

$$s_L = s_L(T_L, \rho_L, \varphi_L^{(k)}), c_L^{(k)} = c_L^{(k)}(T_L, \rho_L, \varphi_L^{(m)}),$$

уравнений для тензоров вязких напряжений и моментных напряжений

$$\hat{\sigma}_L^* = \eta_L^{\parallel} \hat{\gamma}_L^{\parallel} + \eta_L^{\perp} \hat{\gamma}_L^{\perp}, \hat{\mu}_L^* = \lambda_L^{\parallel} \hat{x}_L^{\parallel} + \lambda_L^{\perp} \hat{x}_L^{\perp}, \quad (15)$$

условий обмена

$$\begin{aligned} \vec{N}_{ij} \cdot \vec{J}_{ij}^{(q)} &= H_{ij}^{(q)} (T_{ij} - T_L), \quad \vec{N}_{ij} \cdot \vec{J}_{ij}^{(k)} = H_{ij}^{(k)} (\varphi_{ij}^{(k)} - \varphi_L^{(k)}), \\ \vec{N}_{ij} \cdot \hat{\sigma}_{ij}^{\parallel} &= \kappa_{ij}^{\parallel} (\vec{v}_L - \vec{v}_{ij})^{\parallel}, \quad \vec{N}_{ij} \cdot \hat{\mu}_{ij}^{\parallel} = \nu_{ij}^{\parallel} (\vec{\omega}_L - \vec{\omega}_{ij})^{\parallel}, \\ \vec{N}_{ij} \cdot \hat{\sigma}_{ij}^{\perp} &= \kappa_{ij}^{\perp} (\vec{v}_L - \vec{v}_{ij})^{\perp}, \quad \vec{N}_{ij} \cdot \hat{\mu}_{ij}^{\perp} = \nu_{ij}^{\perp} (\vec{\omega}_L - \vec{\omega}_{ij})^{\perp}, \\ Y_{ij} &= \zeta_{ij} (\vec{v}_L - \vec{v}_{ij}) \cdot \vec{N}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i < j. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь, кроме введенных выше, используются следующие обозначения:  $\sum_{i,j=1}^3$  означает  $\sum_{i,j=1}^3$ ;  $\beta_{ij} = \rho_{ij} (\vec{v}_{ij} - \vec{v}_L) \cdot \vec{N}_{ij}$ ;  $\vec{N}_{ij}$  — внешняя нормаль

к кривой  $L$ , лежащая в касательной плоскости к поверхности  $\Sigma_{ij}$ ;  $\hat{\gamma}_L = \vec{\nabla}_L \vec{v}_L + \vec{\lambda} \vec{\lambda} \times \vec{\omega}_L$ ;  $\hat{x}_L = \vec{\nabla}_L \vec{\omega}_L$ ;  $\vec{\nabla}_L$  — одномерный набла-оператор;  $\vec{\lambda}$  — единичная касательная к  $L$ ; тензоры  $\hat{\sigma}_L$ ,  $\hat{\mu}_L$ ,  $\hat{\gamma}_L$ ,  $\hat{x}_L$  имеют следующую структуру:  $\hat{\sigma}_L = \hat{\sigma}_L^{\parallel} + \hat{\sigma}_L^{\perp} = \sigma_L^{(\lambda)\lambda} \vec{\lambda} \vec{\lambda} + \hat{\sigma}_L^{\perp}$ ;  $\eta_L^{\parallel}$ ,  $\eta_L^{\perp}$ ,  $\lambda_L^{\parallel}$ ,  $\lambda_L^{\perp}$  — одномерные коэффициенты вязкости; физический смысл остальных величин и коэффициентов в системе (9)—(16) совпадает с физическим смыслом соответствующих величин в системе уравнений, полученной в п. 1.

1. Аэро Э. Л., Бульгин А. Н., Кувшинский Е. В. Асимметричная гидромеханика. — Прикл. математика и механика, 1965, 29, № 2, с. 297—308.
2. Повстенко Ю. З. Условия на линии контакта трех сред. — Там же, 1981, 45, № 5, с. 919—923.
3. Повстенко Ю. З. Общие уравнения баланса на поверхности раздела двух сред и на линии раздела трех сред. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1983, вып. 17, с. 41—43.
4. Шоркин В. С. Об одной модели движения жидкости вблизи твердой поверхности. — Журн. прикл. механики и техн. физики, 1981, № 3, с. 70—75.
5. Georgescu L. A Navier-Stokes type equation for the phase interface of a liquid. — Surface Sci., 1969, 15, N 1, p. 177—181.
6. Georgescu L. Phenomenological equations for the multicomponent phase interface. — Rev. roum. Phys., 1975, 20, N 8, p. 781—790.
7. Jenkins J. T., Barratt P. J. Interfacial effects in the static theory of nematic liquid crystals. — Quart. J. Mech. Appl. Math., 1974, 27, N 1, p. 111—127.
8. Kovac J. Non-equilibrium thermodynamics of interfacial systems. 2. Boundary conditions for fluids with spin. — Physica A, 1981, 107, N 2, p. 280—298.

Ин-т прикладных проблем  
механики и математики АН УССР,  
Львов

Получено 13.06.84

УДК 539.377

Л. М. Затварская

### ПРОСТРАНСТВЕННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим отнесенную к цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  двухслойную круглую пластину радиуса  $R$ , нагреваемую по поверхности  $z=z_2$  смещенным на расстояние  $d$  относительно ее центра вдоль линии  $\varphi=0$  потоком тепла, интенсивность которого изменяется по закону Гаусса. Поверхность пластины  $r=R$  предполагается теплоизолированной, а через поверхность  $z=0$  осуществляется теплообмен с

внешней средой по закону Ньютона. Между слоями пластины  $z = z_1$  осуществляется идеальный тепловой контакт.

Для определения нестационарного пространственного температурного поля в пластине имеем уравнение теплопроводности [2]

$$Lt = \left[ \frac{1}{a_1} + \left( \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) S_-(z - z_1) \right] \frac{\partial t}{\partial \tau} + \left( 1 - \frac{1}{K_\lambda} \right) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=z_1+0} \delta_-(z - z_1) \quad (1)$$

и краевые условия

$$\begin{aligned} t|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad \lambda_1 \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha_1 t|_{z=0}, \\ \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = q_0 (1 - \gamma) e^{-k(r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \quad K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2};$$

$q_0$  — удельная мощность падающего потока;  $\gamma$  — коэффициент отражения;  $k$  — коэффициент сосредоточенности;  $a_1$  — коэффициент теплоотдачи с поверхности  $z = 0$ ;  $z_1$  — координата границы раздела слоев пластины;  $\lambda_i$ ,  $a_i$ ,  $i = 1, 2$ , — соответственно коэффициенты теплопроводности и теплопроводности слоев пластины;  $S_-(z - z_1) = \begin{cases} 1, & z \geq z_1, \\ 0, & z < z_1. \end{cases}$

Применив к уравнению (1) и условиям (2) конечное интегральное преобразование Фурье по  $\varphi$ , конечное преобразование Ханкеля по  $r$  и преобразование Лапласа по  $\tau$  [1, 3], получим

$$\frac{d^2 \hat{t}}{dz^2} - [x_1^2 + (x_2^2 - x_1^2) S_-(z - z_1)] \hat{t} = \left( 1 - \frac{1}{K_\lambda} \right) \frac{d\hat{t}}{dz} \Big|_{z=z_1+0} \delta_-(z - z_1), \quad (3)$$

$$\lambda_1 \frac{d\hat{t}}{dz} \Big|_{z=0} = \alpha_1 \hat{t} \Big|_{z=0}, \quad \lambda_2 \frac{d\hat{t}}{dz} \Big|_{z=z_2} = \frac{2q_0(1-\gamma)}{s} e^{-kd^2} Z_{mn}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r t K_\gamma(\varphi) J_n \left( \mu_{mn} \frac{r}{R} \right) e^{-s\tau} d\varphi dr d\tau; \\ Z_{mn} &= \int_0^1 r e^{-kr^2} I_n(2krd) J_n \left( \mu_{mn} \frac{r}{R} \right) dr; \end{aligned}$$

$$x_i = \sqrt{\frac{s}{a_i} + \frac{\mu_{mn}^2}{R^2}}, \quad i = 1, 2; \quad K_\gamma(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \cos n\varphi, & \gamma = 2n, \\ \frac{1}{\pi} \sin n\varphi, & \gamma = 2n - 1; \end{cases}$$

$\mu_{mn}$  — положительные корни характеристического уравнения

$$J'_n(\mu) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Решение краевой задачи (3), (4) на основе [2,4] имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{2q_0(1-\gamma)}{\lambda_2 s} Z_{mn} \left[ (1 - S_-(z - z_1)) \left( \operatorname{ch} x_1 z + \frac{\alpha_1 \operatorname{sh} x_1 z}{\lambda_1 x_1} \right) + \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{\operatorname{sh} x_2 (z - z_1)}{x_2} K_\lambda \left\{ x_1 \operatorname{sh} x_1 z_1 + \frac{\alpha_1}{\lambda_1} \operatorname{ch} x_1 z_1 \right\} + \operatorname{ch} x_2 (z - z_1) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left\{ \operatorname{ch} x_1 z_1 + \frac{\alpha_1 \operatorname{sh} x_1 z_1}{\lambda_1 x_1} \right\} \right] S_-(z - z_1) \right] \left\{ x_2 \left[ \operatorname{ch} x_1 z_1 + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\alpha_1 \operatorname{sh} x_1 z_1}{\lambda_1 x_1} \right] \operatorname{sh} x_2 (z_2 - z_1) + K_\lambda \left[ x_1 \operatorname{sh} x_1 z_1 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha_1}{\lambda_1} \operatorname{ch} \alpha_1 z_1 \left] \operatorname{ch} \alpha_2 (z_2 - z_1) \right\}^{-1}. \quad (5)$$

Осуществив в (5) переход к оригиналам, получим искомое выражение для температуры, записанное в безразмерных переменных;

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{i\lambda_2}{4q_0 R (1-\gamma)} = e^{-kd^2} \left\langle \int_0^1 u e^{-kR^2 u^2} I_0(2kdRu) du \times \right. \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \varphi(z, \mu_{mn})|_{\mu_{mn}=0} + Z_1 \sum_{k=1}^{\infty} \psi(z, \eta_{mnk}, \mu_{mn})|_{\mu_{mn}=0} \times \right. \\ &\times \exp\left(-\frac{Fo}{Z_1^2} \eta_k^2\right) \left. \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left\langle \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_{mn}^2}{\mu_{mn}^2 - n^2} \frac{J_n\left(\mu_{mn} \frac{r}{R}\right)}{J_n^2(\mu_{mn})} \times \right. \\ &\times \int_0^1 u e^{-kR^2 u^2} I_n(2kdRu) J_n(\mu_{mn}u) du \left. \right\} \left\{ \varphi(z, \mu_{mn}) + 2Z_1 \times \right. \\ &\times \left. \sum_{k=1}^{\infty} \psi(z, \eta_{mnk}, \mu_{mn}) \exp\left(-\frac{Fo}{Z_1^2} \eta_{mnk}^2 - Fo \mu_{mn}^2\right) \right\rangle \cos n\varphi \rangle, \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(z, \mu_{mn}) &= [(1 - S_-(Z - Z_1)) (\mu_{mn} \operatorname{ch} \mu_{mn} Z + \operatorname{Bi} \operatorname{sh} \mu_{mn} Z) + \\ &+ [K_\lambda \operatorname{sh} \mu_{mn} (Z - Z_1) \{ \mu_{mn} \operatorname{sh} \mu_{mn} Z_1 + \operatorname{Bi} \operatorname{ch} \mu_{mn} Z_1 \} + \\ &+ \operatorname{ch} \mu_{mn} (Z - Z_1) \{ \mu_{mn} \operatorname{ch} \mu_{mn} Z_1 + \operatorname{Bi} \operatorname{sh} \mu_{mn} Z_1 \}] S_-(Z - Z_1)] \times \\ &\times \mu_{mn}^{-1} \{ \operatorname{sh} \mu_{mn} (Z - Z_1) [ \mu_{mn} \operatorname{ch} \mu_{mn} Z_1 + \operatorname{Bi} \operatorname{sh} \mu_{mn} Z_1 ] + \\ &+ K_\lambda \operatorname{ch} \mu_{mn} (Z - Z_1) [ \mu_{mn} \operatorname{sh} \mu_{mn} Z_1 + \operatorname{Bi} \operatorname{ch} \mu_{mn} Z_1 ] \}^{-1}; \\ \psi(z, \eta_{mnk}, \mu_{mn}) &= \eta_{mnk}^2 \left\langle K_a^{-\frac{1}{2}} \vartheta_{mnk} \{ (1 - S_-(Z - Z_1)) (\eta_{mnk} \times \right. \\ &\times \cos \eta_{mnk} K + \operatorname{Bi} Z_1 \sin \eta_{mnk} K_z) + \cos \vartheta_{mnk} (K_z - 1) [\eta_{mnk} \cos \eta_{mnk} + \\ &+ \operatorname{Bi} Z_1 \sin \eta_{mnk}] S_-(Z - Z_1) \} - \eta_{mnk} K_\varepsilon \sin \vartheta_{mnk} (K_z - 1) \{ \eta_{mnk} \sin \eta_{mnk} - \\ &- \operatorname{Bi} Z_1 \cos \eta_{mnk} \} S_-(Z - Z_1) \rangle (\eta_{mnk}^2 + \mu_{mn}^2 Z_1^2)^{-1} \left\{ K_a^{-\frac{1}{2}} \times \right. \\ &\times \sin \vartheta_{mnk} (K_z - 1) [\sin \eta_{mnk} \{ K_a^{-1} \vartheta_{mnk}^2 (\eta_{mnk}^2 + \operatorname{Bi} Z_1) + \eta_{mnk}^2 \times \\ &\times [K_\lambda (K_{z_2} - 1) \eta_{mnk}^2 - \operatorname{Bi} Z_1] \} - \eta_{mnk} \cos \eta_{mnk} \{ \eta_{mnk}^2 + \operatorname{Bi} Z_1 \times \\ &\times [K_a^{-1} \vartheta_{mnk}^2 + K_\lambda (K_{z_2} - 1) \eta_{mnk}^2] \} - K_a^{-\frac{1}{2}} \vartheta_{mnk} \eta_{mnk}^2 \times \\ &\times \cos \vartheta_{mnk} (K_{z_2} - 1) [\eta_{mnk} \cos \eta_{mnk} \{ K_\lambda + K_a (K_{z_2} - 1) \} + \\ &+ \sin \eta_{mnk} \{ K_\lambda + \operatorname{Bi} Z_1 (K_\lambda + K_a (K_{z_2} - 1)) \}] \} \}^{-1}; \\ Z &= \frac{z}{R}; \quad Z_i = \frac{z_i}{R}, \quad i = 1, 2; \quad K_a = \frac{a_1}{a_2}; \quad K_{z_2} = \frac{z_2}{z_1}; \\ K_z &= \frac{z}{z_1}; \quad K_\varepsilon = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{n_2}{n_1}}, \quad \operatorname{Bi} = \frac{\alpha_1}{\lambda_1} R; \quad Fo = \frac{a_1 \tau}{R^2}; \end{aligned}$$

$$\vartheta_{mnk} = \sqrt{K_a \eta_{mnk}^2 + Z_1^2 \mu_{mn}^2 (K_a - 1)}; \quad \varepsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0, \\ 1, & n = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

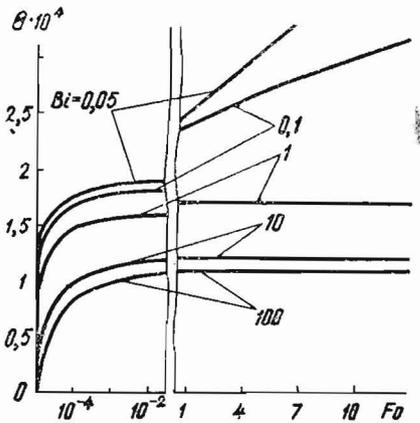
$\eta_{mnk}, \eta_k$  — соответственно положительные корни уравнений

$$\vartheta_{mn} (\eta_{mn} \cos \eta_{mn} + \operatorname{Bi} Z_1 \sin \eta_{mn}) \sin \vartheta_{mn} (K_{z_2} - 1) + \eta_{mn} K_\lambda \times \\ \times (\eta_{mn} \sin \eta_{mn} - \operatorname{Bi} Z_1 \cos \eta_{mn}) \cos \vartheta_{mn} (K_{z_2} - 1) = 0.$$

$$[\vartheta_{mn} (\eta_{mn} \cos \eta_{mn} + \operatorname{Bi} Z_1 \sin \eta_{mn}) \sin \vartheta_{mn} (K_{z_2} - 1) + \eta_{mn} K_\lambda \times \\ \times (\eta_{mn} \sin \eta_{mn} - \operatorname{Bi} Z_1 \cos \eta_{mn}) \cos \vartheta_{mn} (K_{z_2} - 1)]|_{\mu_{mn}=0} = 0.$$

По формуле (6) произведены расчеты температурного поля в пластине из иттрий-алюминиевого граната ( $Y_3Al_5O_{12}$ ), покрытой тонким алюминиевым слоем, на границе раздела слоев в точке с координатами  $\varphi=0, \frac{r}{R}=0,5$  при  $R=3,25 \cdot 10^{-2}$  м,  $z_1=5 \cdot 10^{-3}$  м,  $z_2-z_1=100$  нм,  $k=3 \cdot 10^8$  м<sup>-2</sup>.

Согласно [5, 6],  $K_\lambda=6,28 \cdot 10^{-2}$ ,  $K_a=5,43 \cdot 10^{-2}$ . Результаты расчетов представлены в виде графиков на рисунке. С ростом теплоотдачи с поверхности  $z=0$  кусочно-однородной пластины температура уменьшается и быстрее достигает своего стационарного значения.



1. Галицин А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. — Киев: Наук. думка, 1972.—278 с.
2. Коляно Ю. М., Попович В. С. Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой. — Физ.-хим. Механика материалов, 1976, № 2, с. 108—112.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высш. шк., 1967.—596 с.
4. Образцов И. Ф., Онанов Г. Г. Строительная механика скошенных тонкостенных систем. — М.: Машиностроение, 1973.—659 с.
5. Таблицы физических величин: Справочник / Под ред. И. К. Кикоина. — М.: Атомиздат, 1976.—1005 с.
6. Robertson J. M., Van Tol M. W., Heynen J. P. H. et al. Thin single crystalline phosphor layers grown by liquid phase epitaxy. — Phil. J. Res., 1980, 35, p. 354—371.

Получено 08.02.84

УДК 539.3

И. С. Костенко

### ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СИСТЕМОЙ ПРОДОЛЬНЫХ ТЕРМОИЗОЛИРОВАННЫХ РАЗРЕЗОВ

Поскольку детали и элементы конструкций оболочечного типа при их изготовлении и эксплуатации зачастую подвергаются тепловым воздействиям, то важный практический интерес представляют исследования поведения температурного поля в тонких оболочках. Для бесконечной цилиндрической оболочки с одним разрезом подобные исследования проведены в работе [2]. В настоящей работе рассматривается замкнутая изотропная цилиндрическая оболочка длины  $2l_1$ , ослабленная системой периодически расположенных продольных термоизолированных разрезов, находящаяся в условиях переменной температуры и теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона.

Выберем начало координат в центре разреза  $\beta=0, |\alpha| \leq \alpha_0$  ( $\alpha_0 = l/R$ ;  $R$  — радиус оболочки;  $l$  — полудлина разреза). Рассмотрим случай, когда граничные условия на его берегах задаются в виде

$$\partial_2 T_i^+ (\alpha, \beta) = \partial_2 T_i^- (\alpha, \beta) = -\partial_2 T_i^0 (\alpha, \beta) = q_i (\alpha), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где  $T_i (\alpha, \beta)$  — значения интегральных характеристик возмущенного температурного поля в оболочке, ослабленной разрезами;  $T_i^0 (\alpha, \beta)$  — значения соответствующих характеристик в сплошной оболочке.

Поскольку решение задачи теплопроводности для сплошной цилиндрической оболочки определяется известными методами [3], то в дальнейшем оно предполагается заданным. Остановимся на рассмотрении