несобственная постоянная матрица, приводящая матрицу $P_{-1}^{(k)}$ к нормальной жордановой форме) к виду

$$\frac{dX^{(k)}}{ds} + \left(\frac{1}{s} Q_{-1}^{(k)} + Q_0^{(k)}\right) X^{(k)} = 0.$$

Показано, что достаточно принять

$$T^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t_1 \operatorname{tg}\varphi & t_2 \operatorname{tg}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{tg}\varphi & 0 & 0 & t_3 & t_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_0^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & -t_5 & 0 & t_1 \operatorname{tg}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_7 & 0 & 0 & t_5 \end{pmatrix},$$

где

$t_1 = G_k(1 + \nu_k)$; $t_2 = -G_k(1 - \nu_k)$; $t_3 = D_k(\mu_k - \nu_k)$; $t_4 = -D_k(\mu_k + \nu_k)$;

$\mu_k = \sqrt{2\nu_k^2 - 1}$; $t_5 = (\mu_k - \nu_k)/2\mu_k$; $t_6 = D_k(\mu_k - \nu_k)^2/2\mu_k$; $t_7 = -1/2D_k\mu_k$.

При этом матрица $Q_{-1}^{(k)}$ будет диагональной:

$$Q_{-1}^{(k)} = \{0,\ 0,\ -1,\ 1,\ -\mu_k,\ \mu_k\}.$$

1. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949.— 782 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966.—576 с.
3. *Попов Г. Я.* К решению краевых задач механики и математической физики. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1978, 31, № 2, с. 34—47.

Одесский государственный ун-т им. И. И. Мечникова Получено 06.07.84

УДК 532.5

Ю. З. Повстенко

О ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТАХ В МОМЕНТНЫХ ЖИДКОСТЯХ

В настоящее время разработаны различные модели жидкостей, существенной чертой которых являются наличие моментных напряжений и несимметричность тензора напряжений [1]. Построение таких моделей связано как с внутренним развитием теории, так и с приложениями к жидким кристаллам, различным биологическим объектам и т. д. При описании поверхностных эффектов в таких средах естественно исходить из модели двумерного континуума, наделенного собственными физико-механическими характеристиками, в частности несимметричным двумерным тензором напряжений и двумерным тензором моментных напряжений. Кроме того, отмечалось [4], что при уменьшении толщины слоя жидкости, безмоментной в обычных условиях, моментные эффекты могут стать существенными.

Некоторые аспекты теории поверхностных моментных жидкостей рассматривались в [5—8]. В данной работе получена система уравнений для моментного двумерного N-компонентного континуума.

Моделируя переходные области между контактирующими средами, можно рассмотреть одномерный континуум (линию), наделенный собственными физико-механическими характеристиками [2], в том числе несимметричным одномерным тензором напряжений и одномерным тензором моментных напряжений (см. ниже, п. 2).

1. Записывая балансовые уравнения для объема, содержащего инородный двумерный континуум (поверхность), и стягивая объем к точке на указанной поверхности, получаем уравнения баланса массы, концентрации k-й компоненты, количества движения, момента количества движения, энергии и энтропии:

$$\frac{d\rho_\Sigma}{d\tau} + \rho_\Sigma \vec{\nabla}_\Sigma \cdot \vec{v}_\Sigma = \sum_{i=1}^{2} \beta_i,$$

$$\rho_\Sigma \frac{dc_\Sigma^{(k)}}{d\tau} = -\vec{\nabla}_\Sigma \cdot \vec{J}_\Sigma^{(k)} + \sum_{i=1}^{2} \left[\vec{n}_i \cdot \vec{J}_i^{(k)} + \beta_i \left(c_i^{(k)} - c_\Sigma^{(k)}\right)\right],$$

$$\rho_\Sigma \frac{d\vec{v}_\Sigma}{d\tau} = \rho_\Sigma \vec{f}_\Sigma + \vec{\nabla}_\Sigma \cdot \hat{\sigma}_\Sigma + \sum_{i=1}^{2} \left[-\vec{n}_i \cdot \hat{\sigma}_i + \beta_i (\vec{v}_i - \vec{v}_\Sigma)\right],$$

$$\alpha_\Sigma \rho_\Sigma \frac{d\vec{\omega}_\Sigma}{d\tau} = \rho_\Sigma \vec{m}_\Sigma + \vec{\nabla}_\Sigma \cdot \hat{\mu}_\Sigma - (\hat{\varepsilon}_\Sigma : \hat{\sigma}_\Sigma)\,\vec{n}_1 +$$

$$+ \hat{\varepsilon}_\Sigma \cdot \hat{\sigma}_\Sigma \cdot \vec{n}_1 + \sum_{i=1}^{2} \left[-\vec{n}_i \cdot \hat{\mu}_i + \beta_i (\alpha_i \vec{\omega}_i - \alpha_\Sigma \vec{\omega}_\Sigma)\right], \qquad (1)$$

$$\rho_\Sigma \frac{de_\Sigma}{d\tau} = \rho_\Sigma (\vec{f}_\Sigma \cdot \vec{v}_\Sigma + \vec{m}_\Sigma \cdot \vec{\omega}_\Sigma) + \vec{\nabla}_\Sigma \cdot (\hat{\sigma}_\Sigma \cdot \vec{v}_\Sigma + \hat{\mu}_\Sigma \cdot \vec{\omega}_\Sigma) -$$

$$-\vec{\nabla}_\Sigma \cdot \vec{J}_\Sigma^{(q)} + \sum_{i=1}^{2} \left[\vec{n}_i \cdot \vec{J}_i^{(q)} - \vec{n}_i \cdot (\hat{\sigma}_i \cdot \vec{v}_i + \hat{\mu}_i \cdot \vec{\omega}_i) + \beta_i (e_i - e_\Sigma)\right],$$

$$\rho_\Sigma \frac{ds_\Sigma}{d\tau} = -\vec{\nabla}_\Sigma \cdot \vec{J}_\Sigma^{(s)} + \theta_\Sigma^{(s)} + \sum_{i=1}^{2} \left[\vec{n}_i \cdot \vec{J}_i^{(s)} + \beta_i (s_i - s_\Sigma)\right].$$

Здесь ρ — плотность; $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ — скорости перемещения и поворота: $\beta_i = \rho_i (\vec{v}_i - \vec{v}_\Sigma) \cdot \vec{n}_i$; $c^{(k)}$ и $\vec{J}^{(k)}$ — концентрация и поток k-й компоненты; $\vec{f}$ и $\vec{m}$ — векторы массовых сил и моментов; $\hat{\sigma}$ и $\hat{\mu}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений; $e = u + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \alpha \omega^2$; u — плотность внутренней энергии; $\vec{J}^{(q)}$ — поток теплоты; s, $\theta^{(s)}$ и $\vec{J}^{(s)}$ — плотность, возникновение и поток энтропии; τ — время; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности; α — коэффициент, не зависящий от времени, связанный с моментом инерции; $\vec{\nabla}_\Sigma$ — поверхностный набла-оператор; $\hat{\varepsilon}_\Sigma$ — поверхностный тензор Леви — Чивита. Индексы 1 и 2 относятся к двум контактирующим средам, индекс Σ — к поверхности раздела между ними.

Из уравнений баланса количества движения и момента количества движения следует уравнение баланса кинетической энергии $K_\Sigma = \frac{1}{2} v_\Sigma^2 + \frac{1}{2} \alpha_\Sigma \omega_\Sigma^2$, вычитая которое из уравнения баланса энергии, получаем уравнение для внутренней энергии u_Σ:

$$\rho_\Sigma \frac{du_\Sigma}{d\tau} = -\vec{\nabla}_\Sigma \cdot \vec{J}_\Sigma^{(q)} + \hat{\sigma}_\Sigma^T : \hat{\gamma}_\Sigma + \hat{\mu}_\Sigma^T : \hat{\varkappa}_\Sigma +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \left\{\vec{n}_i \cdot \vec{J}_i^{(q)} - \vec{n}_i \cdot \hat{\sigma}_i \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_\Sigma) - \vec{n}_i \cdot \hat{\mu}_i \cdot (\vec{\omega}_i - \vec{\omega}_\Sigma) +\right.$$

$$\left. + \beta_i \left[e_i - e_\Sigma - (\vec{v}_i - \vec{v}_\Sigma) \cdot \vec{v}_\Sigma - (\alpha_i \vec{\omega}_i - \alpha_\Sigma \vec{\omega}_\Sigma) \cdot \vec{\omega}_\Sigma\right]\right\}, \qquad (2)$$

где верхний индекс T означает транспонирование; $\hat{\gamma}_\Sigma = \vec{\nabla}_\Sigma \vec{v}_\Sigma + \hat{a}_\Sigma \times \vec{w}_\Sigma$; $\hat{\varkappa}_\Sigma = \vec{\nabla}_\Sigma \vec{w}_\Sigma$; $\hat{a}_\Sigma$ — метрический тензор на поверхности. Отметим, что тензор $\hat{\sigma}_\Sigma$ (аналогично $\hat{\mu}_\Sigma$, $\hat{\lambda}_\Sigma$ и $\hat{\varkappa}_\Sigma$) имеет следующую структуру относительно локального базиса на поверхности $\vec{a}_\alpha$ и нормали $\vec{n}$:

$$\hat{\sigma}_\Sigma = \hat{\sigma}_\Sigma^{\parallel} + \hat{\sigma}_\Sigma^{\perp} = \sigma_\Sigma^{\alpha\beta} \vec{a}_\alpha \vec{a}_\beta + \sigma_\Sigma^{\alpha(n)} \vec{a}_\alpha \vec{n}. \tag{3}$$

Тензоры $\hat{\sigma}_\Sigma$ и $\hat{\mu}_\Sigma$ с учетом разложения (3) представим в следующем виде:

$$\hat{\sigma}_\Sigma = \sigma_\Sigma \hat{a}_\Sigma + \hat{\sigma}_\Sigma^* = \sigma_\Sigma \hat{a}_\Sigma + \overset{*}{\sigma}_\Sigma \hat{a}_\Sigma + \mathrm{Dev}_\Sigma \hat{\sigma}_\Sigma^{*\parallel S} + \hat{\sigma}_\Sigma^{*\parallel A} + \hat{\sigma}_\Sigma^{*\perp},$$

$$\hat{\mu}_\Sigma = \hat{\mu}_\Sigma^* = \overset{*}{\mu}_\Sigma \hat{a}_\Sigma + \mathrm{Dev}_\Sigma \hat{\mu}_\Sigma^{*\parallel S} + \hat{\mu}_\Sigma^{*\parallel A} + \hat{\mu}_\Sigma^{*\perp},$$

где звездочкой отмечены вязкие составляющие указанных тензоров; индексы S и A указывают на симметричную и антисимметричную части; $\mathrm{Dev}_\Sigma \hat{\sigma}_\Sigma$ — поверхностный девиатор тензора $\hat{\sigma}_\Sigma$; σ_Σ и σ_Σ^* — равновесная и вязкая составляющие поверхностного натяжения. Антисимметричным тензорам $\hat{\sigma}_\Sigma^{*\parallel A}$ и $\hat{\mu}_\Sigma^{*\parallel A}$ можно поставить в соответствие векторы $\vec{\sigma}_\Sigma^*$ и $\vec{\mu}_\Sigma^*$, направленные по нормали к поверхности:

$$\vec{\sigma}_\Sigma^* = \frac{1}{2}\left(\hat{\varepsilon}_\Sigma : \hat{\sigma}_\Sigma^{*\parallel A}\right)\vec{n}_1, \quad \vec{\mu}_\Sigma^* = \frac{1}{2}\left(\hat{\varepsilon}_\Sigma : \hat{\mu}_\Sigma^{*\parallel A}\right)\vec{n}_1. \tag{4}$$

Из соотношения Гиббса

$$\frac{du_\Sigma}{d\tau} = T_\Sigma \frac{ds_\Sigma}{d\tau} + \sigma_\Sigma \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\rho_\Sigma}\right) + \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_\Sigma^{(k)} \frac{dc_\Sigma^{(k)}}{d\tau}, \tag{5}$$

где T_Σ — абсолютная температура; $\varphi_\Sigma^{(k)} = \varphi_\Sigma'^{(k)} - \varphi_\Sigma'^{(N)}$; $\varphi_\Sigma'^{(k)}$ — химический потенциал k-й компоненты, исключим $d\rho_\Sigma/d\tau$, $dc_\Sigma^{(k)}/d\tau$ и $du_\Sigma/d\tau$ с помощью уравнений (1) и после некоторых преобразований получим выражение для возникновения энтропии, позволяющее записать следующие линейные (для простоты невзаимосвязанные) уравнения процесса:

$$\hat{\sigma}_\Sigma^* = \eta_\Sigma^{(1)} (\vec{\nabla}_\Sigma \cdot \vec{v}_\Sigma) \hat{a}_\Sigma + 2\eta_\Sigma^{(2)} \mathrm{Dev}_\Sigma (\vec{\nabla}_\Sigma \vec{v}_\Sigma)^{\parallel S} +$$

$$+ \eta_\Sigma^{(3)} (\vec{\nabla}_\Sigma \times \vec{v}_\Sigma - 2\vec{w}_\Sigma) \cdot \vec{n}_1 \hat{\varepsilon}_\Sigma + \eta_\Sigma^{\perp} \hat{\gamma}_\Sigma^{\perp},$$

$$\hat{\mu}_\Sigma^* = \lambda_\Sigma^{(1)} (\vec{\nabla}_\Sigma \cdot \vec{w}_\Sigma) \hat{a}_\Sigma + 2\lambda_\Sigma^{(2)} \mathrm{Dev}_\Sigma (\vec{\nabla}_\Sigma \vec{w}_\Sigma)^{\parallel S} + \lambda_\Sigma^{(3)} (\vec{\nabla}_\Sigma \times \vec{w}_\Sigma) \cdot \vec{n}_1 \hat{\varepsilon}_\Sigma + \lambda_\Sigma^{\perp} \hat{\varkappa}_\Sigma^{\perp},$$

$$\vec{J}_\Sigma^{(q)} = -\rho_\Sigma \Lambda_\Sigma^{(q)} \vec{\nabla}_\Sigma T_\Sigma, \quad \vec{J}_\Sigma^{(k)} = -\rho_\Sigma \Lambda_\Sigma^{(k)} \vec{\nabla}_\Sigma \varphi_\Sigma^{(k)},$$

$$\vec{n}_i \cdot \vec{J}_i^{(q)} = H_i^{(q)} (T_i - T_\Sigma), \quad \vec{n}_i \cdot \vec{J}_i^{(k)} = H_i^{(k)} \left(\varphi_i^{(k)} - \varphi_\Sigma^{(k)}\right),$$

$$\vec{n}_i \cdot \hat{\sigma}_i^{*\parallel} = \varkappa_i (\vec{v}_\Sigma - \vec{v}_i)^{\parallel}, \quad \vec{n}_i \cdot \hat{\mu}_i^{*\parallel} = \nu_i (\vec{w}_\Sigma - \vec{w}_i)^{\parallel},$$

$$Y_i = \zeta_i (\vec{v}_\Sigma - \vec{v}_i) \cdot \vec{n}_i, \quad \vec{n}_i \cdot \hat{\mu}_i^{*\perp} = \theta_i (\vec{w}_\Sigma - \vec{w}_i)^{\perp}, \tag{6}$$

где

$$Y_i = \rho_i \Big[e_i - e_\Sigma - (\vec{v}_i - \vec{v}_\Sigma) \cdot \vec{v}_\Sigma - (\alpha_i \vec{w}_i - \alpha_\Sigma \vec{w}_\Sigma) \cdot \vec{w}_\Sigma + p_i/\rho_i + \sigma_\Sigma/\rho_\Sigma -$$

$$- \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_\Sigma^{(k)} (c_i^{(k)} - c_\Sigma^{(k)}) - T_\Sigma (s_i - s_\Sigma)\Big];$$

p_i — давление; $\Lambda_\Sigma^{(q)}$ и $\Lambda_\Sigma^{(k)}$ — поверхностные коэффициенты тепло- и массопроводности; $\eta_\Sigma^{(m)}$, $\eta_\Sigma^{\perp}$, $\lambda_\Sigma^{(m)}$, $\lambda_\Sigma^{\perp}$ $(m = 1,\ 2,\ 3)$ — двумерные коэффициенты вязкости; $H_i^{(2)}$, $H_i^{(k)}$ — коэффициенты тепло- и массоотдачи; феноменологические коэффициенты $\varkappa_i$, ν_i, ζ_i, θ_i $(i=1,\ 2)$ описывают эффекты, связанные с несовпадением скоростей перемещения и поворота рассматриваемых двумерной и трехмерных сред.

Таким образом, система уравнений двумерного многокомпонентного вязкого континуума будет состоять из уравнений баланса массы (первое уравнение (1)), движения (третье и четвертое уравнения (1)), энергии (2), диффузии $\left(D_{\Sigma}^{(k)(m)}\right.$ — массоемкости, $\gamma_{\Sigma}^{(k)}$ — коэффициенты диффузионного расширения):

$$\rho_{\Sigma}\Lambda_{\Sigma}^{(k)}\Delta_{\Sigma}\varphi_{\Sigma}^{(k)}=\sum_{m=1}^{N-1}\rho_{\Sigma}D_{\Sigma}^{(k)(m)}\frac{d\varphi_{\Sigma}^{(m)}}{d\tau}-\frac{\gamma_{\Sigma}^{(k)}K_{\Sigma}}{\rho_{\Sigma}}\frac{d\rho_{\Sigma}}{d\tau}+$$

$$+\rho_{\Sigma}\xi_{\Sigma}^{(k)}\frac{dT_{\Sigma}}{d\tau}-\sum_{i=1}^{2}\left[\vec{n}_i\cdot\vec{J}_i^{(k)}+\beta_i\left(c_i^{(k)}-c_{\Sigma}^{(k)}\right)\right], \tag{7}$$

уравнений состояния

$$u_{\Sigma}=u_{\Sigma}\left(T_{\Sigma},\ \rho_{\Sigma},\ \varphi_{\Sigma}^{(k)}\right),\quad \sigma_{\Sigma}=\sigma_{\Sigma}\left(T_{\Sigma},\ \rho_{\Sigma},\ \varphi_{\Sigma}^{(k)}\right), \tag{8}$$

$$s_{\Sigma}=s_{\Sigma}\left(T_{\Sigma},\ \rho_{\Sigma},\ \varphi_{\Sigma}^{(k)}\right),\quad c_{\Sigma}^{(k)}=c_{\Sigma}^{(k)}\left(T_{\Sigma},\ \rho_{\Sigma},\ \varphi_{\Sigma}^{(m)}\right)$$

и феноменологических уравнений процесса (6).

2. На основе методики, описанной в работах [2, 3], можно получить соответствующие результаты для одномерного многокомпонентного вязкого моментного континуума, представляющего собой линию контакта трех пространственных сред, отмечаемых индексами 1, 2, 3, и трех поверхностных континуумов, отмечаемых двойными индексами 12, 13, 23. Величины, заданные на линии, отмечаются индексом L.

Опуская промежуточные выкладки, выпишем одномерный аналог полученной выше системы уравнений, состоящий из баланса массы:

$$\frac{d\rho_L}{d\tau}+\rho_L\vec{\nabla}_L\cdot\vec{v}_L=\sum_{i,j=1}^{3}{}'\beta_{ij}, \tag{9}$$

уравнений движения

$$\rho_L\frac{d\vec{v}_L}{d\tau}=\rho_L\vec{f}_L+\vec{\nabla}_L\cdot\hat{\sigma}_L+\sum_{i,j=1}^{3}{}'\left[-\vec{N}_{ij}\cdot\hat{\sigma}_{ij}+\beta_{ij}\left(\vec{v}_{ij}-\vec{v}_L\right)\right], \tag{10}$$

$$\alpha_L\rho_L\frac{d\vec{\omega}_L}{d\tau}=\rho_L\vec{m}_L+\vec{\nabla}_L\cdot\hat{\mu}_L-\vec{\lambda}\cdot\hat{\sigma}_L\times\vec{\lambda}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{3}{}'\left[-\vec{N}_{ij}\cdot\hat{\mu}_{ij}+\beta_{ij}\left(\alpha_{ij}\vec{\omega}_{ij}-\alpha_L\vec{\omega}_L\right)\right], \tag{11}$$

уравнения энергии

$$\rho_L\frac{du_L}{d\tau}=\rho_L\Lambda_L^{(q)}\nabla_L T_L+\hat{\sigma}_L^T:\hat{\gamma}_L+\hat{\mu}_L^T:\hat{\varkappa}_L+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{3}{}'\left\{\vec{N}_{ij}\cdot\vec{J}_{ij}^{(q)}-\vec{N}_{ij}\cdot\hat{\sigma}_{ij}\cdot\left(\vec{v}_{ij}-\vec{v}_L\right)-\vec{N}_{ij}\cdot\hat{\mu}_{ij}\cdot\left(\vec{\omega}_{ij}-\vec{\omega}_L\right)+\right.$$

$$\left.+\beta_{ij}\left[e_{ij}-e_L-\left(\vec{v}_{ij}-\vec{v}_L\right)\cdot\vec{v}_L-\left(\alpha_{ij}\vec{\omega}_{ij}-\alpha_L\vec{\omega}_L\right)\cdot\vec{\omega}_L\right]\right\}, \tag{12}$$

уравнений диффузии

$$\rho_L\Lambda_L^{(k)}\Delta_L\varphi_L^{(k)}=\sum_{m=1}^{N-1}\rho_L D_L^{(k)(m)}\frac{d\varphi^{(m)}}{d\tau}-\frac{\gamma_L^{(k)}K_L}{\rho_L}\frac{d\rho_L}{d\tau}+$$

$$+\rho_L\xi_L^{(k)}\frac{dT_L}{d\tau}-\sum_{i,j=1}^{3}{}'\left[\vec{N}_{ij}\cdot\vec{J}_{ij}^{(k)}+\beta_{ij}\left(c_{ij}^{(k)}-c_L^{(k)}\right)\right], \tag{13}$$

уравнений состояния

$$u_L=u_L\left(T_L,\ \rho_L,\ \varphi_L^{(k)}\right),\quad \sigma_L=\sigma_L\left(T_L,\ \rho_L,\ \varphi_L^{(k)}\right), \tag{14}$$

$$s_L = s_L(T_L, \rho_L, \varphi_L^{(k)}), \quad c_L^{(k)} = c_L^{(k)}(T_L, \rho_L, \varphi_L^{(m)}),$$

уравнений для тензоров вязких напряжений и моментных напряжений

$$\hat{\sigma}_L^* = \eta_L^{\parallel}\hat{\gamma}_L^{\parallel} + \eta_L^{\perp}\hat{\gamma}_L^{\perp}, \quad \hat{\mu}_L^* = \lambda_L^{\parallel}\hat{\varkappa}_L^{\parallel} + \lambda_L^{\perp}\hat{\varkappa}_L^{\perp}, \tag{15}$$

условий обмена

$$\begin{gathered}\vec{N}_{ij}\cdot\vec{J}_{ij}^{(q)} = H_{ij}^{(q)}(T_{ij} - T_L), \quad \vec{N}_{ij}\cdot\vec{J}_{ij}^{(k)} = H_{ij}^{(k)}(\varphi_{ij}^{(k)} - \varphi_L^{(k)}),\\ \vec{N}_{ij}\cdot\hat{\sigma}_{ij}^{*\parallel} = \varkappa_{ij}^{\parallel}(\vec{v}_L - \vec{v}_{ij})^{\parallel}, \quad \vec{N}_{ij}\cdot\hat{\mu}_{ij}^{*\parallel} = \nu_{ij}^{\parallel}(\vec{w}_L - \vec{w}_{ij})^{\parallel},\\ N_{ij}\cdot\hat{\sigma}_{ij}^{*\perp} = \varkappa_{ij}^{\perp}(\vec{v}_L - \vec{v}_{ij})^{\perp}, \quad \vec{N}_{ij}\cdot\hat{\mu}_{ij}^{*\perp} = \nu_{ij}^{\perp}(\vec{w}_L - \vec{w}_{ij})^{\perp},\\ Y_{ij} = \zeta_{ij}(\vec{v}_L - \vec{v}_{ij})\cdot\vec{N}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \ i < j.\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь, кроме введенных выше, используются следующие обозначения: $\sum\limits_{i,j=1}^{3}{}'$ означает $\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}$; $\beta_{ij} = \rho_{ij}(\vec{v}_{ij} - \vec{v}_L)\cdot\vec{N}_{ij}$; $\vec{N}_{ij}$ — внешняя нормаль к кривой L, лежащая в касательной плоскости к поверхности Σ_{ij}; $\hat{\gamma}_L = \vec{\nabla}_L\vec{v}_L + \vec{\lambda}\vec{\lambda}\times\vec{w}_L$; $\hat{\varkappa}_L = \vec{\nabla}_L\vec{w}_L$; $\vec{\nabla}_L$ — одномерный набла-оператор; $\vec{\lambda}$ — единичная касательная к L; тензоры $\hat{\sigma}_L$, $\hat{\mu}_L$, $\hat{\gamma}_L$, $\hat{\varkappa}_L$ имеют следующую структуру: $\hat{\sigma}_L = \hat{\sigma}_L^{\parallel} + \hat{\sigma}_L^{\perp} = \sigma_L^{(\lambda)(\lambda)}\vec{\lambda}\vec{\lambda} + \hat{\sigma}_L^{\perp}$; $\eta_L^{\parallel}$, $\eta_L^{\perp}$, $\lambda_L^{\parallel}$, $\lambda_L^{\perp}$ — одномерные коэффициенты вязкости; физический смысл остальных величин и коэффициентов в системе (9)—(16) совпадает с физическим смыслом соответствующих величин в системе уравнений, полученной в п. 1.

1. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Асимметричная гидромеханика. — Прикл. математика и механика, 1965, **29**, № 2, с. 297—308.
2. *Повстенко Ю. З.* Условия на линии контакта трех сред. — Там же, 1981, **45**, № 5, с. 919—923.
3. *Повстенко Ю. З.* Общие уравнения баланса на поверхности раздела двух сред и на линии раздела трех сред. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1983, вып. 17, с. 41—43.
4. *Шоркин В. С.* Об одной модели движения жидкости вблизи твердой поверхности. — Журн. прикл. механики и техн. физики, 1981, № 3, с. 70—75.
5. *Georgescu L.* A Navier-Stokes type equation for the phase interface of a liquid. — Surface Sci., 1969, 15, N 1, p. 177—181.
6. *Georgescu L.* Phenomenological equations for the multicomponent phase interface. — Rev. roum. Phys., 1975, 20, N 8, p. 781—790.
7. *Jenkins J. T., Barratt P. J.* Interfacial effects in the static theory of nematic liquid crystals. — Quart. J. Mech. Appl. Math., 1974, **27**, N 1, p. 111—127.
8. *Kovac J.* Non-equilibrium thermodynamics of interfacial systems. 2. Boundary conditions for fluids with spin. — Physica A, 1981, **107**, N 2, p. 280—298.

Ин-т прикладных проблем механики и математики АН УССР, Львов

Получено 13.06.84

УДК 539.377

Л. М. Затварская

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрим отнесенную к цилиндрической системе координат (r, φ, z) двухслойную круглую пластину радиуса R, нагреваемую по поверхности $z = z_2$ смещенным на расстояние d относительно ее центра вдоль линии $\varphi = 0$ потоком тепла, интенсивность которого изменяется по закону Гаусса. Поверхность пластины $r = R$ предполагается теплоизолированной, а через поверхность $z = 0$ осуществляется теплообмен с