

подходом ситуации, при которой на отслоившемся тонком недеформируемом включении заданы условия теплообмена по закону Ньютона с различными коэффициентами теплоотдачи на противоположных поверхностях.

1. Грилицький Д. В., Піддубняк О. П. Мішана задача кручення пружного тіла з шлівною. — Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1977, вип. 12, с. 85—90.
2. Карпенко Л. Н. Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи полиномов Якоби. — Прикл. математика и механика, 1966, 30, № 3, с. 564—569.
3. Новацкий В. Вопросы термоупругости. — М.: Изд-во АН СССР, 1962.— 364 с.
4. Попов Г. Я. Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби. — Укр. мат. журн., 1968, 20, № 4, с. 540—547.
5. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. — М.: Наука, 1982.—342 с.
6. Bors C. I. Tensions thermiques axialement symetriques dans les corps transversalements, isotropes. — An. stiint. Univ. Iasi. Sec. 1, 1962, 8, N 1, p. 119—126.
7. Keer L. M. Mixed boundary value problems for a penny-shaped cut. — J. Elast., 1975, 5, N 2, p. 89—98.
8. Singh A. The distribution of stresses in transversely isotropic bodies of revolution bounded by one or two cones. — J. Sci. Eng. Res., 1961, 5, N 1, p. 7—16.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 04.04.84

УДК 539.3

Н. А. Угодчиков

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕРМОУПРУГОСТИ

При проектировании крупных магнитных систем возникает проблема расчета прочности элементов их конструкций [2, 5, 10], находящихся под действием ponderomotorных сил [8] и интенсивных температурных полей. В статье излагаются постановка и численное решение задачи поэтапного комплексного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) [9] одновитковой бандажированной обмотки гипотетической тороидальной магнитной системы по конструкции и уровню магнитного поля [2, 3] близкой к существующим магнитным системам.

Обмотка рассматриваемой магнитной системы, представляющая собой кусочно-однородную пластину переменной толщины в цилиндрической системе координат с учетом плоскости симметрии $z=0$ и плоскостей циклической симметрии, изображена на рис. 1.

Применение поэтапного комплексного анализа НДС подконструкции, элемента конструкции сводится [9] к расщеплению общей задачи по физическим процессам и сведению ее к последовательному или параллельному пошаговому решению простых задач, связанных через начальные и граничные условия и удовлетворяющих требованиям однородности [11]. Комплексное исследование состояния рассматриваемой конструкции сводится к решению задач диффузии магнитного поля, теплопроводности и анализа НДС.

Каждая простая задача может быть отображена в простой модуль, решающий конкретную физическую задачу в соответствии с выбранной расчетной схемой. Информационная совместимость модулей, реализующих отдельные этапы решения, обеспечивается применением на всех этапах одного метода решения и единого тополого-геометрического представления элемента конструкции.

Предположим, что из условий постановки физического эксперимента задана форма импульса магнитного поля во времени (рис. 2, кривая 1)

в точке с координатами $z=0$, $r=40$ см. Функция $B(t)$ индукции магнитного поля от времени нормирована на максимальное значение. Пусть токонесущая часть обмотки выполнена из бронзы, а бандаж — из стали и обмотка закреплена на периферийной части ($r=180$ см) от перемещений в направлении оси r с помощью внешней силовой конструкции. Допустим, что влияние геометрической прозрачности системы на форму распределения поля и тока по токонесущей части обмотки мало, а изменение величины тока может быть учтено с помощью введения коэффициента геометрической прозрачности, зависящего от радиуса. При решении задачи анализа распределения магнитного поля учтем зависимость проводимости материала токонесущей части витка от температуры. Предположим, что за время импульса магнитного поля ($\sim 0,5$ с) влияние теплоотдачи в окружающую среду на распределение температуры по объему конструкции пренебрежимо мало.

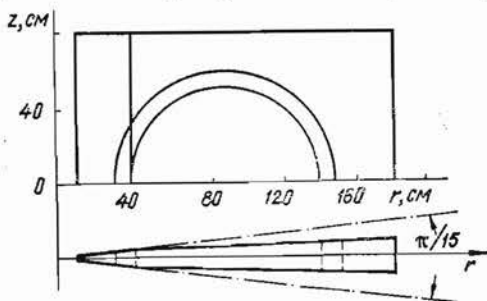


Рис. 1.

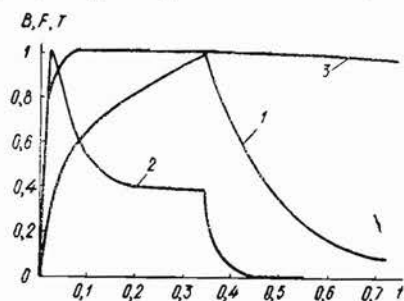


Рис. 2.

При заданном законе изменения магнитного поля и сделанных предположениях допустимы применение квазистатического приближения [6, 8] и решение задачи в двумерной постановке: задач распределения магнитного и температурного полей — в осесимметричной постановке, а задачи анализа НДС — в приближении плоской задачи термоупругости.

Можно показать, что условия стационарности функционалов

$$X_1 = \int_S \left\{ \mu \mu_0 H_\varphi \dot{H}_\varphi + \frac{1}{2z} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} r dS + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{2} (H_\varphi - \Psi)^2 r d\Gamma, \quad (1)$$

$$X_2 = \int_S \left\{ T \dot{T} + \frac{1}{2} \kappa \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{Q}{c_V \rho_m} T \right\} r dS \quad (2)$$

соответствуют выполнению уравнения диффузии магнитного поля

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} = \mu \mu_0 \sigma \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} \quad (3)$$

с граничными условиями

$$H_\varphi|_{\Gamma_2} = \Psi, \quad \frac{\partial H_\varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0 \quad (4)$$

и уравнения теплопроводности

$$\kappa \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q}{c_V \rho_m} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

В этих выражениях H_φ — тороидальная компонента вектора напряженности магнитного поля; μ_0 — магнитная постоянная; μ — относительная магнитная проницаемость; σ — проводимость среды; $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ — контур токонесущей части обмотки в плоскости (r, z) ; S — площадь,

ограниченная контуром Γ ; Γ_1 образовано отрезками прямых, лежащих в плоскости симметрии $z=0$; Γ_2 образовано двумя concentрическими полуокружностями; Ψ — заданная функция; T — температура; κ — коэффициент температуропроводности; Q — мощность источников тепла; c_V — удельная теплоемкость; ρ_m — плотность бронзы; $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к контуру Γ .

Так как проводимость и теплопроводность бронзы много больше проводимости и теплопроводности стали, при решении задачи определения температурно-силового режима работы конструкции без существенной погрешности можно перенести граничные условия с внешнего контура обмотки на внешний контур ее токонесущей части. В соответствии с теоремой о циркуляции магнитного поля [8] на внутреннем контуре токонесущей части,

$$\Psi = \frac{H_\varphi(r_0, t) r_0}{r}, \quad H_\varphi(r_0, t) = B(t) H_{\varphi \max},$$

$$r_0 = 40 \text{ см}, \quad \mu \mu_0 H_{\varphi \max} = 20 \text{ Т.}$$

Так как обмотки магнитной системы расположены достаточно плотно, на внешнем контуре токонесущей части можно задать

$$\Psi = 0.$$

Адекватность вариационной постановки задачи (1), (2) дифференциальной постановке (3), (5) с граничными условиями (4), (6) позволяет применить для реализации всех этапов решения задачи метод конечного элемента [4]. Вариационная постановка двумерных задач теории термоупругости достаточно хорошо известна [4, 7].

Для определения температурно-силового режима работы конструкции математическая постановка должна быть дополнена выражениями: 1) мощности источников тепла

$$Q = \frac{1}{k\sigma} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right)^2 \right];$$

2) компонент вектора пондеромоторной силы

$$F_r = - \frac{\mu \mu_0 H_\varphi}{k} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \quad F_z = \frac{\mu \mu_0 H_\varphi}{rk} \frac{\partial r H_\varphi}{\partial r},$$

где k — коэффициент геометрической прозрачности магнитной системы; 3) зависимости проводимости от температуры

$$\sigma = \frac{1}{\rho_0 [1 + \alpha_\sigma (T - T_0)]},$$

где ρ_0 — удельное сопротивление бронзы при температуре T_0 ; α_σ — коэффициент, характеризующий зависимость удельного сопротивления от температуры; 4) начальными условиями

$$H_\varphi(r, z, 0) = 0, \quad T_0(r, z, 0) = 0.$$

Информационно совместимые модули, реализующие решение задачи на отдельных этапах, сформированы с помощью пакета программ «Базис» [1], разработанного в НИИ механики ГГУ.

В расчет закладывались следующие данные о физико-механических свойствах материалов: бронза — $\rho_0 = 2,25 \cdot 10^{-6}$ Ом · см; $\alpha_\sigma = 2,5 \cdot 10^{-3}$ град $^{-1}$; $c_V = 0,42$ Дж · г $^{-1}$ · град $^{-1}$; $\rho_m = 8,9$ г · см $^{-3}$; $\lambda = 3,34$ Вт × м $^{-1}$ · град $^{-1}$; $E = 10^4$ кг · мм $^{-2}$; $\nu = 0,3$; сталь — $E = 2 \cdot 10^4$ кг · мм $^{-2}$; $\nu = 0,3$. Здесь λ — коэффициент теплопроводности.

Для учета зависимости проводимости бронзы от температуры организовано совместное пошаговое решение задач диффузии магнитного поля и теплопроводности.

Результаты решения приведены на рис. 2 и 3. На рис. 2 изображены отнормированные на максимальное значение зависимости от времени модуля объемной силы (кривая 2) и температуры (кривая 3) в точке $r=40$ см, $z=0$. Наличие максимума объемной силы объясняется «скакиванием» [8] поля при его быстром изменении в полости обмотки. На рис. 3 приведены значения и местоположения \min и \max эквивалентных напряжений в различные моменты времени по режиму.

Полученные данные показывают, что в результате изменения в процессе режима работы конструкции распределения физических полей изменяются вид напряженного состояния ($t = 0,025$ с — растяжение обмотки силами близкими к давлению на внутреннюю поверхность; $t = 0,37$ с — растяжение объемными силами неоднородно нагретой обмотки; $t = 0,5$ с — обжатие нагретого проводника холодным бандажом), уровень напряжений, положение областей максимальных напряжений. Таким образом, добротное решение проблем прочности подобных конструкций невозможно без предварительного анализа распределения физических полей, особенно в случае учета нелинейного поведения материала.

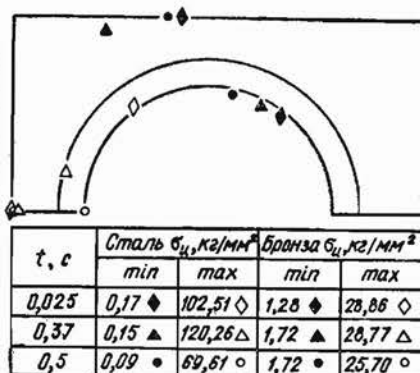


Рис. 3.

1. Берендеева А. Г., Бурина Н. С., Голениток Г. М. и др. Разработка пакета прикладных программ «Базис» для решения задач математической физики методом конечных элементов. — В кн.: Комплексы программ математической физики: Мат. VII Всесоюз. сем. по комплексам программ мат. физики (Горький, сент. 1981 г.). Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1982, с. 284—290.
2. Георгиевский А. В., Максименко В. П. Магнитная система термоядерных реакторов. Ч. 1. Магнитная система реакторов-токамаков. — Атом. техника за рубежом, 1982, № 5, с. 9—20.
3. Глухих В. А., Карасев Б. Г., Крылов В. А. и др. Основные физические и инженерные проблемы создания токамака с сильным магнитным полем и адiabатическим сжатием плазмы. — В кн.: Докл. Второй Всесоюз. конф. по инж. пробл. термоядер. реакторов (Ленинград, 23—25 июня 1981 г.): В 4-х т. Л.: НИИ электрофиз. аппаратуры, 1982, т. 1, с. 121—135.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.—541 с.
5. Монтегомери Д. Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов. — М.: Мир, 1971.—359 с.
6. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. — М.: Мир, 1970.—256 с.
7. Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.—222 с.
8. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976.—616 с.
9. Угодчиков Н. А. О создании пакета прикладных программ комплексного решения задач напряженно-деформированного состояния несущих конструкций термоядерного реактора типа токамак. — В кн.: Комплексы программ математической физики: Материалы VII Всесоюз. семинара по комплексам программ мат. физики (Горький, сент. 1981 г.). Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1982, с. 228—234.
10. Чуднов В. А. Токамаки со сверхсильным магнитным полем. — Атом. техника за рубежом, 1981, № 8, с. 3—11.
11. Яненко Н. Н. Вопросы модульного анализа и параллельных вычислений в задачах математической физики. — В кн.: Комплексы программ математической физики: Материалы VI Всесоюз. семинара по комплексам программ мат. физики (Днепропетровск, сент. 1979 г.). Новосибирск: Ин-т теорет. и прикл. механики СО АН СССР, 1980, с. 3—11.