$k_h = \frac{h_1}{h_2}$ между толщинами составных слоев. Сплошные кривые $1-3$ отвечают значениям $k_h = 1$; 5; 1/5. Штриховыми линиями показаны зависимости этих же частот, найденных в точной постановке, т. е. из уравнения

$$c_2 \sin\left(\omega h_2 c_2^{-1}\right) \cos\left(\omega h_1 c_1^{-1}\right) + c_1 \sin\left(\omega h_1 c_1^{-1}\right) \cos\left(\omega h_2 c_2^{-1}\right) = 0.$$

Как видно из рисунков, соответствующие точные и приближенные значения собственных частот отличаются не более чем на 15%.

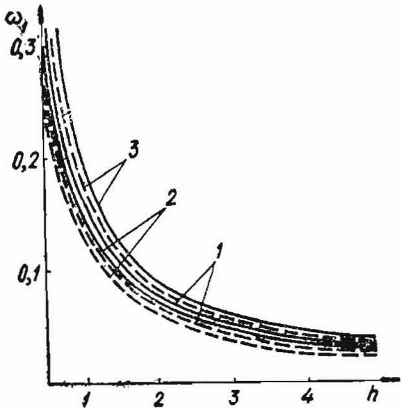

Рис. 1.

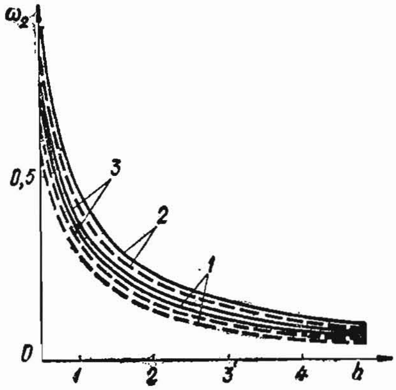

Рис. 2.

1. *Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Мусий Р. С.* Определение динамических напряжений в биметаллическом слое при нестационарном тепловом и силовом воздействии. — В кн.: Неклассические проблемы механики композиционных материалов и конструкций из них: Тез. докл. II Всесоюз. научн.-техн. семинара. Киев : Наук. думка, 1984, с. 8—9.
2. *Гачкевич А. Р., Мусий Р. С.* К определению температурных и механических полей в электропроводных пластинах при воздействии внешнего электромагнитного поля. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1984, вып. 20, с. 49—54.
3. *Гачкевич А. Р., Мусий Р. С.* Решение двумерных задач несвязанной динамической термоупругости тел с плоскопараллельными границами.— В кн.: Дифференциальные уравнения и их приложения : Вест. Льв. политехн. ин-та, Львов, 1984, с. 39—54. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 19—27 УК—84 Деп.
4. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. — Киев : Вища шк., 1975.—216 с.
5. *Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.* Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 54—59.

Львовский политехнический ин-т Получено 05.06.84

УДК 539.377

Я. И. Бурак

КРИТЕРИИ ОПТИМИЗАЦИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛ

Одним из важных этапов математической постановки задач оптимизации в механических системах является выбор критериев оптимизации. Поскольку термоупругие тела относятся к системам с распределенными параметрами, то в качестве критериев оптимизации напряженно-деформированного состояния обычно принимают функциональные критерии вида

$$\mathcal{K} = \int_0^{\tau_0} \int_{(V)} W dV d\tau, \tag{1}$$

где W — плотность локального критерия оптимизации; $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ — рассматриваемый промежуток времени; (V) — область, занимаемая телом.

В задачах оптимизации локального нагрева оболочек и пластин, когда требуется обеспечить низкий уровень напряжений или непереход в область упруго-пластического деформирования, в качестве W принимают соответственно плотность энергии упругой деформации и плотность энергии формоизменения [1—3].

При решении задач оптимизации с целью обеспечения локальных параметров качества фиксируют область изменения характеристик напряженно-деформированного состояния, пределы допустимого изменения функции W, а также используют другого вида ограничения, заданные в виде равенств или неравенств. Для обеспечения оптимизации наиболее напряженных участков тела можно эффективно использовать функцию веса критерия по координатам и времени $\varphi=\varphi(\vec{r}, \tau)$ ($\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки области (V)). При такой постановке исходный функционал (1) принимает вид

$$\mathcal{K}=\int_0^{\tau_0}\int_{(V)}\varphi W dV d\tau. \quad (2)$$

Ниже рассматриваются некоторые общие вопросы построения функциональных критериев оптимизации напряженного состояния вида (1) или (2), в частности, с целью более полного учета требований локальной оптимизации.

1. Пусть термоупругое тело, отнесенное к криволинейной системе координат $\{x^i\}$, находится в условиях нестационарного нагрева и подвергается воздействию внешних силовых нагрузок. В пределах линейной теории напряженно-деформированное состояние в каждый момент времени τ характеризуется [1, 4, 5] тензором напряжений $\hat{\sigma}=\sigma^{ij}\vec{\partial}_i\vec{\partial}_j$, тензором полной деформации $\hat{e}=e_{ij}\vec{\partial}^i\vec{\partial}^j$, тензором упругой деформации $\hat{e}^{(e)}=e_{ij}^{(e)}\vec{\partial}^i\vec{\partial}^j$ и тензором тепловой деформации $\hat{e}^{(t)}=e_{ij}^{(t)}\vec{\partial}^i\vec{\partial}^j$. Здесь $\vec{\partial}_i=\frac{\partial}{\partial x^i}\vec{r}$; $\{\vec{\partial}_i\}$, $\{\vec{\partial}^i\}$ $(i=\overline{1, 3})$ — ковариантные и контравариантные базисные векторы. Компоненты e_{ij} тензора полной деформации $\hat{e}$, которые связаны с вектором перемещений $\vec{u}=\vec{u}(\vec{r}, \tau)$ соотношениями Коши

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^i}\vec{\partial}_j+\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^j}\vec{\partial}_i\right), \quad (3)$$

представляются суммой упругой $e_{ij}^{(e)}$ и тепловой $e_{ij}^{(t)}$ составляющих, т. е.

$$e_{ij}=e_{ij}^{(e)}+e_{ij}^{(t)}. \quad (4)$$

Для изотропных термоупругих тел компоненты тензора напряжений σ^{ij} связаны с компонентами упругой деформации $e_{(e)}^{ij}$ уравнениями состояния

$$\sigma^{ij}=\left(K-\frac{2}{3}G\right)e_{(e)}g^{ij}+2Ge_{(e)}^{ij}, \quad (5)$$

где K, G — упругие характеристики материала; $e_{(e)}=e_{(e)i}^{i}$; $e_{(e)j}^{i}$, $e_{(e)}^{ij}$ — смешанные и контравариантные компоненты тензора упругой деформации $\hat{e}^{(e)}$; g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора $\hat{g}$. Компоненты $e_{ij}^{(t)}$ тензора тепловой деформации определяются через температуру T соотношениями

$$e_{ij}^{(t)}=\alpha(T-T_0)g_{ij}. \quad (6)$$

Здесь α — линейный коэффициент теплового расширения; T_0 — начальная температура тела.

В задачах оптимизации напряженного состояния функция W — локальный критерий оптимизации — может быть представлена в виде

$$W=W(\hat{\sigma}). \quad (7)$$

Для изотропных тел W является функцией скалярных инвариантов тензора $\hat{\sigma}$. В силу симметрии тензора напряжений $\hat{\sigma}$ существуют три независимых скалярных инварианта:

$$I_1 = \sigma^i{}_i,\ I_2 = \sigma^i{}_j\sigma^j{}_i,\ I_3 = \sigma^i{}_j\sigma^j{}_k\sigma^k{}_i, \tag{8}$$

т. е.

$$W = W(\{I_k\}),\ k = \overline{1,3}. \tag{9}$$

В тех задачах, в которых требуется обеспечить в теле напряженное состояние, оптимально близкое к заданному, в качестве локального критерия оптимальности естественно принять

$$W = W(\hat{\sigma}^*),\ \hat{\sigma}^* = \hat{\sigma} - \hat{\sigma}^0, \tag{10}$$

где $\hat{\sigma}^0$ — наперед заданный тензор напряжений. В соответствии с (7) и (8) можно записать

$$W = W\left(\{I_k^*\}\right),\ k = \overline{1,3}, \tag{11}$$

$$I_1^* = \sigma_*^i{}_i,\ I_2^* = \sigma_*^i{}_j\sigma_*^j{}_i,\ I_3^* = \sigma_*^i{}_j\sigma_*^j{}_k\sigma_*^k{}_i,\ \sigma_*^{ij} \equiv \sigma^{ij} - \sigma_0^{ij}.$$

При сопоставлении напряженных состояний по энергетической норме (энергетические критерии) функцию W следует представлять в виде

$$W = W(\hat{\sigma}\hat{e}^{(e)}). \tag{12}$$

Тензор $\hat{\sigma}\hat{e}^{(e)} = \sigma^{ij}e_{k\,l}^{(e)}\vec{\partial}_i\vec{\partial}_j\vec{\partial}^k\vec{\partial}^l$ имеет два независимых скалярных инварианта второго порядка, а именно:

$$I_1^{(e)} = \sigma^i{}_i e^j_{(e)j},\quad I_2^{(e)} = \sigma^i{}_j e^j_{(e)i}, \tag{13}$$

которые пропорциональны плотности энергии упругого изменения объема и энергии упругой деформации.

Если требуется оптимизировать только девиаторную составляющую напряженного состояния, то локальный критерий должен зависеть от тензора $\hat{\sigma}'\hat{e}^{(e)\prime}$. Этот тензор имеет скалярный инвариант второго порядка $I' = \sigma'^i{}_j e'^j_{(e)i}$, пропорциональный энергии формоизменения. Здесь $\hat{\sigma}' = \hat{\sigma} - \sigma^i{}_i\hat{E}/3$ — девиатор тензора напряжений; $e'^{(e)} = \hat{e}^{(e)} - e^i_{(e)i}\hat{E}/3$ — девиатор тензора упругих деформаций; $\hat{E}$ — единичный тензор.

С использованием уравнений состояния (5) энергетические критерии вида (12) могут быть представлены как функции от тензора напряжений и упругих характеристик материала модели термоупругого тела.

2. Для решения задач оптимизации, в которых требуется максимально понизить уровень напряженного состояния или обеспечить наименьшее по отклонениям приближение напряженного состояния к заданному, введем в рассмотрение функциональный критерий вида

$$\mathcal{K}_* = \int_0^{\tau_0}\int_{(V)}(\varphi W + \varphi_* W_*)\,dVd\tau, \tag{14}$$

где W_* — локальная мера изменяемости напряженного состояния по координатам и времени; $\varphi_* = \varphi_*(\vec{r}, \tau)$ — функция веса критерия W_*.

В общем случае функция W_* может быть представлена так:

$$W_* = W_*\left(\vec{\nabla}\hat{\sigma},\ \vec{\nabla}\times\hat{\sigma},\ \frac{d}{d\tau}\hat{\sigma};\ \vec{\nabla}\vec{\nabla}\hat{\sigma},\ \vec{\nabla}\times\hat{\sigma}\times\vec{\nabla},\right.$$
$$\left.\frac{d}{d\tau}\vec{\nabla}\hat{\sigma},\ \frac{d}{d\tau}(\vec{\nabla}\times\hat{\sigma}),\ \frac{d^2}{d\tau^2}\hat{\sigma},\ \ldots\right), \tag{15}$$

где $\vec{\nabla} = \vec{\partial}^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ — оператор Гамильтона; $\frac{\partial}{\partial\tau}$ — субстанциональная производная по времени.

Для изотропных тел функция W_* может быть записана как функция от скалярных инвариантов совокупности указанных тензоров. Если учитывать только тензоры $\vec{\nabla}\hat{\sigma}$, $\vec{\nabla}\times\hat{\sigma}$ и $\frac{d}{d\tau}\hat{\sigma}$, пренебречь различием между субстанциональными и локальными производными по времени $\left(\frac{d\hat{\sigma}}{d\tau}\approx\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\tau}\right)$ и ограничиться скалярными инвариантами не выше второго порядка, то функция W_* является функцией следующих инвариантов:

$$I_1^{(1)} = \mu_i{}^{jk}\mu^i{}_{jk},\quad I_2^{(1)} = \mu_i{}^{jk}\mu_{kj}{}^i,\quad I_3^{(1)} = \mu_i{}^{ik}\mu_k{}^j{}_j,$$

$$I_4^{(1)} = \mu_i{}^{ik}\mu_j{}^j{}_k,\quad I_5^{(1)} = \mu_i{}^j{}_j\mu^i{}_k{}^k;$$

$$I_1^{(2)} = \eta_i{}^i,\quad I_2^{(2)} = \eta_i{}^j\eta_j{}^i,\quad I_3^{(2)} = \eta^{ij}\eta_{ij};$$

$$I_1^{(3)} = \frac{\partial\sigma^i{}_i}{\partial\tau},\quad I_2^{(3)} = \frac{\partial\sigma^i{}_j}{\partial\tau}\frac{\partial\sigma^j{}_i}{\partial\tau},$$

$$I^{(2,3)} = \epsilon_{nki}\sqrt{g}\mu^{nki}\frac{\partial\sigma^i{}_j}{\partial\tau}. \tag{16}$$

Здесь ϵ_{ijk} — символ Леви — Чивита; $g = \mathrm{Det}\,\|g_{ij}\|$;

$$\mu_i{}^{jk} \equiv \frac{\partial\sigma^{jk}}{\partial x^i} + \sigma^{lk}\Gamma^j_{li} + \sigma^{jl}\Gamma^k_{li};\quad \eta_i{}^j \equiv (\vec{\nabla}\times\hat{\sigma})_i{}^j = \sqrt{g}\,\epsilon_{nki}\mu^{nkj};$$

$$\mu^{nkj} = \mu_m{}^{kj}g^{nm};$$

$I^{(1)}_{i_1}$, $I^{(2)}_{i_2}$, $I^{(3)}_{i_3}$ — скалярные инварианты тензоров $\vec{\nabla}\hat{\sigma}$, $\vec{\nabla}\times\hat{\sigma}$ и $\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{\sigma}$ соответственно; $I^{(2,3)}$ — скалярный инвариант, общий для тензоров $\vec{\nabla}\hat{\sigma}$ и $\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{\sigma}$; $i_1 = \overline{1,5}$; $i_2 = \overline{1,3}$; $i_3 = 1, 2$.

Отметим, что дальнейшая конкретизация критериев W и W_* должна выполняться с учетом специфики решаемых задач оптимизации, вида и характера внешних воздействий, условий существования решений формулируемых экстремальных задач термоупругости.

1. *Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д., Гера Б. В.* Оптимизация переходных процессов в термоупругих телах. — Киев : Наук. думка, 1984.—160 с.
2. *Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Кручкевич В. Ю., Подстригач Я. С.* К определению режимов локальной термообработки цилиндрических оболочек с остаточными напряжениями. — Физ.-хим. механика материалов, 1969, № 3, с. 361—369.
3. *Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. — Киев : Наук. думка, 1979.—364 с.
4. *Коваленко А. Д.* Введение в термоупругость. — Киев : Наук. думка, 1965.— 204 с.
5. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. — К. : Вид-во АН УРСР, 1961.—212 с.

Ин-т прикладных проблем механики и математики АН УССР, Львов

Получено 21.12.83

УДК 539.3

Н. В. Баничук, В. И. Герман, В. В. Кобелев

АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ АРМИРУЮЩЕГО МАТЕРИАЛА В КОНСТРУКЦИЯХ ИЗ КОМПОЗИТА

Анализ оптимальных неоднородных распределений армирующего материала в конструкциях из композита может быть проведен с использованием различных расчетных схем. По способу введения управляющих функций расчетные схемы в задачах оптимизации делятся на схемы с применением феноменологического подхода и схемы, основанные на