УДК 539.377

А. П. Поддубняк

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С ДИСКООБРАЗНОЙ ЩЕЛЬЮ

Рассмотрим бесконечное трансверсально-изотропное однородное упругое тело, содержащее плоскую круговую щель радиуса a (рисунок). Предположим, что на поверхностях щели $(0 \leqslant r < a)$ заданы граничные условия смешанного типа: на верхнем берегу $z=0^+$ заданы перемещения и температура, а на нижнем $z=0^-$ — напряжения и тепловой поток. Полагая эти воздействия осесимметричными относительно оси z, запишем граничные условия следующим образом:

при $0 \leqslant r < a$

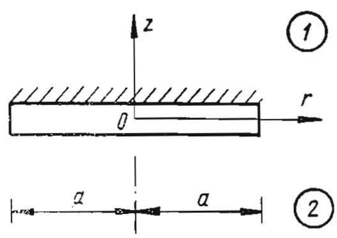
$$u_r(r,\ 0+) = aU(r/a),\quad u_z(r,\ 0+) = aW(r/a),$$
$$T(r,\ 0+) = T(r/a),\quad \sigma_z(r,\ 0-) = A_{44}\sigma(r/a), \tag{1}$$
$$\tau_{rz}(r,\ 0-) = A_{44}\tau(r/a),\quad (\partial T/\partial z)\big|_{z=0-} = \frac{1}{La}q(r/a);$$

при $r > a$

$$u_r(r,\ 0+) = u_r(r,\ 0-),\quad u_z(r,\ 0+) = u_z(r,\ 0-),$$
$$\sigma_z(r,\ 0+) = \sigma_z(r,\ 0-),\quad \tau_{rz}(r,\ 0+) = \tau_{rz}(r,\ 0-), \tag{2}$$
$$T(r,\ 0+) = T(r,\ 0-),\quad (\partial T/\partial z)\big|_{z=0+} = (\partial T/\partial z)\big|_{z=0-},$$

где u_r, u_z — компоненты вектора перемещения; σ_z, τ_{rz} — компоненты тензора напряжения; T — температуры, удовлетворяющие соответственно уравнениям Дюгамеля — Неймана и уравнению теплопроводности для трансверсально-изотропного тела, представленным в цилиндрической системе координат [3]; A_{44} — упругая постоянная трансверсально-изотропного материала; L^2 — отношение коэффициентов теплопроводности в r- и z-направлениях; функции U, W, T, σ, τ, q, заданные в правых частях условий (1), предполагаются удовлетворяющими необходимым требованиям математического аппарата, используемого в дальнейшем (в частном случае на конечных интервалах изменения своих аргументов они удовлетворяют условию Дирихле).

Аналогичные задачи в силовой постановке для изотропного тела при осесимметричной растягивающей нагрузке и при кручении рассматривались соответственно в работах [1, 5, 7].



Используя метод, предложенный в статье [6], температуру и перемещения в упругой среде можно выразить в виде интегралов Фурье — Бесселя:

$$T(r,\ z) = \int_0^\infty pD^{1,2}(p)\, e^{\mp pz/L}\, \mathcal{J}_0(pr)\, dp,$$

$$u_r(r,\ z) =$$
$$= -\sum_{j=1}^{2}\int_0^\infty \left[p^2 C_j^{1,2}(p)\, e^{\mp pz/\nu_j} + B_j D^{1,2}(p)\, e^{\mp pz/L}\right] \mathcal{J}_1(pr)\, dp, \tag{3}$$
$$u_z(r,\ z) = \mp \sum_{j=1}^{2} k_j \int_0^\infty \left[\frac{p^2}{\nu_j} C_j^{1,2}(p)\, e^{\mp pz/\nu_j} + \frac{B_j}{L} D^{1,2}(p)\, e^{\mp pz/L}\right] \mathcal{J}_0(pr)\, dp,$$
$$B_j = \frac{A_j}{\nu_j^2\left(L^{-2} - \nu_j^{-2}\right)},$$

где $\mathcal{J}_\nu(x)$ — функции Бесселя; $C_j^{1,2}$, $D^{1,2}$ — функции, подлежащие определению (индексами 1, 2 и знаками $\mp$ соответственно указана принадлежность искомых функций к полупространствам $z \gtrless 0$); A_j, k_j, ν_j $(j = 1, 2)$ — постоянные, определяющие соотношения для которых приведены в работах [3, 8].

Удовлетворив граничным условиям (1), (2), приведем задачу к системе парных интегральных уравнений относительно функций

$$g^k(\eta) = a^{-2}D^k(p), \; c_j^k(\eta) = a^{-4}C_j^k(p), \; \eta = pa. \tag{4}$$

Если произвести замены [7]:

$$\sum_{j=1}^{2}\begin{pmatrix}1\\ 1+k_j\end{pmatrix}[\eta^2(c_j^1 - c_j^2) + B_j(g^1 - g^2)] = \int_0^1 \Phi_{\binom{1}{3}}(t)\cos(\eta t)\,dt,$$

$$\sum_{j=1}^{2}\begin{pmatrix}k_j\\ 1+k_j\end{pmatrix}\left[\frac{\eta^2}{\nu_j}(c_j^1 + c_j^2) + \frac{B_j}{L}(g^1 + g^2)\right] = \int_0^1 \Phi_{\binom{2}{4}}(t)\sin(\eta t)\,dt, \tag{5}$$

$$\eta(g^1 \mp g^2) = \int_0^1 \Phi_{\binom{5}{6}}(t)\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}(\eta t)\,dt,$$

где $\Phi_n(x)$ $(n = \overline{1, 6})$ — функции, обладающие свойствами

$$\Phi_{2m-1}(x) = \Phi_{2m-1}(-x), \; \Phi_{2m}(x) = -\Phi_{2m}(-x), \tag{6}$$

$$\int_0^1 \Phi_1(x)\,dx = 0, \quad m = 1, 2, 3,$$

то граничные условия (2) удовлетворяются тождественно.

Действуя соответствующим образом операторами Сонина [7]

$$\mathcal{L}_1\{f(\rho); x\} = x\int_0^x \frac{f(\rho)\,d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}}, \; \mathcal{L}_2\{f(\rho); x\} = \int_0^x \frac{f(\rho)\,\rho d\rho}{\sqrt{x^2-\rho^2}}, \; \rho = \frac{r}{a} \tag{7}$$

на остающуюся часть системы парных интегральных уравнений (определенную при $\rho < 1$), придем к системе полных сингулярных уравнений с особым ядром типа Коши и регулярным ядром вида $\operatorname{sgn}(t - x)$ относительно функций $\Phi_1, \ldots, \Phi_2$. Введением дополнительных функций $\psi_j^{\pm}$, $\varphi^{\pm}$ $(j = 1, 2)$:

$$\Phi_{\binom{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ M_0^{-1}\end{pmatrix}[\varphi_1^+(x) \pm \varphi_1^-(x)], \quad \Phi_{\binom{3}{4}}(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -M_0\varepsilon\end{pmatrix}[\varphi_2^+(x) \pm \varphi_2^-(x)], \tag{8}$$

$$\Phi_{\binom{5}{6}}(x) = \frac{1}{2}[\psi^+(x) \pm \psi^-(x)], \quad M_0 = i\sqrt{\frac{C_1}{\varepsilon C_8}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\nu_1\nu_2}$$

указанная система расщепляется на шесть независимых сингулярных интегральных уравнений вида

$$\varphi(x) + \frac{\operatorname{tg}(\pi\alpha)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-x} = f(x), \quad |x| < 1, \tag{9}$$

точное решение которых следует из спектрального соотношения для полиномов Якоби [2, 4]:

$$g_\alpha(x)P_n^{(-\alpha,\alpha)}(x) + \frac{\operatorname{tg}(\pi\alpha)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g_\alpha(t)}{t-x}P_n^{(-\alpha,\alpha)}(t)\,dt = \tag{10}$$

$$= \sec(\pi\alpha)P_n^{(\alpha,-\alpha)}(x), \quad |x| < 1, \quad g_\alpha(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\alpha.$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$\varphi_1^{\pm}(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi_{+}^{\pm}(x) + \varphi_{-}^{\pm}(x)\right], \tag{11}$$

$$\varphi_2^{\pm}(x) = \frac{1}{2Q_0}\left[\varphi_{+}^{\pm}(x) - \varphi_{-}^{\pm}(x)\right], \quad Q_0 = \sqrt{\frac{C_1C_2}{C_5C_6}},$$

$$\varphi_{\pm}^{\pm}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n\pm}^{\pm} P_n^{\left(-\beta_{\pm}^{\pm}, \beta_{\pm}^{\pm}\right)}(x)\, g_{\beta_{\pm}^{\pm}}(x), \tag{12}$$

$$\psi^{\pm}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\pm 1)^{n+1} P_n^{\left(\mp\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4}\right)}(x)\, g_{\pm\frac{1}{4}}(x),$$

$$a_n = \frac{(n!)^2(2n+1)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(n+\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)} \int_{-1}^{1} g_{-\frac{1}{4}}(x)\, P_n^{\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)}(x)\left[q_0(x) + T_0(x)\right] dx,$$

$$b_{n\pm}^{+} = \left(b_{n\pm}^{-}\right)^{*} = \frac{i(n!)^2(2n+1)\operatorname{sh}(\pi\beta_{\pm})}{2\Gamma(n+1+i\beta_{\pm})\Gamma(n+1-i\beta_{\pm})} \times \tag{13}$$

$$\times \int_{-1}^{1} g_{-i\beta_{\pm}}(x)\, P_n^{(i\beta_{\pm}, -i\beta_{\pm})}(x)\left[f_1^{+}(x) \pm Q_0 f_2^{+}(x)\right] dx,$$

$$\beta_{\pm}^{+} = i\beta_{\pm}, \quad \beta_{\pm}^{-} = -i\beta_{\pm}, \quad \beta_{\pm} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arcth}\left[\sqrt{\varepsilon}\left(\sqrt{C_1C_6} \pm \sqrt{C_2C_5}\right)\right],$$

$$f_1^{\pm}(x) = \left[u_0(x) \pm iM_0 w_0(x)\right] - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\pm iC_4M_0\Phi_5(t) + \right.$$

$$\left. + C_3\Phi_6(t)\right]\operatorname{sgn}(t-x)\,dt, \quad f_2^{\pm}(x) = \left[\sigma_0(x) \pm \frac{i}{M_0\varepsilon}\tau_0(x)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\pm\frac{C_8}{M_0\varepsilon}\Phi_5(t) + C_7\Phi_6(t)\right]\operatorname{sgn}(t-x)\,dt.$$

В формулах (8), (11), (13) использованы обозначения:

$$u_0(x) = \frac{4}{\pi}D_x\left[\operatorname{sgn}(x)\,\mathscr{L}_1\{U(\rho);\ |x|\}\right]; \quad w_0(x) = -\frac{4}{\pi}D_x\mathscr{L}_2\{W(\rho);\ x\};$$

$$\sigma_0(x) = \frac{4}{\pi}\mathscr{L}_2\{\sigma(\rho);\ |x|\}; \quad \tau_0(x) = \frac{4}{\pi}\mathscr{L}_1\{\tau(\rho);\ |x|\} + \text{const};$$

$$T_0(x) = \frac{4}{\pi}D_x\mathscr{L}_2\{T(\rho);\ x\}; \quad q_0(x) = -\frac{4}{\pi}\mathscr{L}_2\{q(\rho);\ |x|\}; \quad D_x \equiv \frac{d}{dx};$$

$$C_1 = -\frac{\nu_1(1+k_1) - \nu_2(1+k_2)}{k_1-k_2}; \quad C_2 = -\frac{k_1\nu_2 - k_2\nu_1}{k_1-k_2};$$

$$C_3 = \sum_{m=1}^{2} B_m\left(1 - \frac{\nu_m}{L}\right); \quad C_4 = \sum_{m=1}^{2} B_m\left(1 - \frac{k_m}{\nu_m}\right); \tag{14}$$

$$C_5 = \frac{(1+k_1)(1+k_2)(\nu_1-\nu_2)}{k_1-k_2}; \quad C_6 = \frac{\nu_2k_1(1+k_2) - \nu_1k_2(1+k_1)}{k_1-k_2};$$

$$C_7 = -\sum_{m=1}^{2} B_m(1+k_m)\left(1 - \frac{\nu_m}{L}\right); \quad C_8 = \sum_{m=1}^{2} B_m(1+k_m)\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\nu_m}\right).$$

Постоянная, входящая в функцию $\tau_0(x)$ (14), определяется из второго условия соотношений (6).

Таким образом, формулы (3) — (5), (8), (11), (12) дают точное решение поставленной задачи. В качестве частных случаев отсюда получаем решение аналогичной задачи термоупругости для изотропного тела и силовой задачи для трансверсально-изотропного тела.

Заметим, что скачки нормальных напряжений и теплового потока через разрез представляются в виде

$$\Sigma(\rho) \equiv \frac{1}{A_{44}} \sigma_z\Big|_{z=0+} - \sigma(\rho) = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\int_\rho^1 \frac{t\Phi_3(t)\,dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}, \tag{15}$$

$$Q(\rho) \equiv La\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0+} - q(\rho) = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\int_\rho^1 \frac{t\Phi_6(t)\,dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}.$$

Используя формулы (8), (11), (12), нетрудно показать, что при подходе к краю щели характеристики (15) имеют следующие асимптотические представления:

$$\Sigma(\rho) \approx \frac{1}{Q_0\sqrt{2}} \operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\left[b_{n+}^{+}\frac{2^{i\beta_+}\Gamma(n+1-i\beta_+)}{n!\Gamma(1-i\beta_+)}\left(-\frac{1}{2}+i\beta_+\right)(1-\rho)^{-\frac{1}{2}-i\beta_+} - \right.$$

$$\left. - b_{n-}^{+}\frac{2^{i\beta_-}\Gamma(n+1-i\beta_-)}{n!\Gamma(1-i\beta_-)}\left(-\frac{1}{2}+i\beta_-\right)(1-\rho)^{-\frac{1}{2}-i\beta_-}\right], \tag{16}$$

$$Q(\rho) \approx 2^{-\frac{9}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right)}{n!\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} a_n (1-\rho)^{-\frac{3}{4}}, \quad \rho\to 1-0,$$

где, как следует из соотношений (13), (14), числа $\beta_\pm$ являются комплексными.

В качестве примера рассмотрим случай, когда верхняя поверхность щели жестко защемлена и поддерживается при постоянной температуре, а нижняя поверхность свободна от напряжений и теплоизолирована (это соответствует отслоившемуся тонкому жесткому включению [5]):

$$U(\rho) = W(\rho) = \sigma(\rho) = \tau(\rho) = q(\rho) \equiv 0, \;\; T(\rho) = T_0 = \text{const}.$$

Тогда для функций Φ_5, Φ_6, определяющих температуру в среде, получим простые соотношения

$$\Phi_{\binom{5}{6}}(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} T_0\left[g_{\frac{1}{4}}(x) \pm g_{-\frac{1}{4}}(x)\right].$$

В окрестности края щели имеем

$$t(\rho) \equiv T(\rho) - T|_{z=0-} \approx \frac{2^{\frac{9}{4}}}{\pi} T_0(1-\rho)^{\frac{1}{4}}, \quad Q(\rho) \approx \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\pi} T_0(1-\rho)^{-\frac{3}{4}},$$
$$\rho\to 1-0.$$

Упрощаются также соответствующие выражения для термоупругих перемещений и напряжений, поскольку в этом случае согласно (13), (14)

$$b_{n\pm}^{+} = \frac{i\operatorname{sh}(\pi\beta_\pm)(n!)^2(2n+1)}{4\Gamma(n+1+i\beta_\pm)\Gamma(n+1-i\beta_\pm)}\int_{-1}^{1} g_{-i\beta_\pm}(x) P_n^{(i\beta_\pm,-i\beta_\pm)}(x)\,dx \times$$

$$\times \int_{-1}^{1}\left[i\left(C_4M_0 \pm \frac{C_8Q_0}{M_0{}^{\varepsilon}}\right)\Phi_5(t) + (C_3 \pm C_7Q_0)\Phi_6(t)\right]\operatorname{sgn}(t-x)\,dt.$$

Заключая, отметим, что данным способом можно также точно решить задачу, когда температурные условия поменять местами. Не представляет принципиальных трудностей рассмотрение этим же подходом ситуации, при которой на отслоившемся тонком недеформируемом включении заданы условия теплообмена по закону Ньютона с различными коэффициентами теплоотдачи на противоположных поверхностях.

1. *Гриліцький Д. В., Піддубняк О. П.* Мішана задача кручення пружного тіла з щілиною. — Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1977, вип. 12, с. 85—90.
2. *Карпенко Л. Н.* Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи полиномов Якоби. — Прикл. математика и механика, 1966, 30, № 3, с. 564—569.
3. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости.— М. : Изд-во АН СССР, 1962.— 364 с.
4. *Попов Г. Я.* Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби. — Укр. мат. журн., 1968. 20. № 4, с. 540—547.
5. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. — М. : Наука, 1982.—342 с.
6. *Bors C. I.* Tensions thermiques axialement symetriques dans les corps transversalements, isotropes. — An. stiint. Univ. Iasi. Sec. 1, 1962, 8, N 1, p. 119—126.
7. *Keer L. M.* Mixed boundary value problems for a penny-shaped cut. — J. Elast., 1975, 5, N 2, p. 89—98.
8. *Singh A.* The distribution of stresses in transversely isotropic bodies of revolution bounded by one or two cones. — J. Sci. Eng. Res., 1961, 5, N 1, p. 7—16.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 04.04.84

УДК 539.3

Н. А. Угодчиков

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕРМОУПРУГОСТИ

При проектировании крупных магнитных систем возникает проблема расчета прочности элементов их конструкций [2, 5, 10], находящихся под действием пондеромоторных сил [8] и интенсивных температурных полей. В статье излагаются постановка и численное решение задачи поэтапного комплексного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) [9] одновитковой бандажированной обмотки гипотетической тороидальной магнитной системы по конструкции и уровню магнитного поля [2, 3] близкой к существующим магнитным системам.

Обмотка рассматриваемой магнитной системы, представляющая собой кусочно-однородную пластину переменной толщины в цилиндрической системе координат с учетом плоскости симметрии $z=0$ и плоскостей циклической симметрии, изображена на рис. 1.

Применение поэтапного комплексного анализа НДС подконструкции, элемента конструкции сводится [9] к расщеплению общей задачи по физическим процессам и сведению ее к последовательному или параллельному пошаговому решению простых задач, связанных через начальные и граничные условия и удовлетворяющих требованиям однородности [11]. Комплексное исследование состояния рассматриваемой конструкции сводится к решению задач диффузии магнитного поля, теплопроводности и анализа НДС.

Каждая простая задача может быть отображена в простой модуль, решающий конкретную физическую задачу в соответствии с выбранной расчетной схемой. Информационная совместимость модулей, реализующих отдельные этапы решения, обеспечивается применением на всех этапах одного метода решения и единого тополого-геометрического представления элемента конструкции.

Предположим, что из условий постановки физического эксперимента задана форма импульса магнитного поля во времени (рис. 2, кривая *1*)