

конструкций. Поле применения различных численных методов здесь достаточно велико. Уточнение и модернизация созданных алгоритмов расчета могут производиться практически неограниченно. В последнее время основное внимание стало уделяться модульным программам, когда разные блоки используются для создания программ расчета аналогичных конструкций. Такая более гибкая система алгоритмизации позволяет создавать универсальные программы, пригодные как для промежуточных, так и для уточненных расчетов.

Говоря о численных методах, невозможно не упомянуть метод конечных элементов (МКЭ), который с успехом может быть применен в ряде случаев расчета слоистых конструкций. Единственным препятствием его применения является сложность структуры слоистых элементов, которая требует использования чрезвычайно большого числа конечных элементов, так что, как правило, задачи не уместаются в памяти современных ЭВМ. То же самое можно сказать о других методах дискретизации (методе сеток, конечных разностей и т. п.). На наш взгляд, наиболее удачным является разумное сочетание численных и аналитических методов. Это позволяет значительно сократить требования к памяти машины, сократить дорогостоящее машинное время и получить результат с достаточной степенью точности. Хотелось, чтобы именно по этому пути развивалась методология решения динамических задач теории многослойных конструкций и задач механики деформируемого твердого тела вообще.

В заключение укажем на некоторые монографии [1, 2], где представлены решения задач динамики многослойных конструкций, а также на обзор [4], где имеются ссылки на работы по динамике слоистых конструкций.

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. — Л.: Наука, 1974.— 448 с.
2. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. — М.: Машиностроение, 1980.—375 с.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.—343 с.
4. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние теории многослойных оболочек.— Прикл. механика, 1972, 8, № 6, с. 5—17.

Московский гидромелиоративный ин-т

Получено 20.08.84.

УДК 539.3 : 534.014

Р. С. Мусий

ОДНОМЕРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БИМЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛОМ И СИЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИЯХ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ ИЗМЕНЕНИЯ

Рассмотрим биметаллический слой толщиной $h=h_1+h_2$, отнесенный к декартовой системе координат $(x; y; z)$.

Слой находится в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. Его поверхности свободны от силовой нагрузки, а на спале ($z=0$) имеют место условия идеального теплового и механического контактов. Примем, что начальный момент времени $t=0$ вектор перемещений \vec{u} , скорости \vec{du}/dt и температура T во всей области слоя равны нулю. Материалы составных слоев изотропны и их характеристики постоянны.

Ставится задача об определении динамических напряжений в слое, обусловленных объемной силой $\vec{F}=\vec{F}(z, t)$ и температурным полем, создаваемым источниками тепла $Q=Q(z, t)$, которые имеют конечную скорость изменения.

Будем исходить из уравнений и соотношений несвязанной динамической задачи термоупругости, а также соответствующих начальных и граничных тепловых и механических условий, приведенных в работе [3].

В работе [1] предложена методика точного решения сформулированной задачи, основанная на сведении ее к более простым составным задачам. Однако в этом случае решения соответствующих задач представляются в виде сложных функциональных рядов, суммирование которых выполняется по корням громоздких трансцендентных уравнений.

Найдем приближенное решение данной задачи, основанное на аппроксимации температуры $T^{(i)}$ и нормальной к плоскости спая компоненты напряжения $\sigma^{(i)} = \sigma_{zz}$ в каждом составном слое по толщинной координате полиномиальным законом [2, 3, 5], т. е.

$$T^{(i)}(z, t) = \sum_{k=1}^m a_{k-1}^{(i)}(t) z^{k-1}, \quad \sigma^{(i)}(z, t) = \sum_{k=1}^m b_{k-1}^{(i)}(t) z^{k-1}. \quad (1)$$

Коэффициенты аппроксимирующих полиномов $a_{k-1}^{(i)}$ и $b_{k-1}^{(i)}$ выражаем через усредненные характеристики температуры и нормального напряжения в каждом составном слое:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} T_s^{(1)} \\ \sigma_s^{(1)} \end{array} \right\} &= \frac{2^{s-1}(2s-1)}{h_1^s} \int_0^{h_1} \left\{ \begin{array}{l} T^{(1)} \\ \sigma^{(1)} \end{array} \right\} z^{s-1} dz, \\ \left\{ \begin{array}{l} T_s^{(2)} \\ \sigma_s^{(2)} \end{array} \right\} &= \frac{2^{s-1}(2s-1)}{h_2^s} \int_{-h_2}^0 \left\{ \begin{array}{l} T^{(2)} \\ \sigma^{(2)} \end{array} \right\} z^{s-1} dz \end{aligned} \quad (2)$$

и заданные граничные условия. Уравнения для определения усредненных характеристик $T_s^{(i)}$, $\sigma_s^{(i)}$ получим, умножая исходные уравнения на z^{s-1} и интегрируя по z с учетом соотношений (2). При этом функции $T_0 = T(0, t)$ и $\sigma_0 = \sigma(0, t)$ выражаем через усредненные характеристики $T_s^{(i)}$ и $\sigma_s^{(i)}$ при помощи условий идеального теплового и механического контактов на спаяе. В частности, при приближении $T^{(i)}$ и $\sigma^{(i)}$ кубическим законом по z ($m = 4$, $s = \overline{1, 2}$) системы уравнений для определения усредненных характеристик $T_1^{(i)}$, $T_2^{(i)}$ и $N^{(i)} \equiv \sigma_1^{(i)}$, $M^{(i)} \equiv \sigma_2^{(i)}$ (аналогов усилий и моментов) будут соответственно вида

$$\left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{d_1}{h_1^2} \right) T_1^{(1)} - h_1^{-2} [d_2 T_2^{(1)} + d_3 T_1^{(2)} + d_4 T_2^{(2)}] = W_1^{(1)}, \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{6d_5}{h_1^2} \right) T_2^{(1)} - 6h_1^{-2} [d_6 T_1^{(1)} + d_7 T_1^{(2)} + d_8 T_2^{(2)}] = W_2^{(1)},$$

$$\left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{d_9}{h_2^2} \right) T_1^{(2)} - h_2^{-2} [d_{10} T_2^{(2)} + d_{11} T_1^{(1)} + d_{12} T_2^{(1)}] = W_1^{(2)}, \quad (4)$$

$$\left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{6d_{13}}{h_2^2} \right) T_2^{(2)} - 6h_2^{-2} [d_{14} T_1^{(2)} + d_{15} T_1^{(1)} + d_{16} T_2^{(1)}] = W_2^{(2)},$$

$$c_1^{-2} \ddot{N}^{(1)} - e_1 N^{(1)} - e_2 N^{(2)} - e_3 M^{(1)} - e_4 M^{(2)} = f_1(t),$$

$$c_1^{-2} \ddot{M}^{(1)} - e_5 N^{(1)} - e_6 N^{(2)} - e_7 M^{(1)} - e_8 M^{(2)} = f_2(t),$$

$$c_2^{-2} \ddot{N}^{(2)} - e_9 N^{(1)} - e_{10} N^{(2)} - e_{11} M^{(1)} - e_{12} M^{(2)} = f_3(t),$$

$$c_2^{-2} \ddot{M}^{(2)} - e_{13} N^{(1)} - e_{14} N^{(2)} - e_{15} M^{(1)} - e_{16} M^{(2)} = f_4(t).$$

При этом начальные условия для функций $T_1^{(i)}$, $T_2^{(i)}$ и $N^{(i)}$, $M^{(i)}$ запишутся [3]:

$$\begin{aligned} T_1^{(i)}(0) &= 0, \quad T_2^{(i)}(0) = 0, \quad N^{(i)}(0) = 0, \quad M^{(i)}(0) = 0, \\ \dot{N}^{(i)}(0) &= -\frac{\alpha_j E_j}{1-2\nu_j} \dot{T}_1^{(i)}(0), \quad \dot{M}^{(i)}(0) = -\frac{\alpha_j E_j}{1-2\nu_j} \dot{T}_2^{(i)}(0). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 W_s^{(1)} &= \gamma_s^{(1)} \int_0^{h_1} Q^{(1)} z^{s-1} dz; \quad W_s^{(2)} = \gamma_s^{(2)} \int_{-h_2}^0 Q^{(2)} z^{s-1} dz; \\
 \gamma_s^{(j)} &= \lambda_j^{-1} 2^{s-1} (2s-1) h_j^s; \\
 f_1(t) &= h_1^{-1} [F^{(1)}(h_1, t) - F^{(1)}(0, t)] - \rho_v^{(1)} \ddot{T}_1^{(1)} + 6h_1^{-1} F(t); \\
 f_2(t) &= 6h_1^{-1} [F^{(1)}(h_1, t) - 2F(t) - F_1^{(1)}(t)] - \rho_v^{(1)} \ddot{T}_2^{(1)}; \\
 f_3(t) &= 6k_h h_2^{-1} F(t) + h_2^{-1} [F^{(2)}(0, t) + F^{(2)}(-h_2, t)] - \rho_v^{(2)} \ddot{T}_1^{(2)}; \\
 f_4(t) &= 12k_h h_2^{-1} F(t) + 6h_2^{-1} [F^{(2)}(-h_2, t) - F_1^{(2)}(t)] - \rho_v^{(2)} \ddot{T}_2^{(2)}; \\
 F(t) &= F^{(1)}(0, t) - k_p F^{(2)}(0, t); \quad F_1^{(1)} = h_1^{-1} \int_0^{h_1} F^{(1)} dz; \\
 F_1^{(2)} &= h_2^{-1} \int_{-h_2}^0 F^{(2)} dz; \quad \rho_v^{(j)} = \rho_j (1 + \nu_j) (1 - \nu_j)^{-1}; \quad k_h = h_1 h_2^{-1}; \\
 k_z &= \rho_1 \rho_2^{-1}; \quad c_j^{-2} = \rho_j (1 + \nu_j) (1 - 2\nu_j) (1 - \nu_j)^{-1} E_j
 \end{aligned}$$

— скорость распространения упругой волны расширения в j -м слое; ν , α — коэффициенты температуропроводности, Пуассона и линейного расширения; E — модуль Юнга; ρ — плотность. Индексы 1, 2 введены для обозначения величин, относящихся соответственно к области первого и второго составных слоев.

Найдем также приближенные значения собственных частот ω биметаллического слоя исходя из системы уравнений (4). Используя известную методику построения уравнения для собственных частот, получим

$$A_1 \omega^4 + A_2 \omega^3 + A_3 \omega^2 + A_4 \omega + A_5 = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= c_1^{-6} c_2^{-2}; \quad A_2 = c_1^{-2} (c_1^{-2} e_{10} + c_2^{-2} \delta_1); \\
 A_3 &= c_1^{-4} (e_{10} \delta_1 - e_6 e_{11} - e_{12} e_{14} - e_2 e_9 - e_4 e_{13}); \\
 A_4 &= c_1^{-2} [e_{10} (e_1 e_7 - e_8 e_{15} - e_3 e_5) + e_{11} (e_8 e_{14} - e_1 e_6 - e_6 e_{16} + e_2 e_5) - \\
 &\quad - \delta_2 (e_1 + e_7) + e_9 (e_4 e_{14} - e_2 e_7 - e_2 e_{16}) + \\
 &\quad + e_4 e_5 e_{15} + e_{13} (e_2 e_{12} - e_4 e_7 - e_4 e_{10})] + c_2^{-2} [e_1 \delta_5 + e_3 (e_8 e_{13} - e_5 e_{16})]; \\
 A_5 &= e_1 (e_6 \delta_4 + e_7 \delta_2 + e_8 \delta_3) + \\
 &\quad + e_2 [e_9 \delta_5 - e_5 \delta_4 + e_{13} (e_8 e_{11} - e_7 e_{12})] - e_3 [e_5 \delta_2 - \\
 &\quad - e_6 (e_{12} e_{13} - e_9 e_{16}) - e_8 (e_9 e_{19} - e_{10} e_{13})] - e_4 [e_5 \delta_3 + \\
 &\quad + e_6 (e_9 e_{15} + e_{11} e_{13}) + e_7 e_9 - e_{14}] + e_7 e_{10} e_{13} e_{14}; \\
 \delta_1 &= e_1 + e_7 + e_{16}; \quad \delta_2 = e_{12} e_{14} + e_{10} e_{16}; \quad \delta_3 = e_{10} e_{15} - \\
 &\quad - e_{11} e_{14}; \quad \delta_4 = e_{11} e_{16} - e_{12} e_{15}; \quad \delta_5 = e_7 e_{16} - e_3 e_{15}; \\
 e_1 &= k^{-1} (204 + 180k_{hp}); \quad e_2 = 9/11 e_4 = -3e_6 = -108/91 e_8 = 24\delta_6; \\
 e_3 &= e_{11} = 3e_{15} = -20/3k^{-1}; \\
 e_9 &= -6e_{13} = -48k^{-1}; \quad e_5 = k^{-1} (112 + 120k_{hp}); \\
 e_7 &= -(70 + 90k_{hp}); \quad e_{10} = k^{-1} (12k_{hp} + 8); \quad e_{12} = k^{-1} (220 + \\
 &\quad + 240k_{hp})/3; \quad e_{14} = -k^{-1} (16k_{hp} + 24); \quad e_{16} = -(260 + \\
 &\quad + 420k_{hp})k^{-1}/9; \quad k = 1 + k_{hp}; \quad k_{hp} = k_h k_p; \\
 \delta_6 &= k^{-1} k_{hp}.
 \end{aligned}$$

Проведен численный анализ первых двух резонансных частот ω_1 и ω_2 для биметаллического слоя медь — сталь Х18Н9Т. На рис. 1, 2 показаны зависимости ω_1 и ω_2 от толщины слоя h при различных соотношениях

$k_n = \frac{h_1}{h_2}$ между толщинами составных слоев. Сплошные кривые 1—3 отвечают значениям $k_n = 1; 5; 1/5$. Штриховыми линиями показаны зависимости этих же частот, найденных в точной постановке, т. е. из уравнения

$$c_2 \sin(\omega h_2 c_2^{-1}) \cos(\omega h_1 c_1^{-1}) + c_1 \sin(\omega h_1 c_1^{-1}) \cos(\omega h_2 c_2^{-1}) = 0.$$

Как видно из рисунков, соответствующие точные и приближенные значения собственных частот отличаются не более чем на 15%.

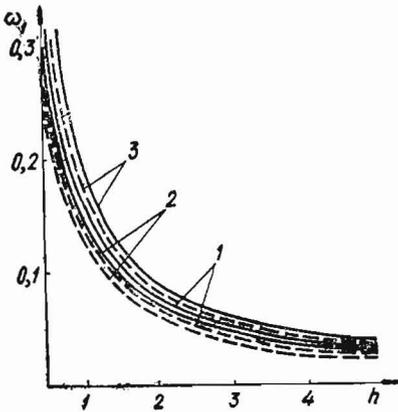


Рис. 1.

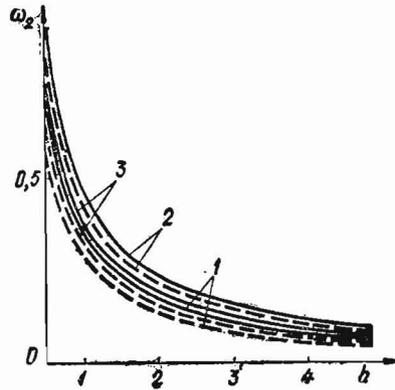


Рис. 2.

1. Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Мусий Р. С. Определение динамических напряжений в биметаллическом слое при нестационарном тепловом и силовом воздействии. — В кн.: Неклассические проблемы механики композиционных материалов и конструкций из них: Тез. докл. II Всесоюз. научн.-техн. семинара. Киев: Наук. думка, 1984, с. 8—9.
2. Гачкевич А. Р., Мусий Р. С. К определению температурных и механических полей в электропроводных пластинах при воздействии внешнего электромагнитного поля. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1984, вып. 20, с. 49—54.
3. Гачкевич А. Р., Мусий Р. С. Решение двумерных задач несвязанной динамической термоупругости тел с плоскопараллельными границами. — В кн.: Дифференциальные уравнения и их приложения: Вест. Льв. политехн. ин-та, Львов, 1984, с. 39—54. Рукопись деп. в УкрНИИТИ, № 19—27 УК—84 Деп.
4. Коваленко А. Д. Термоупругость. — Киев: Вища шк., 1975.—216 с.
5. Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А. Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 54—59.

Львовский политехнический ин-т

Получено 05.06.84

УДК 539.377

Я. И. Бурак

КРИТЕРИИ ОПТИМИЗАЦИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ ТЕЛ

Одним из важных этапов математической постановки задач оптимизации в механических системах является выбор критериев оптимизации. Поскольку термоупругие тела относятся к системам с распределенными параметрами, то в качестве критериев оптимизации напряженно-деформированного состояния обычно принимают функциональные критерии вида

$$\mathcal{K} = \int_0^{\tau_0} \int_{(V)} W dV d\tau, \quad (1)$$

где W — плотность локального критерия оптимизации; $0 \leq \tau \leq \tau_0$ — рассматриваемый промежуток времени; (V) — область, занимаемая телом.