

3. Багдасарян Г. Е. Об уравнениях магнитоупругости тонких пластин в постоянном магнитном поле. — Там же, 1983, № 3, с. 47—52.
4. Багдасарян Г. Е., Акопян П. З. Магнитоупругие колебания проводящей пластинки в постоянном магнитном поле. — В кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1984, с. 17—22.
5. Болотин В. В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок. — Инж. сб., 1960, 31, с. 3—14.
6. Болотин В. В., Макаров Б. П., Мищенко Г. В., Швейко Ю. Ю. Асимптотический метод исследования спектра собственных частот упругих пластинок. — Расчеты на прочность, 1960, вып. 6, с. 231—253.
7. Кудравцев Е. П. Применение асимптотического метода для исследования собственных колебаний упругих прямоугольных пластин. — Там же, 1964, вып. 10, с. 352—362.

Ин-т механики
АН АрмССР, Ереван

Получено 23.07.84

УДК 539.3 : 538.569

А. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецкий

**МЕХАНИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО
ПОДОГРЕТОЙ ПЛАСТИНЕ НИЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТИ
ВО ВНЕШНЕМ ГАРМОНИЧЕСКОМ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Определяются температурные поля и напряжения в пластине низкой электропроводимости, находящейся в электрическом поле плоского конденсатора, между обкладками которого поддерживается разность потенциалов $\varphi|_{z=1} - \varphi|_{z=-1} = U_0 e^{i\omega t}$, где z — безразмерная координата, отнесенная к полутолщине пластины h ; U_0 — напряжение; ω — круговая частота; t — время. Пластина предварительно подогрета, и начальное распределение температуры по толщине является заданным ($T|_{t=0} = f(z)$).

Примем, что механические напряжения обусловлены начальным неоднородным распределением температуры, а также усредненными по периоду колебаний электромагнитной волны тепловыделениями, вызванными поляризацией в переменном электромагнитном поле, и джоулевыми тепловыделениями. В связи с наибольшей чувствительностью к изменению температуры электрофизических характеристик будем считать, что зависят от температуры лишь эти характеристики, а теплофизические и физико-механические — постоянны и равны приведенным. При этом электрофизические характеристики считаем также функциями частоты, известными из эксперимента. В такой постановке определение искоемых величин сводится к совместному решению уравнений электродинамики и теплопроводности при известных тепловых источниках [1] и дальнейшему нахождению напряженного состояния из уравнений квазистатической термоупругости.

Отличную от нуля составляющую напряженности электрического поля в пластине находим в квазиустановившемся приближении, т. е. в виде $E = E_0(z, t) e^{i\omega t}$, где $E_0(z, t)$ — малоизменяющаяся на периоде колебания $T = 2\pi/\omega$ функция [2]. Тогда исходная система уравнений вынужденной электростатики [6], описывающая электрическое поле плоского конденсатора, будет

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial D}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где $D = \varepsilon E$ — электрическая индукция [5]; $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$; $\text{tg } \delta = \varepsilon''/\varepsilon'$ — тангенс угла диэлектрических потерь, связанных лишь с поляризацией в переменном электромагнитном поле. Выражение для усредненной по периоду колебаний электромагнитной волны мощности тепловых источников, полученное на основании теоремы Пойнтинга в комплексной форме [5], с учетом представления E , а также малой изменчивости

на периоде колебаний температуры (и в соответствии с этим электрофизических характеристик) запишется:

$$Q = \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \varepsilon' (T) \eta (T) \{ \operatorname{Re} [E_0 (z, t)] \}^2. \quad (2)$$

Здесь $\eta (T) = \operatorname{tg} \delta = \sigma / \omega \varepsilon_0 \varepsilon' + \operatorname{tg}^{\circ} \delta$ — тангенс угла диэлектрических потерь; σ — коэффициент электропроводности; ε_0 — диэлектрическая постоянная. Присоединяя к соотношениям (1) уравнение теплопроводности при источниках тепла (2) и условиях конвективного теплообмена с внешней средой, имеющей температуру T_s (коэффициенты теплоотдачи на поверхностях $z = \pm 1$ принимаются одинаковыми и равными H), для определения напряженности электрического поля и температуры в пластине получим следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon (T) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad E = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{h^2}{\lambda} Q = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (4)$$

при граничных

$$\varphi (1, t) - \varphi (-1, t) = U_0 e^{i \omega t}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \pm \operatorname{Bi} (T - T_s) = 0 \quad \text{при } z = \pm 1 \quad (6)$$

в начальном

$$T |_{t=0} = f (z) \quad (7)$$

условиях. Здесь $\tau = at/h^2$ — критерий Фурье; $\operatorname{Bi} = 2hH$ — критерий Био; λ, a — коэффициенты тепло- и температуропроводности. Проинтегрировав уравнение (3) с учетом граничного условия (5) и исключив $E_0 (z, t)$ в выражении (2), приходим при помощи полученного соотношения к нелинейному интегродифференциальному уравнению на температурное поле:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon' \eta (T) U_0^2}{2\lambda} \left\{ \frac{2 + \operatorname{tg}^{\circ} \delta \int_{-1}^1 \operatorname{tg}^{\circ} \delta dz}{4 + \left[\int_{-1}^1 \operatorname{tg}^{\circ} \delta dz \right]^2} \right\}^2 = \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (8)$$

при граничных (6) и начальном (7) условиях.

Для большинства материалов в широком диапазоне изменения температуры зависимость тангенса угла потерь ($\operatorname{tg} \delta$) близка к линейной. Выбирая линейную аппроксимацию $\operatorname{tg} \delta$, т. е.

$$\operatorname{tg} \delta = (\operatorname{tg} \delta)_0 + k (T - T_0),$$

и учитывая, что $\operatorname{tg}^2 \delta \ll 1$, при начальном распределении температуры по толщине по кубическому полиному $f (z) = a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$ [4] с помощью преобразования Лапласа найдем

$$T (z, \tau) = -q_0/q_1 + b \cos \sqrt{q_1} z - \sum_{n=1}^{\infty} c_n (d_n \sin \lambda_n z + g_n \cos \lambda_n z) \times \\ \times \exp [-(\lambda_n^2 - q_1) \tau]. \quad (9)$$

Здесь

$$b = \frac{\operatorname{Bi} (q_0/q_1 + T_s) (\sqrt{q_1} \cos \sqrt{q_1} + \operatorname{Bi} \sin \sqrt{q_1})}{\frac{1}{2} (\operatorname{Bi}^2 - q_1) \sin 2 \sqrt{q_1} + \operatorname{Bi} \cos 2 \sqrt{q_1}};$$

$$c_n = 2 (\lambda_n^2 - \operatorname{Bi}^2) \{ \lambda_n^3 (\lambda_n^2 - q_1) [2 \operatorname{Bi} (1 + 2 \operatorname{Bi}) \lambda_n^2 - (\lambda_n^2 - \operatorname{Bi}^2) (\operatorname{Bi}^2 + \operatorname{Bi} - \lambda_n^2)] \cos 2 \lambda_n \}^{-1}; \quad d_n = (m_1 - m_2 \lambda_n^2) (\lambda_n^2 - q_1) (-\lambda_n \sin \lambda_n + \operatorname{Bi} \cos \lambda_n);$$

$$g_n = [Bi \lambda_n^2 (q_0 + T_s \lambda_n^2) + (\lambda_n^2 - q_1) (m_3 - m_4 \lambda_n^2)] (\lambda_n \cos \lambda_n + Bi \sin \lambda_n);$$

$$q_0 = \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon' [(tg \delta)_0 - k T_0] U_0^2}{8 \lambda}; \quad q_1 = q_0 \frac{k}{(tg \delta)_0 - k T_0}; \quad m_1 = 6(1 + Bi) a_1;$$

$$m_2 = (1 + Bi) a_3 + (3 + Bi) a_1; \quad m_3 = 2Bi a_2; \quad m_4 = (2 + Bi) a_2 + Bi a_4,$$

λ_n — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} 2\lambda_n = 2Bi \lambda_n^2 / (\lambda_n^2 - Bi^2);$$

T_0 — температура пластины в естественном состоянии. В частности, для теплоизолированной пластины ($Bi = 0$) формула (9) примет вид

$$T = -q_0/q_1 + (q_0/q_1 + a_2/3 + a_4) \exp(q_1 \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^n \lambda_n^{-4} \{ [6a_1 - (3a_1 + a_3) \lambda_n^2] \sin \lambda_n \sin \lambda_n z + 2a_2 \lambda_n^2 \cos \lambda_n \cos \lambda_n z \} \exp[-(\lambda_n^2 - q_1) \tau]. \quad (10)$$

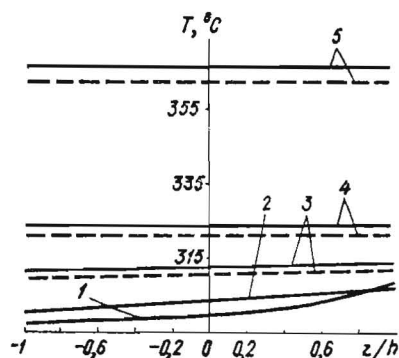


Рис. 1.

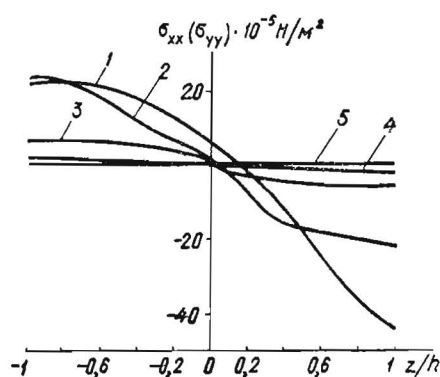


Рис. 2.

Будем считать, что края пластины $x, y \rightarrow \infty$ жестко защемлены. Тогда отличные от нуля компоненты тензора напряжений σ_{xx}, σ_{yy} будут [2]

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\alpha E}{1 - \nu} [T_1(\tau) - T(z, \tau)], \quad (11)$$

где $T_1(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 T(z, \tau) dz$; E, ν, α — модуль упругости, коэффициенты Пуассона и линейного расширения.

Численное исследование температурных полей и напряжений проводилось для теплоизолированной пластины из стекла С95-3 толщиной $2h = 1,4 \cdot 10^{-2}$ м. Характеристики материала и коэффициенты аппроксимирующего полинома a_j ($j = \overline{1, 4}$) выбирались равными [3, 7]: $\lambda = 1,6$ Вт/(м·град); $a = 8 \cdot 10^{-7}$ м²/с; $\alpha = 0,879 \cdot 10^{-5}$ град⁻¹; $E = 0,654 \times 10^{11}$ Н/м²; $T_0 = 20$ °С; $k = 4,61 \cdot 10^{-5}$ град⁻¹; $a_1 = -0,36$ град; $a_2 = 2,31$ град; $a_3 = 4,74$ град; $a_4 = 300,64$ град; $(tg \delta)_0 = 21 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon' = 6,8$.

На рис. 1, 2 представлено распределение температуры и напряжений по толщине пластины для моментов времени $t = 0$ (начальное распределение); 10; 50; 120; 300 с (соответственно кривые 1—5) при $U_0 = 4$ кВ и $f = 1,76$ МГц.

На рис. 3 представлена зависимость времени нагрева срединной поверхности пластины до температуры 400 °С (при начальной температуре $T|_{t=0} = 300$ °С) от величины напряжения U_0 при частотах $f = 0,88; 1,76; 5,28$ МГц (соответственно кривые 1—3). Сплошные и штриховые линии соответствуют расчетам с учетом и без учета температурной зависимости $\operatorname{tg} \delta$. Во втором случае значение $\operatorname{tg} \delta$ выбиралось при на-

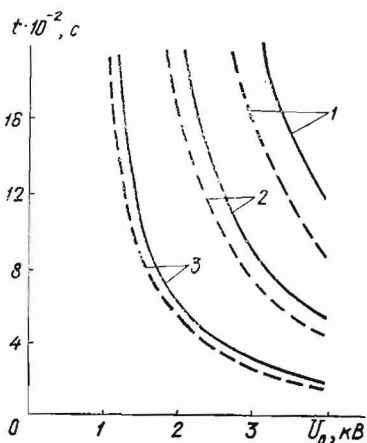


Рис. 3.

высокой частоты. Этим обеспечиваются более равномерный прогрев элемента конструкции по толщине и незначительные уровни механических напряжений.

1. Гачкевич А. Р., Мисьонг О. Р. Уравнения электродинамики и теплопроводности с учетом температурной зависимости характеристик материала.— В кн.: Физико-механические поля в деформируемых средах. Киев: Наук. думка, 1978, с. 39—42.
2. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р. и др. Термоупругость электропроводных тел.— Киев: Наук. думка, 1977.—248 с.
3. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Шепелец В. И. и др. Оптимизация и управление в электровакуумном производстве.— Киев: Наук. думка, 1980.—214 с.
4. Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А. Об уравнениях теплопроводности для тонких элементов конструкций.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 54—59.
5. Фальковский О. И. Техническая электродинамика.— М.: Связь, 1978.—432 с.
6. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике.— М.: Мир, 1966.— 296 с.
7. Эспе В. Технология электровакуумных приборов.— М.: Энергия, 1968.— 448 с.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР, Львов

Получено 17.01.84

УДК 539.3 : 538.69

М. И. Киселев, С. В. Соболев

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ УСТАНОВКИ ДЛЯ МАГНИТОЗВУКОВОГО РАЗОГРЕВА НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Известно [2], что эффективность разогрева неоднородных электропроводных материалов, предшествующего их механической обработке, существенно зависит от распределения мощности источников тепла по объему разогреваемого тела. В высокочастотных индукционных установках разогрев осуществляется в основном за счет теплопроводности материала, обеспечивающей перенос тепла из тонкого приповерхностного слоя во внутренние части образцов.

Значительного выравнивания поля температур и увеличения скорости нагрева можно достичь за счет объемного характера распределения тепловых источников путем создания в индукторе постоянного достаточно сильного магнитного поля ($B_0 \sim 10$ Т). При этом, как показано в [5], при определенных частотах интенсивность джоулева тепловыделения в твердых проводниках может на порядок превышать соответствующую интенсивность при $B_0 = 0$, а максимумы плотностей вязкого и джоулева тепловыделений в жидких металлах могут иметь одинаковые порядки [1].

чальной температуре срединной поверхности пластины.

Как видно из рис. 1—3, в процессе нагрева предварительно подогретой стеклянной пластины температура по толщине выравнивается, а величины механических напряжений значительно уменьшаются. Учет температурной зависимости электрофизических характеристик приводит к уменьшению времени нагрева до заданной температуры на 10—13 %.

Таким образом, для материалов, низкой электропроводности существенное увеличение $\text{tg} \delta$ с ростом температуры делает эффективной термообработку комбинированным методом: конвективным нагревом до определенных температур и последующим — в электрическом поле