_2 T_i^+ (\alpha, \beta) = \partial_2 T_i^- (\alpha, \beta) = -\partial_2 T_i^0 (\alpha, \beta) = q_i (\alpha), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где $T_i (\alpha, \beta)$ — значения интегральных характеристик возмущенного температурного поля в оболочке, ослабленной разрезами; $T_i^0 (\alpha, \beta)$ — значения соответствующих характеристик в сплошной оболочке.

Поскольку решение задачи теплопроводности для сплошной цилиндрической оболочки определяется известными методами [3], то в дальнейшем оно предполагается заданным. Остановимся на рассмотрении

возмущенного температурного поля, для определения интегральных характеристик которого имеем уравнения

$$\begin{aligned} L_{11}T_1(\alpha, \beta) - L_{12}T_2(\alpha, \beta) &= F_1(\alpha, \beta), \\ L_{21}T_1(\alpha, \beta) - L_{22}T_2(\alpha, \beta) &= F_2(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11} &= \Delta - R^2 h^{-2} \mu_1; & L_{12} &= R^2 h^{-2} (\mu_2 - 2\hat{k}h); \\ L_{21} &= -3R^2 h^{-2} \mu_2^*; & L_{22} &= \Delta - 3R^2 h^{-2} (1 + \mu_1); \end{aligned}$$

$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2; \quad \partial_1 = \partial/\partial\alpha; \quad \partial_2 = \partial/\partial\beta; \quad F_i(\alpha, \beta) = \gamma_i(\alpha) \delta_{2\delta}(\beta);$$

$\gamma_i(x) = \frac{1}{2} [T_i^+(\alpha, 0) - T_i^-(\alpha, 0)]$; $i = 1, 2$; $\delta(\beta)$ — функция Дирака; знаками $+$ и $-$ отмечены значения соответствующей величины на берегах разреза $\beta = \beta + 0$ и $\beta = \beta - 0$; h — полутолщина оболочки;

$$\mu_{1,2} = \frac{h}{2} (\mu^+ \pm \mu^-); \quad \mu_2^* = \mu_2 - 2\hat{k}h;$$

$\hat{k} = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$ — средняя кривизна срединной поверхности; k_1, k_2 — главные ее кривизны; μ^+, μ^- — значения относительных коэффициентов теплообмена на поверхностях оболочки $\gamma = \pm h$.

При этом на торцах оболочки интегральные характеристики должны удовлетворять однородным граничным условиям

$$\partial_1 T_i = h_1 T_i|_{\alpha=-a}, \quad \partial_1 T_i = -h_2 T_i|_{\alpha=a}. \quad (3)$$

В общем случае система уравнений (2) взаимосвязана, но если решение искать в виде [4]

$$T_1(\alpha, \beta) = \frac{\lambda_2 \Psi_1 - \lambda_1 \Psi_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad T_2(\alpha, \beta) = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad (4)$$

то для определения функций $\Psi_i(\alpha, \beta)$ ($i = 1, 2$) получим два независимых уравнения

$$\Delta \Psi_i(\alpha, \beta) - c_i^2 \Psi_i(\alpha, \beta) = 2f_i(\alpha, \beta), \quad (5)$$

где

$$c_i^2 = R^2 h^{-2} (\mu_1 + 3\mu_2 \lambda_i); \quad f_i = F_1 + \lambda_i F_2;$$

λ_i — корни уравнения $3\mu_2 \lambda^2 - (3 + 2\mu_1)\lambda - \mu_2^* = 0$.

Решение уравнений (5) строится в виде суммы частного решения и общего решения однородного уравнения. Для определения частного решения необходимо найти фундаментальное решение оператора $D = \Delta - c_i^2$, а затем воспользоваться операцией свертки, а при построении однородного решения неизвестные постоянные определяются из граничных условий (3).

Удовлетворяя далее граничным условиям на берегах разреза (1) и учитывая при этом, что температурное поле в сплошной оболочке известно, приходим к решению системы сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных величин $\gamma_i(\alpha)$:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 \gamma_i(u) \left\{ \frac{a_{ij}}{u-s} + K_{ij}(s, u) \right\} du = q_i(s), \quad |s| < 1, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = 0.$$

Ядра системы уравнений (6) являются непрерывными функциями для всего множества действительных значений s, u и имеют вид

$$\begin{aligned} K_{11}(s, u) &= \frac{1}{s-u} - \frac{k\alpha_0}{2} \operatorname{cth} \frac{kz}{2} - \frac{k\alpha_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \lambda_2 (g_{1n} - g_{0n}) - \\ &\quad - \lambda_1 (g_{2n} - g_{0n}) \} k^2 n^2 + K_{11}^0(s, u), \end{aligned}$$

$$K_{12}(s, u) = -\frac{k\alpha_0\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{n=1}^{\infty} k^2 n^2 (g_{1n} - g_{2n}) + K_{12}^0(s, u),$$

$$K_{21}(s, u) = -\frac{k\alpha_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{n=1}^{\infty} k^2 n^2 (g_{2n} - g_{1n}) + K_{21}^0(s, u),$$

$$K_{22}(s, u) = \frac{1}{s-u} - \frac{k\alpha_0}{2} \operatorname{cth} \frac{kz}{2} - \frac{k\alpha_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{n=1}^{\infty} k^2 n^2 \{ \lambda_2 (g_{2n} - g_{0n}) - \lambda_1 (g_{1n} - g_{0n}) \} + K_{22}^0(s, u),$$

где

$$g_{0n} = \frac{1}{k^2 n^2} (e^{-kn|z|} - 1) \operatorname{sgn} z; \quad g_{in} = \frac{1}{c_{in}^2} (e^{-c_{in}|z|} - 1) \operatorname{sgn} z;$$

$$c_{in} = \sqrt{k^2 n^2 + c_i^2}; \quad z = \alpha_0 (s - u);$$

$K_{ij}^0(s, u)$ ($i, j = 1, 2$) — регулярные члены ядер, учитывающие теплообмен с внешней средой на торцах оболочки.

Решение полученной системы сингулярных интегральных уравнений строится численно при использовании метода механических квадратур [1].

Если коэффициенты теплообмена на поверхностях оболочки равны между собой ($\mu_2 = 0$) и, кроме того, значения температуры внешней среды на поверхностях $\gamma = \pm h$ равны между собой, т. е. $t_c^+ = t_c^-$, то можно предположить, что температура оболочки постоянна по толщине и, следовательно, $T_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) сводится к одному уравнению, из которого можно определить функцию $T_1(\alpha, \beta)$.

Пусть замкнутая цилиндрическая оболочка, на торцах которой отсутствует теплоотдача ($h_1 = h_2 = 0$), ослабленная системой продольных термоизолированных разрезов, омывается внешней средой, температура которой описывается плоским полем $t_c^+ = t_c^- = t_0 \sin k\beta$.

В этом случае имеем следующее интегральное уравнение для определения $T_1(\alpha, \beta)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \gamma_1'(u) \left[\frac{1}{s-u} + k\alpha_0 K_{11}(s, u) \right] du = q_0(s). \quad (7)$$

Здесь

$$K_{11}(s, u) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{kz}{2} - \frac{1}{kz} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [f_{1n}(z) - f_{0n}(z)] \operatorname{sgn} z + \Psi_n(s, u) \};$$

$$f_{1n}(z) = \left(\frac{kn}{\lambda_n} \right)^2 (e^{-\lambda_n|z|} - 1); \quad f_{0n}(z) = e^{-kn|z|} - 1;$$

$$\Psi_n(s, u) = \left(\frac{kn}{\lambda_n} \right)^2 \operatorname{sh}^{-1} 2\lambda_n \alpha_1 [\operatorname{sh} \lambda_n \alpha_0 (s + u) - e^{-2\lambda_n \alpha_1} \operatorname{sh} \lambda_n z];$$

$$\lambda_n = \sqrt{k^2 n^2 + c_1^2}; \quad z = \alpha_0 (s - u); \quad q_0 = \frac{c_1^2 k}{k^2 + c_1^2} t_0 \sin k\beta.$$

Решение уравнения (7) строилось при помощи метода механических квадратур [1]. Проведен численный анализ изменения величины $\gamma_1(0)/q_0$ в зависимости от параметра μ_1 для различного числа разрезов. При расчете принимались следующие значения параметров: $\alpha_0 = 0,5$, $\alpha_1 = 0,55$, $R = 0,03$ м, $h = 0,0015$ м. Как следует из рис. 1, величина $\gamma_1(0)/q_0$ с увеличением теплоотдачи с боковых поверхностей уменьшается и кривые, соответствующие различному количеству разрезов, сближаются между собой.

На рис. 2 приведены графики, характеризующие изменение функции $T_1(\alpha, \beta)/q_0$ при $k = 1$ (сплошные линии) и $k = 11$ (штриховые линии)

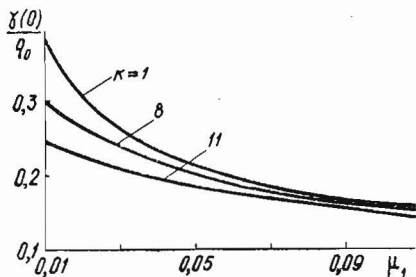


Рис. 1.

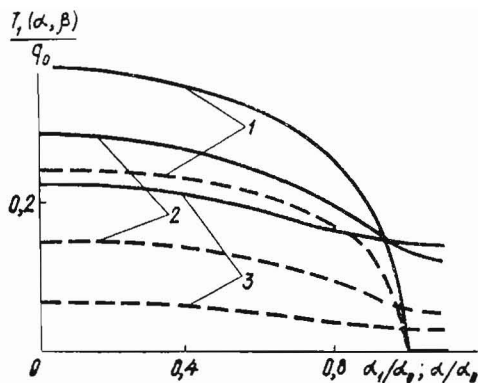


Рис. 2.

для параметров оболочки: $R = 0,03$ м, $h = 0,0015$ м, $\alpha_0 = 0,5$, $\alpha_1 = 0,55$, $\mu_1 = 0,01$, $\beta = 0$, $\beta = 0,1$, $\beta = 0,2$ (значение β для кривых 1—3 соответственно). Как следует из рис. 2, экстремальное значение функции $T_1(\alpha, \beta)/q_0$ достигается при $\alpha = 0$, $\beta = 0$. При этом с увеличением количества разрезов значение $T_1(\alpha, \beta)/q_0$ уменьшается.

1. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. — М.: Наука, 1973. — 303 с.
2. Осадчий В. А. Задача теплопроводности для замкнутой цилиндрической оболочки с поперечной термозолированной трещиной при наличии теплообмена. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 5, с. 436—440.
3. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. — Киев: Наук. думка, 1978. — 343 с.
4. Швец Р. Н., Павленко В. Д. О циклически симметричных задачах теплопроводности для пластин и оболочек с отверстиями при наличии теплообмена. — Инж.-физ. журн., 1972, 23, № 5, с. 890—897.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 25.04.84

УДК 550.837.6

В. И. Гордиенко, Я. П. Кулыныч

ВТОРИЧНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Определение аномального электромагнитного поля (ЭМП) бесконечного цилиндра, возбуждаемого дипольным источником, является необходимым условием для разработки принципов построения активных электромагнитных систем обнаружения трасс и контроля глубин залегания инженерных коммуникаций (ИК) и протяженных включений [1]. Известное [5] решение задачи возбуждения бесконечного цилиндра дипольным источником в безграничной среде является достаточным для обоснования принципов построения систем поиска подземных ИК. При обнаружении подводных ИК диполь и цилиндр расположены в высокопроводящей среде (вода), электродинамические параметры которой резко отличаются от электродинамических параметров воздуха и дна. Поэтому является актуальным исследование вторичного ЭМП бесконечно длинного цилиндра, возбуждаемого произвольно ориентированным электрическим диполем в трехслойной среде (рис. 1). На рис. 1 обозначено: $x = l$ и $x = -h$ — плоские бесконечные границы раздела сред; a — радиус цилиндра; в точку $M(x_0, y_0, z_0)$ помещен произвольно ориентированный электрический диполь. Используя метод Ерофеевко [2], указанную задачу можно свести к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.