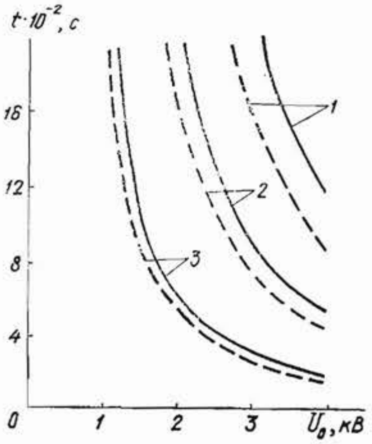

Рис. 3.

чальной температуре срединной поверхности пластины.

Как видно из рис. 1—3, в процессе нагрева предварительно подогретой стеклянной пластины температура по толщине выравнивается, а величины механических напряжений значительно уменьшаются. Учет температурной зависимости электрофизических характеристик приводит к уменьшению времени нагрева до заданной температуры на 10—13 %.

Таким образом, для материалов, низкой электропроводимости существенное увеличение $\mathrm{tg}\delta$ с ростом температуры делает эффективной термообработку комбинированным методом: конвективным нагревом до определенных температур и последующим — в электрическом поле высокой частоты. Этим обеспечиваются более равномерный прогрев элемента конструкции по толщине и незначительные уровни механических напряжений.

1. *Гачкевич А. Р., Мисьонг О. Р.* Уравнения электродинамики и теплопроводности с учетом температурной зависимости характеристик материала.— В кн.: Физико-механические поля в деформируемых средах. Киев: Наук. думка, 1978, с. 39—42.
2. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р. и др.* Термоупругость электропроводных тел.— Киев: Наук. думка, 1977.—248 с.
3. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Шепелец В. И. и др.* Оптимизация и управление в электровакуумном производстве.— Киев: Наук. думка, 1980.—214 с.
4. *Подстригач Я. С., Черпуха Ю. А.* Об уравнениях теплопроводности для тонких элементов конструкций.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 54—59.
5. *Фальковский О. И.* Техническая электродинамика.— М.: Связь, 1978.—432 с.
6. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике.— М.: Мир, 1966.— 296 с.
7. *Эспе В.* Технология электровакуумных приборов.— М.: Энергия, 1968.— 448 с.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР, Львов

Получено 17.01.84

УДК 539.3 : 538.69

М. И. Киселев, С. В. Соболев

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ УСТАНОВКИ ДЛЯ МАГНИТОЗВУКОВОГО РАЗОГРЕВА НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Известно [2], что эффективность разогрева неоднородных электропроводных материалов, предшествующего их механической обработке, существенно зависит от распределения мощности источников тепла по объему разогреваемого тела. В высокочастотных индукционных установках разогрев осуществляется в основном за счет теплопроводности материала, обеспечивающей перенос тепла из тонкого приповерхностного слоя во внутренние части образцов.

Значительного выравнивания поля температур и увеличения скорости нагрева можно достичь за счет объемного характера распределения тепловых источников путем создания в индукторе постоянного достаточно сильного магнитного поля ($B_0 \sim 10$ Т). При этом, как показано в [5], при определенных частотах интенсивность джоулева тепловыделения в твердых проводниках может на порядки превышать соответствующую интенсивность при $B_0 = 0$, а максимумы плотностей вязкого и джоулева тепловыделений в жидких металлах могут иметь одинаковые порядки [1].

Наличие сильной индуктивной связи между индуктором и загрузкой приводит к взаимозависимости механоэлектромагнитных и тепловых явлений в нагреваемом образце и величины тока в обмотке индуктора. Поэтому математически замкнутая задача о магнитозвуковом разогреве должна сводиться к совместному решению уравнений, описывающих как процессы в загрузке, так и в электротехнической цепи, содержащей индуктор и источник питания.

Наиболее эффективно магнитозвуковой разогрев протекает в режиме резонансного усиления колебаний. В связи с этим приобретает интерес изучение частотных характеристик конкретных установок для магнитозвукового разогрева образцов и элементов конструкций с известными физическими характеристиками, формой и размерами.

Рассмотрим длинный сплошной цилиндр радиуса R_1, помещенный в индуктор радиуса R_2 (эффектами на концах цилиндра и индуктора пренебрегаем). Материал цилиндра характеризуется плотностью ρ, модулем Юнга E^*, коэффициентом Пуассона σ^*, коэффициентами вязкости ξ и η и удельной электропроводностью σ. Магнитную постоянную материала μ примем равной 1. Внешнее магнитное поле $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ считаем однородным и направленным вдоль оси цилиндра, совпадающей с осью z цилиндрической системы координат (r, φ, z). Исходная линеаризованная система уравнений магнитоакустики относительно вектора перемещений $\vec{u}=(u, 0, 0)$ и вектор-потенциала $\vec{A}=(0, A, 0)$ для квазистационарных процессов в цилиндре имеет вид

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=\frac{E^*}{2(1+\sigma^*)}\Delta\vec{u}+\frac{E^*}{2(1+\sigma^*)(1-2\sigma^*)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}+$$

$$+\eta\Delta\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\left(\xi+\frac{1}{3}\eta\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\frac{1}{\mu_0}[\vec{B}_0,\ \Delta\vec{A}], \tag{1}$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0\sigma}\Delta\vec{A}+\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t},\ \vec{B}_0\right]. \tag{2}$$

При $u(r,\ t)=u(r)e^{i\omega t}$, $A(r,\ t)=A(r)e^{i\omega t}$ система (1) — (2) имеет следующие ограниченные при $r=0$ решения:

$$u(r)=\frac{1}{B_0}\left[\alpha\left(\frac{1}{2}ik'^2l^2-1\right)\mathcal{J}_1(k'r)+\beta\left(\frac{1}{2}ik''^2l^2-1\right)\mathcal{J}_1(k''r)\right], \tag{3}$$

$$A(r)=\alpha\mathcal{J}_1(k'r)+\beta\mathcal{J}_1(k''r). \tag{4}$$

Здесь $\mathcal{J}_1$ — функция Бесселя первого порядка; $l=\left(\frac{2}{\omega\mu\sigma}\right)^{1/2}$ — толщина скин-слоя; α и β — константы, определяемые из граничных условий; k' и k'' — корни дисперсионного уравнения

$$(1+id_\eta)k^4-k_{10}^2[1-id_\sigma(1+M^2+id_\eta)]k^2-ik_{10}^4d_\sigma=0, \tag{5}$$

где

$$d_\eta=\frac{\omega^2}{\rho c_{11}^2}\left(\xi+\frac{4}{3}\eta\right);\ d_\sigma=\frac{\mu_0\sigma c_{11}^2}{\omega};\ M^2=\frac{B_0^2}{\mu_0\rho c_{11}};$$

$$k_{10}=\frac{\omega}{c};\ c_{11}=\left[\frac{E^*(1-\sigma^*)}{\rho(1+\sigma^*)(1-2\sigma^*)}\right]^{1/2}$$

— скорость продольных упругих волн. Учитывая, что $\vec{b}_1=\operatorname{rot}\vec{A}$, $\vec{e}_1=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, для возмущений магнитного $\vec{b}_1=(0,\ 0,\ b)$ и электрического $\vec{e}_1=(0,\ e,\ 0)$ полей с учетом (4) получаем выражения

$$b_1(r)=\alpha k'\mathcal{J}_0(k'r)+\beta k''\mathcal{J}_0(k''r), \tag{6}$$

$$e_1(r) = -i\omega\,[\alpha \mathcal{J}_1(k'r) + \beta \mathcal{J}_1(k''r)] \tag{7}$$

$\mathcal{J}_0$ — бесселева функция нулевого порядка).

В зазоре между цилиндром и индуктором ($R_1 < r < R_2$) переменное квазистационарное магнитное поле не зависит от r и его индукция b_2 в силу непрерывности b при $r = R_1$ равна:

$$b_2(r) = \alpha k' \mathcal{J}_0(k'R_1) + \beta k'' \mathcal{J}_0(k''R_1). \tag{8}$$

Напряженность вихревого электрического поля e_2 в этой области наиболее просто определяется с помощью интегральной формы закона индукции Фарадея и имеет вид

$$e_2(r) = -i\omega\left\{\frac{R_1}{r}[\alpha \mathcal{J}_1(k'R_1) + \beta \mathcal{J}_1(k''R_1)] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2r}(r^2 - R_1^2)\,[\alpha k' \mathcal{J}_0(k'R_1) + \beta k'' \mathcal{J}_0(k''R_1)]\right\}. \tag{9}$$

Аналогично вне индуктора ($r > R_2$)

$$b_3 = 0,\ \ e_3(r) = -i\omega\left\{\frac{R_1}{r}[\alpha \mathcal{J}_1(k'R_1) + \beta \mathcal{J}_1(k''R_1)] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2r}(R_2^2 - R_1^2)\,[\alpha k_1' \mathcal{J}_0(k'R_1) + \beta k'' \mathcal{J}_0(k''R_1)]\right\}. \tag{10}$$

Будем считать, что граница цилиндра свободна. Тогда при $\mu = 1$ компонент тензора напряжений при $r = R_1$ равен:

$$\sigma_{rr} = \rho c_1^2\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sigma^*}{1-\sigma^*}\frac{u}{r}\right] = 0,$$

или с учетом (3)

$$\alpha f + \beta g = 0, \tag{11}$$

где

$$f = \left(\frac{1}{2} i k'^2 l^2 - 1\right)\left\{(1-\sigma^*)\,k'\left[\mathcal{J}_0(k'R_1) - \frac{1}{k'R_1}\mathcal{J}_1(k'R_1)\right] + \frac{\sigma^*}{R_1}\mathcal{J}_1(k'R_1)\right\}; \tag{12}$$

$$g = \left(\frac{1}{2} i k''^2 l^2 - 1\right)\left\{(1-\sigma^*)\,k''\left[\mathcal{J}_0(k''R_1) - \frac{1}{k''R_1}\mathcal{J}_1(k''R_1)\right] + \frac{\sigma^*}{R_1}\mathcal{J}_1(k''R_1)\right\}. \tag{13}$$

Вихревое электрическое поле $\vec{e}$ непрерывно при переходе через границу $r = R_2$ и индуцирует в обмотке индуктора ЭДС равную $2\pi R_2 N e_2(R_2)$ (N — полное число витков индуктора). Поэтому закон Ома для электрической цепи запишется в виде

$$\varepsilon_0 + 2\pi R_2 N e_2(R_2) = I\,|Z_0|\,e^{i\varphi}, \tag{14}$$

где ε_0 — амплитуда ЭДС источника питания; $|Z_0|$ — полное сопротивление цепи; $\varphi = \operatorname{arc}[\operatorname{tg}(\omega L_0 - 1/\omega c_0)/R_0]$ [3]. С другой стороны, мгновенное значение силы тока в индукаторе I связано с индукцией переменного магнитного поля в зазоре соотношением

$$I = \frac{1}{n\mu_0} b_2. \tag{15}$$

Здесь $n = \frac{N}{L}$; L — длина индуктора. Подставляя (15) в (14) и учитывая (8) и (9), получаем

$$\alpha p + \beta q = \varepsilon_0, \tag{16}$$

где

$$p = \left[\frac{|Z_0|}{n\mu_0}e^{i\varphi} - i\pi N\omega\,(R_2^2 - R_1^2)\right] k' \mathcal{J}_0(k'R_1) - 2\pi R_1 N i\omega \mathcal{J}_1(k'R_1); \tag{17}$$

$$q = \left[\frac{|Z_0|}{n\mu_0}e^{i\varphi} - i\pi N\omega\,(R_2^2 - R_1^2)\right] k'' \mathcal{J}_0(k''R_1) - 2\pi R_1 N i\omega \mathcal{J}_1(k''R_1). \tag{18}$$

Уравнения (11) и (16) однозначно определяют постоянные α и β:

$$\alpha = -\frac{\varepsilon_0 g}{fq - pg}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_0 f}{fq - pg}. \tag{19}$$

Отсюда следует, что условие резонансного возбуждения колебаний рассматриваемой системы имеет вид

$$fq - pg = 0, \tag{20}$$

где величины f, g, p и q определены соответственно формулами (12), (13), (17) и (18). При этом резонансные частоты зависят как от параметров цилиндра и величины магнитного поля, так и от параметров электрической цепи индуктора. Здесь же отметим, что в случае неподвижно закрепленной поверхности цилиндра $u(R_1) = 0$ и коэффициенты f и g принимают вид

$$f = \left(\frac{1}{2} ik'^2 l^2 - 1\right) \mathcal{J}_1(k'R_1), \quad g = \left(\frac{1}{2} ik''^2 l^2 - 1\right) \mathcal{J}_1(k''R_1). \tag{21}$$

При разогреве хорошо проводящего цилиндра, материал которого слабо поглощает акустические волны, корни дисперсионного уравнения (5) приближенно определяются формулами

$$k' = k_{10} - ik_1, \quad k'' = k_{20}(1 - i)\left[1 + \frac{1}{2}\left(M^2 - \frac{1}{4} d_\eta^2\right)\right], \tag{22}$$

где

$$k_1 = \frac{k_{10}}{2}\left(\frac{M^2}{d_\sigma} + d_\eta\right); \quad k_{20} = k_{10}\frac{\sqrt{2d_\sigma}}{2},$$

причем $k_1 \ll k_{10} \ll k_{20}$. В этом случае для толстого ($R_1 \gg l$) цилиндра без учета вязкой диссипации энергии колебаний условие резонанса (20) упрощается и принимает вид

$$\left\{(1 - \sigma^*) k_{10}\left[\mathcal{J}_0(k_{10}R_1) - \frac{1}{k_{10}R_1}\mathcal{J}_1(k_{10}R_1)\right] + \frac{\sigma^*}{R_1}\mathcal{J}_1(k_{10}R_1)\right\}\left(A\sqrt{2}\, k_{20} \times \right.$$
$$\left. \times e^{i\left(\psi - \frac{3}{8}\pi\right)} + 2\pi R_1 N\omega e^{i\frac{7\pi}{8}}\right) + \sqrt{2} k_{20}\left(M^2 - \frac{1}{4} d_\eta^2\right)(1 - \sigma^*)\, e^{-i\frac{3}{8}\pi} \times$$
$$\times \left[A k_{10}\mathcal{J}_0(k_{10}R_1)\, e^{i\psi} - 2\pi R_1 N\omega e^{i\frac{\pi}{2}}\mathcal{J}_1(k_{10}R_1)\right] = 0. \tag{23}$$

Здесь A и ψ — модуль и аргумент величины

$$\frac{|Z_0|}{n\mu_0}\cos\varphi + i\left[\frac{|Z_0|}{n\mu_0}\sin\varphi - \pi N\omega\,(R_2^2 - R_1^2)\right].$$

Более детальное исследование резонансных характеристик системы производится с помощью численных расчетов на ЭВМ.

Полученные результаты позволяют вычислить средние по времени мощности джоулева q_σ и вязкого q_η тепловыделений на единицу объема (3), (4):

$$q_\sigma(r) = \frac{1}{2\sigma\mu_0^2}\frac{\partial b_1}{\partial r}\frac{\partial b_1^*}{\partial r}, \quad q_\eta(r) = \frac{1}{2}\omega^2\left[\left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{u}{r}\frac{u^*}{r}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{u^*}{r} + \frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{u}{r}\right)\right] \tag{24}$$

и на единицу длины нагреваемого образца:

$$Q_\sigma = 2\pi\int_0^{R_1} q_\sigma r\,dr = \frac{\pi n^2 \varepsilon_0^2}{\sigma |Z_0|^2 W}\left\{\frac{1}{2}\mathcal{G}^2 x_1\left[x_1\mathcal{J}_0^2(x_1) + \mathcal{J}_1^2(x_1) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 2\mathcal{J}_0(x_1)\mathcal{J}_1(x_1)\right] + 2F^2 x_2 - 2\sqrt{2}\,\mathcal{G} F x_1 \mathcal{J}_1(x_1)\right\}, \tag{25}$$

$$Q_\eta = 2\pi \int_0^{R_1} q_\eta r dr = \pi\omega^2 \left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right) \frac{\varepsilon_0^2 \mathcal{G}^2 n^2 \mu_0^2}{B_0^2 |Z_0|^2 W} \left\{ \frac{R_1}{k_{10}} \left[\frac{x_1}{2} (\mathcal{J}_0^2(x_1) + \right.\right.$$

$$+ \mathcal{J}_1^2(x_1)) - \mathcal{J}_0(x_1)\mathcal{J}_1(x_1) - \mathcal{J}_0(x_1) \frac{\partial}{\partial\delta} \mathcal{J}_\delta(x_1)|_{\delta=1} + \mathcal{J}_1(x_1) \frac{\partial}{\partial\delta} \mathcal{J}_{\delta-1}(x_1)|_{\delta=1} -$$

$$- \frac{1}{k_{10}^2} [1 - \mathcal{J}_0^2(x_1) + \mathcal{J}_1^2(x_1)] + \frac{R_1}{2k_{20}} \frac{F^2}{(1-\sigma^*)^2} + \frac{F}{(1-\sigma^*)} \left[\frac{1}{2} \frac{R_1}{k_{20}} \mathcal{J}_0(x_1) + \right.$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2k_{20}} + \frac{1}{k_{10}k_{20}} \frac{\varepsilon}{R_1} \mathcal{J}_1(x_1) + \frac{\xi - \frac{2}{3}\eta}{\xi + \frac{4}{3}\eta} \left[\frac{1}{k_{10}^2} \mathcal{J}_1^2(x_1) + \right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{2k_{20}^2} \frac{F^2}{(1-\sigma^*)^2} - \frac{1}{k_{10}k_{20}} \frac{F}{1-\sigma^*} \mathcal{J}_1(x_1) \right]\right]\right\}, \qquad (26)$$

$$F = \left\{ (1-\sigma^*) \left[\mathcal{J}_0(x_1) - \frac{1}{x_1} \mathcal{J}_1(x_1) \right] - \frac{\sigma^*}{x_1} \mathcal{J}_1(x_1) \right\},$$

$$\mathcal{G} = \sqrt{2} \left(M^2 - \frac{1}{4} d_\eta \right) (1-\sigma^*),$$

$$W = F^2 Q^2 + P^2 \mathcal{G}^2 + 2FQ \mathcal{G} \cos \left(x_1 + \frac{3}{8}\pi + \psi - \delta \right),$$

$$P = \left\{ \mathcal{J}_0^2(x_1) \cos^2\varphi + \left[\mathcal{J}_0(x_1) \sin\varphi - \frac{n\mu_0}{|Z_0|} \pi N \omega (R_2^2 - R_1^2) \mathcal{J}_0(x_1) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{n\mu_0}{|Z_0| k_{10}} 2\pi R_1 N \omega \mathcal{J}_1(x_1) \right]^2 \right\}^{1/2},$$

$$Q = \sqrt{2} \left\{ 1 + \frac{n^2\mu_0}{|Z_0|^2} \pi^2 N^2 \omega^2 \left[(R_2^2 - R_1^2) + 2\frac{R_1^2}{k_{20}^2} + 2(R_2^2 - R_1^2) \frac{R_1}{k_{20}} \right] - \right.$$

$$\left. -2 \frac{n\mu_0}{|Z_0|} \pi N \omega \left[(R_2^2 - R_1^2) \sin\varphi + \sqrt{2} \frac{R_1}{k_{20}} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right\}^{1/2},$$

$$\psi = \mathrm{Arg} \left\{ \mathcal{J}_0(x_1) \cos\varphi + i \left[\mathcal{J}_0(x_1) \sin\varphi - \frac{n\mu_0}{|Z_0|} \pi N \omega \left[\sqrt{2} (R_2^2 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - R_1^2) \mathcal{J}_0(x_1) + \frac{2R_1}{k_{10}} \mathcal{J}_1(x_1) \right]\right]\right\},$$

$$\delta = \mathrm{Arg} \left\{ \sqrt{2} \cos\left(x_2 - \frac{3}{8}\pi + \varphi \right) - \frac{n\mu_0}{|Z_0|} \pi N \omega \left[\sqrt{2} (R_2^2 - R_1^2) \cos\left(x_2 - \frac{1}{8}\pi \right) - \right.\right.$$

$$\left. -2 \frac{R_1}{k_{20}} \cos\left(x_2 - \frac{7}{8}\pi \right) \right] + i \left[\sqrt{2} \sin\left(x_2 - \frac{3}{8}\pi + \varphi \right) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{n\mu_0}{|Z_0|} \pi N \omega \left[(R_2^2 - R_1^2) \sin\left(x_2 + \frac{1}{8}\pi \right) - \frac{2R_1}{k_{20}} \sin\left(x_2 + \frac{7}{8}\pi \right) \right]\right]\right\},$$

$$x_1 = k_{10}R_1, \quad x_2 = k_{20}R_1, \quad k_{10}R_1 \ll 1, \quad k_{20}R_1 \gg 1, \quad \varepsilon \sim l.$$

В (24) звездочка означает знак комплексного сопряжения. Анализ стандартной тепловой задачи на базе совместного решения уравнений магнитоакустики и электротехники открывает возможности оптимизации всего процесса магнитозвукового разогрева.

1. *Агеев А. Н., Киселев М. И., Рыкалин Н. Н.* Оценка эффективности магнитозвукового разогрева металла в режиме бесконтактного индукционного возбуждения. — Физ. и хим. обраб. материалов, 1970, № 6, с. 2—10.
2. *Вайнберг А. М.* Индукционные плавильные печи. — М. : Энергия, 1967.—416 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М. : Наука, 1982.—620 с.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. — М. : Наука, 1965.—204 с.

5. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. — Киев : Наук. думка, 1982.—296 с.

Московское высшее техническое училище им. М. Э. Баумана

Получено 10.04.84

УДК 539.3

В. А. Осадчук, С. Я. Олейник

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГОЙ ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СИСТЕМОЙ РАЗРЕЗОВ ПО МЕРИДИАНУ И ПАРАЛЕЛЛИ

В данной работе рассматривается задача об упругом равновесии пологой изотропной сферической оболочки с двумя взаимодействующими разрезами, один из которых расположен вдоль меридиана, другой — вдоль дуги окружности. Предполагается, что противоположные берега разрезов загружены одинаковыми по абсолютной величине и противоположно направленными усилиями и моментами и в процессе деформации не контактируют между собой. Путем моделирования оболочки с разрезами сплошной оболочкой с сосредоточенными на месте разрезов внутренними источниками напряжений, обусловливающими скачки перемещений и углов поворота на разрезах [2, 3], с применением аппарата обобщенных функций задача приводится к системе восьми сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений.

Отнесем срединную поверхность рассматриваемой оболочки к полярной системе координат $(\xi,\ \beta)$, где $\xi = r/R\sqrt{c}$ — безразмерный полярный радиус $(c = h/R\sqrt{3(1-\nu^2)})$; R и $2h$ — радиус и толщина оболочки; ν — коэффициент Пуассона; β — полярный угол. Тогда систему разрешающих дифференциальных уравнений, учитывающих наличие источников собственных напряжений, запишем в виде

$$\frac{1}{D_0Rc}\nabla^2\nabla^2\varphi - \nabla^2 w = -RF_1^0(\xi,\ \beta),$$
$$\nabla^2\varphi + \frac{D_1}{Rc}\nabla^2\nabla^2 w = -D_1RF_2^0(\xi,\ \beta). \tag{1}$$

Здесь φ и w — функции напряжений и прогибов;

$$F_1^0(\xi,\ \beta) = \nabla^2\varepsilon_{22}^0 - \left(\frac{1}{\xi}\partial_1 - \partial_2^2\right)(\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) - \left(\partial_1 + \frac{1}{\xi}\right)\partial_2\varepsilon_{12}^0;$$
$$F_2^0(\xi,\ \beta) = \nabla^2(\varkappa_{11}^0 + \nu\varkappa_{22}^0) + (1-\nu)\left[\left(\frac{1}{\xi}\partial_1 - \partial_2^2\right)(\varkappa_{11}^0 - \varkappa_{22}^0) + 2\left(\partial_1 + \frac{1}{\xi}\right)\partial_2\varkappa_{12}^0\right]; \tag{2}$$
$$\nabla^2 = \frac{1}{\xi}\partial_1(\xi\partial_1) + \partial_2^2;\ \partial_1 = \frac{\partial}{\partial\xi};\ \partial_2 = \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\beta};$$
$$D_0 = 2Eh;\ D_1 = D_0R^2c^2;$$

$\varepsilon_{ij}^0,\ \varkappa_{ij}^0\ (i,\ j = 1,\ 2)$ — усредненные по толщине оболочки компоненты деформаций (дисторсий), обусловливающих собственные напряжения. При этом отдельные усилия и моменты в оболочке определяются формулами, приведенными в работе [2, 3].

Пусть расположены вдоль отрезков разрезы:

а) по меридиану $\beta = 0,\ \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$;

б) по дуге окружности $\xi = \xi_0,\ |\beta| \leqslant \beta_0$. (3)

В этом случае с использованием соотношений, устанавливающих связь между деформациями и перемещениями, и с учетом того, что перемещения