

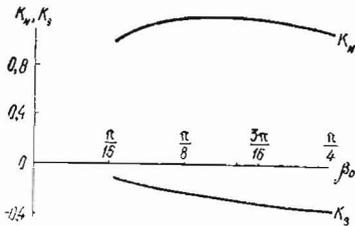
Используя далее квадратурные формулы

$$\int_{-1}^1 \frac{\Psi'_i(\tau) d\tau}{x-\tau} = \frac{2}{n+1} \sum_{\nu=1}^n \Psi_i(x_\nu) \sum_{m=1}^n \frac{m \sin n\theta_\nu \sin m\theta}{\sin \theta},$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\Psi_i(\tau) d\tau}{x-\tau} = \frac{2}{n+1} \sum_{\nu=1}^n \Psi_i(x_\nu) \sum_{m=1}^n \sin m\theta_\nu \cos m\theta,$$

где $\theta = \arccos x$, и применяя к регулярным интегралам формулу Гаусса, задачу о нахождении решения интегральных уравнений сводим к системе линейных алгебраических уравнений.

Численный анализ задачи проведен при различных длинах трещин для следующих значений параметров оболочки: $R = 0,15$ м, $2h = 0,003$ м, $\nu = 0,3$. На рисунке графически изображена зависимость нормализованных коэффициентов интенсивности усилий $K_N = 1/(N_0 \sqrt{l}) \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} N$, $K_S =$



$= 1/(N_0 \sqrt{l}) \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} S$ (l — длина трещины) от длины круговой трещины в случае, когда ее берега загружены нормальными усилиями постоянной интенсивности ($f_1^{(1)}(\vartheta) = -N_0$).

Как видно из рисунка, значения коэффициента интенсивности нормальных усилий K_N значительно превышают значения коэффициента интенсивности сдвигающих усилий K_S . С увеличением длины криволинейной трещины величина коэффициента интенсивности сдвигающих усилий возрастает.

1. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. — М.: Наука, 1973.—304 с.
2. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. — Киев: Наук. думка, 1985.—312 с.
3. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М. Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 29—41.

Ин-т прикладных проблем механики и математики АН УССР, Львов

Получено 09.01.85.

УДК 539.3

А. М. Краснов, Г. Я. Попов

ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Полную систему уравнений, описывающую осесимметричное напряженное состояние конической оболочки, можно записать в виде [1]

$$\frac{d}{ds}(sN_s) - N_\theta = sq_s, \quad \frac{d}{ds}(sQ_s) - \frac{N_\theta}{\operatorname{ctg} \varphi} = sq_n, \quad \frac{d}{ds}(sM_s) - M_\theta + sQ_s = 0, \quad (1)$$

$$N_\theta = G \left[\nu \frac{du}{ds} + \frac{1}{s} (u + w \operatorname{tg} \varphi) \right], \quad N_s = G \left[\frac{du}{ds} + \frac{\nu}{s} (u + w \operatorname{tg} \varphi) \right], \quad (2)$$

$$M_\theta = D \left(\nu \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dw}{ds} \right), \quad M_s = D \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{\nu}{s} \frac{dw}{ds} \right), \quad (3)$$

$$\frac{d}{ds}(sN_\theta) + N_\theta = sq_0, \quad N_\theta = G(1-\nu)s \frac{d}{ds} \left(\frac{v}{s} \right), \quad (4)$$

$$G = Eh/(1-\nu^2), \quad D = Eh^3/(1-\nu^2).$$

Здесь N_s , N_θ — продольные силы; Q_s — поперечная; M_s , M_θ — изгибающие моменты; u , v , w — перемещения в продольном, радиальном и нормальном направлениях соответственно; q_s , q_θ , q_n — функции, описывающие нагрузку,

действующую в этих же направлениях; E — модуль упругости материала оболочки; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина оболочки; φ — угол между образующей срединной поверхностью и осью s , совпадающей с осью оболочки.

При помощи соотношений (2) и (3) из уравнений (1) исключим все величины с индексом θ . Тогда, если учесть, что $\gamma_s = -dw/ds$ (γ_s — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки), из (1) — (3) получим

$$\begin{aligned} \frac{d(sN_s)}{ds} - \nu N_s - \frac{Eh}{s}(u + w \operatorname{tg} \varphi) &= sq_s, & \frac{d(sQ_s)}{ds} - \nu N_s \operatorname{tg} \varphi - \\ & - \frac{Eh}{s \operatorname{ctg} \varphi} \left(u + \frac{w}{\operatorname{ctg} \varphi} \right) &= sq_n, \\ \frac{d(sM_s)}{ds} - \nu Q_s - \frac{Eh^3}{s} \gamma_s + sN_s &= 0, & \frac{du}{ds} - \frac{1}{j} N_s + \frac{\nu}{s}(u + w \operatorname{tg} \varphi) &= 0, \\ \frac{d\gamma_s}{ds} + \frac{\nu}{s} \gamma_s + \frac{1}{D} M_s &= 0, & \frac{dw}{ds} + \gamma_s &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Как видно, система уравнений (1) — (4) распадается на две системы: систему (4), описывающую кручение оболочки, и систему (5), описывающую ее изгиб.

Если ввести неизвестную вектор-функцию $Z(s)$ с компонентами sN_s , sQ_s , sM_s , u , w , γ_s , то систему (5) можно записать в матричном виде:

$$\frac{dZ}{ds} + \frac{1}{s} P(s) = f, \quad (6)$$

$$P(s) = \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 & -Eh & -Eh \operatorname{tg} \varphi & 0 \\ -\nu \operatorname{tg} \varphi & 0 & 0 & -Eh \operatorname{tg} \varphi & -Eh \operatorname{tg}^2 \varphi & 0 \\ 0 & s & -\nu & 0 & 0 & -Eh^3 \\ -G^{-1} & 0 & 0 & \nu & \nu \operatorname{tg} \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & D^{-1} & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} q_s \\ q_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Систему (4) тоже можно записать в виде (6), если принять

$$Z(s) = \begin{pmatrix} N_\theta \\ \nu \end{pmatrix}, \quad P(s) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -s[G(1-\nu)]^{-1} & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} q_\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии оболочки конечной длины ($a \leq s \leq b$) в предположении, что в сечениях с координатами $s = s_k$ ($k = 1, n-1$; $n \geq 2$) скачкообразно изменяются упругие параметры материала оболочки и ее толщина. Тогда рассматриваемая задача приводится к решению на участках постоянства упругих параметров $s_k < s < s_{k+1}$, $k = 1, n-1$, к решению уравнения

$$\frac{dZ^{(k)}}{ds} + P^{(k)}(s) Z^{(k)} = f^{(k)}, \quad \begin{pmatrix} s_k \leq s \leq s_{k+1} \\ k = 0, n-1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь $Z^{(k)}$ обозначена вектор-функция Z на участке $s_k < s < s_{k+1}$. Кроме дифференциального уравнения (9), должны удовлетворяться условия закрепления на торцах оболочки, которые в общем случае можно записать в виде

$$AZ^{(0)}(a) + BZ^{(n)}(b) = \gamma, \quad (10)$$

где A , B — матрицы; γ — вектор, компоненты которого определяются видом условий закрепления.

В частности, если торцы оболочки жестко закреплены, то $\gamma = 0$, и в случае изгиба

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

E — единичная матрица третьего порядка, а в случае кручения

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, должны быть выполнены условия сопряжения в сечениях $s = s_k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$),

$$Z^{(k)}(s_k) = A^{(k)}Z^{(k-1)}(s_k), \quad (11)$$

$A^{(k)}$ — матрица, компоненты которой определяются видом сопряжения. Например, в случае монолитного сцепления $A^{(k)}$ — единичная матрица

Для решения уравнения (9) с условиями (10) и (11) будем использовать метод, изображенный в [3], позволяющий избежать необходимости решать системы алгебраических уравнений, порядок которых пропорционален количеству участков, а ограничиться решением системы, порядок которой не превышает порядка исходной системы дифференциальных уравнений. Указанный метод позволяет записать решение задачи (9) — (11) в таком виде:

$$Z^{(k)}(s) = \bar{Z}^{(k)}(s) B_{k-1}^{(k)} Z^{(0)}(s_0) + \bar{Z}^{(k)}(s) g_*^{(k)} + \int_{s_k}^s K^{(k)}(s, \eta) f^{(k)}(\eta) d\eta. \quad (12)$$

Здесь введены обозначения:

$$B_l^{(k)} = \prod_{j=0}^l A^{(k-j)} \bar{Z}^{(k-j-1)}(s_{k-j}), \quad l = 0, 1, \dots, k-1;$$

$$g_*^{(k)} = A^{(k)} f_*^{(k-1)} + \sum_{j=0}^{k-2} B_j^{(k)} A^{(k-j-1)} f_*^{(k-j-2)};$$

$$f_*^{(k)} = \int_{s_k}^{s_k+1} K^{(k)}(s_k, \eta) f^{(k)}(\eta) d\eta, \quad K^{(k)}(s, \eta) = \bar{Z}^{(k)}(s) [\bar{Z}^{(k)}(\eta)]^{-1}.$$

В равенстве (12) символом $\bar{Z}^{(k)}(s)$ обозначен матрицант уравнения (9), т. е. решение матричного уравнения

$$\frac{d\bar{Z}^{(k)}}{ds} + P^{(k)}(s) \bar{Z}^{(k)} = 0, \quad (13)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\bar{Z}^{(k)}(s_k) = E. \quad (14)$$

Вектор $Z^{(0)}(s_0)$, входящий в (12), находится из граничного условия (10) которое преобразовано к виду

$$[A + BC_m] Z^{(0)}(s_0) = \gamma - g_m, \quad (15)$$

$$g_m = \bar{Z}^{(m-1)}(s_m) g_*^{(m-1)} + f_*^{(m-1)}, \quad C_m = \bar{Z}^{(m-1)}(s_m) \prod_{i=0}^{m-2} A^{(m-i-1)} \bar{Z}^{(m-i-2)}(s_{m-i-1}).$$

Как видим, система алгебраических уравнений (15) для компонентов вектора $Z^{(0)}(s_0)$ будет того же порядка, что и система дифференциальных уравнений (9), т. е. в случае кручения оболочки система (15) будет второго порядка, а в случае изгиба — шестого.

Самым затруднительным в реализации приведенного решения (12) является построение решения уравнения (13), удовлетворяющего условию (14), т. е. матрицанта. Для случая постоянной матрицы $P^{(k)}$ методика построения матрицанта изложена в [3].

В нашем случае матрица $P^{(k)}$ зависит от переменной s , в связи с этим она неприменима. Однако представление матрицы $P^{(k)}$ в виде

$$P(s) = \frac{1}{s} P_{-1} + P_0 \quad (16)$$

позволяет рассматривать систему (13) как систему с регулярной особой точкой [2]. Представление (16) имеет место и для задачи изгиба (это

следует из (7)), и для задачи кручения оболочки. Например, в случае задачи кручения

$$P_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -[G(1-\nu)]^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Вначале проведем построение матрицанта в случае задачи о кручении, т. е. для уравнения (9) с учетом (17). Для каждого интервала $s_k \leq s \leq s_{k+1}$, $k = \bar{0}, \bar{h}$, матрицант будем искать в виде

$$\bar{Z}^{(k)}(s) = A^{(k)}(s) Y^{(k)}. \quad (18)$$

Здесь $Y^{(k)}$ — новая неизвестная матрица — функция; $A^{(k)}(s) = E + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(k)} s^m$; $A_m^{(k)}$ — постоянные матрицы, вид которых мы в дальнейшем определим. Всюду ниже индекс k для сокращения записи не будем писать. Если мы подставим в матричное уравнение (13) вместо $\bar{Z}(s)$ его представление (18), то получим

$$\frac{dY}{ds} = P^*(s) Y, \quad (19)$$

где $P^*(s) = s^{-1} P_{-1}^* + \sum_{m=0}^{\infty} P_m^* s^m$ и P_{-1}^* , P_m^* — матрицы-константы.

Учитывая (19), из (13) получим

$$P(s) A(s) - A(s) P^*(s) = \frac{dA(s)}{ds}. \quad (20)$$

Подставляя в (20) вместо $A(s)$ и $P^*(s)$ их разложения в виде рядов, получим систему матричных алгебраических уравнений:

$$P_{-1} = P_{-1}^*,$$

$$P_{-1} A_1 - A_1 (P_{-1} + E) + P_0 = P_0^*, \quad (21)$$

...

$P_{-1} A_{m+1} - A_{m+1} [P_{-1} + (m+1)E] + P_0 A_m - A_m P_0^* - \dots - A_1 P_{m-1}^* = P_m^*$. Коэффициенты A_m будем теперь выбирать так, чтобы матрица $P^*(s)$ имела наиболее простой вид, т. е. так, чтобы $P_m^* = 0$. Как следует из [2], система (21) позволяет это осуществить, поскольку матрица P_{-1} имеет простую структуру. Действительно, полагая в (21) $P_m^* = 0$ и проводя вычисления согласно [2], находим $A_m = 0$ ($m = 2, 3, \dots$),

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{(1-\nu)^{-1}}{4G} & 0 \end{pmatrix}, \quad P^*(s) = P_{-1} s^{-1}.$$

Таким образом, система (19) приводится к системе Коши:

$$\frac{dY}{ds} = \frac{1}{s} P_{-1} Y, \quad (22)$$

решение которой записывается так [2]:

$$Y(s) = s^{P_{-1}} C.$$

Произвольная постоянная матрица C находится из условия (14). В результате получим

$$\bar{Z}^{(k)} = A^{(k)}(s) s^{P_{-1}^{(k)}} s^{-P_{-1}^{(k)}} [A^{(k)}(s_k)]^{-1}.$$

Указанный способ построения матрицанта позволяет решить задачу (13), (14) и в случае задачи изгиба. Однако в этом случае матрица $P_{-1}^{(k)}$ не будет матрицей простой структуры. Поэтому преобразуем систему (13) путем введения новой неизвестной матрицы $X^{(k)} = T^{(k)} Z^{(k)} [T^{(k)}]^{-1}$ ($T^{(k)}$ —

несобственная постоянная матрица, приводящая матрицу $P_{-1}^{(k)}$ к нормальной жордановой форме) к виду

$$\frac{dX^{(k)}}{ds} + \left(\frac{1}{s} Q_{-1}^{(k)} + Q_0^{(k)} \right) X^{(k)} = 0.$$

Показано, что достаточно принять

$$T^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_1 & t_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t_1 \operatorname{tg} \varphi & t_2 \operatorname{tg} \varphi & 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{tg} \varphi & 0 & 0 & t_3 & t_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_0^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & -t_5 & 0 & t_1 \operatorname{tg} \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_7 & 0 & 0 & t_5 \end{pmatrix},$$

где

$$t_1 = G_k(1 + \nu_k); \quad t_2 = -G_k(1 - \nu_k); \quad t_3 = D_k(\mu_k - \nu_k); \quad t_4 = -D_k(\mu_k + \nu_k); \\ \mu_k = \sqrt{2\nu_k^2 - 1}; \quad t_5 = (\mu_k - \nu_k)/2\mu_k; \quad t_6 = D_k(\mu_k - \nu_k)^2/2\mu_k; \quad t_7 = -1/2D_k\mu_k.$$

При этом матрица $Q_{-1}^{(k)}$ будет диагональной:

$$Q_{-1}^{(k)} = \{0, 0, -1, 1, -\mu_k, \mu_k\}.$$

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. — М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. — 782 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
3. Попов Г. Я. К решению краевых задач механики и математической физики. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1978, 31, № 2, с. 34—47.

Одесский государственный ун-т им. И. И. Мечникова

Получено 06.07.84

УДК 532.5

Ю. З. Повстенко

О ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТАХ В МОМЕНТНЫХ ЖИДКОСТЯХ

В настоящее время разработаны различные модели жидкостей, существенной чертой которых являются наличие моментных напряжений и несимметричность тензора напряжений [1]. Построение таких моделей связано как с внутренним развитием теории, так и с приложениями к жидким кристаллам, различным биологическим объектам и т. д. При описании поверхностных эффектов в таких средах естественно исходить из модели двумерного континуума, наделенного собственными физико-механическими характеристиками, в частности несимметричным двумерным тензором напряжений и двумерным тензором моментных напряжений. Кроме того, отмечалось [4], что при уменьшении толщины слоя жидкости, безмоментной в обычных условиях, моментные эффекты могут стать существенными.

Некоторые аспекты теории поверхностных моментных жидкостей рассматривались в [5—8]. В данной работе получена система уравнений для моментного двумерного N -компонентного континуума.