где

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(iz^{1/2}R)\, z^{3/2}dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi i \left\{ \frac{e^{iz_1^{1/2}R} z_1^{3/2}}{2z_1 - m} - \frac{e^{iz_2^{1/2}} z_2^{3/2}}{2z_2 - m} \right\};$$

$$z_1 = \left(m - \frac{\lambda^2}{2} + \sqrt{\frac{r+x}{2}}\right) + i\left[\lambda m_1 + \sqrt{\frac{r-x}{2}}\right];$$

$$z_2 = \left(m - \frac{\lambda^2}{2} - \sqrt{\frac{r+x}{2}}\right) - i\left[\sqrt{\frac{r-x}{2}} - \lambda m_1\right]; \qquad (38)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};\ x = 4m^2\sigma^2 U_R - m\lambda^2 + \lambda^4/4;$$

$$y = [2(m - \lambda^2/2)\lambda m_1 + 4m^2\sigma^2 U_J - 2m_1 m\lambda];$$

$$U_R = (16m^2)^{-1}(\delta - \gamma);\quad U_J = (16m^2)^{-1}(\delta + \gamma). \qquad (39)$$

Анализ соотношения (37) свидетельствует о существенной зависимости функции Грина от статистических характеристик коэффициентов связности. Для определения плотности электронных состояний используем соотношение

$$\rho(E) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}\,G. \qquad (40)$$

В $\varkappa$-пространстве мнимая часть функции Грина имеет вид

$$\mathrm{Im} < g_\varkappa > = \mathrm{Im}\,(g_{0\varkappa}^{-1} - 8\pi q_\varkappa)^{-1}. \qquad (41)$$

После ряда несложных преобразований для плотности электронных состояний получаем

$$\rho(E) = \frac{16(1-m)\,\sigma^2(\delta+\gamma)(2mE)^{3/2}}{\pi\,[32mE + 16(1-m)(m-2mE) + (\delta-\gamma)]^2 + [\sigma^2 + (\delta+\gamma)^2]}. \qquad (42)$$

Из соотношения (42) ясно, что в зависимости от значений статистических характеристик коэффициентов связности расслоенного пространства, которые определяются симметрией ближнего порядка аморфного вещества, вид функции плотности электронных состояний существенно изменяется. При фиксированной энергии $\rho(E)$ принимает экстремальные значения при нулевой дисперсии, а также при $\sigma = \delta^{1/2}$, $\sigma = \frac{1}{4}$.

Полученные результаты свидетельствуют в пользу концепции нефедоровской симметрии ближнего порядка аморфного вещества [3, 5] и целесообразности его описания как расслоенного пространства.

1. *Берестецкий В. Б., Лившиц Е. М., Питаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория. Ч. 1.— М.: Наука, 1968.— 480 с.
2. *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли.— М.: Наука. 1983.— 360 с.
3. *Зюбрик А. И., Кричевец Ю. М., Манжар В. В.*—Применение теории нефедоровских групп для расчета ПЭС аморфных сред. — Аппаратура и метод рентген. анализа, 1983, № 29, с. 85.
4. *Коноплева Н. И., Попов В. Н.* Калибровочные поля. — М. : Атомиздат, 1980.— 238 с.
5. *Манжар В. В., Кричевец Ю. М.* Плотность состояний ХСП с учетом симметрии ближнего порядка. — Физ. электрон., 1982, вып. 25, с. 16.
6. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. — М. : Наука, 1978.— 463 с.

Получено 21.03.84

УДК 539.377

Ю. Н. Новичков

ДИНАМИКА СЛОИСТЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Один из наиболее сложных разделов механики многослойных конструкций составляют динамические задачи. Сложность и разнообразие структуры слоистых конструкций, многообразие динамических задач, важность этих задач для практики — все это делает этот раздел особенно интересным для исследований. В настоящей работе сделана попытка в краткой форме обобщить имеющиеся исследования и высказать некоторые общие соображения.

В настоящее время существует достаточно большое число подходов для описания деформирования слоистых конструкций. Эти подходы отличаются исходными гипотезами, возможностью описывать те или иные эффекты и, разумеется, областями применения. Выбор подходящей модели является очень ответственным шагом при решении задач динамики слоистых конструкций.

Наиболее общим подходом можно считать применение для каждого слоя уравнений динамической теории упругости с формулировкой краевых условий на лицевых и торцевых поверхностях и условий сопряжения на границах слоев:

$$\sigma_{ij,j}^{(k)} + X_i^{(k)}(t) + \rho^{(k)} u_{i,tt}^{(k)} = 0 \text{ в } V_k, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij}^{(k-1)} = \sigma_{ij}^{(k)}, \; u_i^{(k-1)} = u_i^{(k)} \text{ на } \Gamma_{kk-1}, \tag{2}$$

$$\alpha_1 \left(\sigma_{ij}^{(1)} n_j - p_{i0}\right) + \beta_1 \left(u_i^{(1)} - u_{i0}^{(1)}\right) = 0 \text{ на } \Gamma_{10}, \tag{3}$$

$$\alpha_N \left(\sigma_{ij}^{(N)} n_j - p_{iN}\right) + \beta_N \left(u_i^{(N)} - u_{i0}^{(N)}\right) = 0 \text{ на } \Gamma_{NN+1},$$

$$\tilde{\alpha}_k \left(\sigma_{ij}^{(k)} \tilde{n}_j^{(k)} - \sigma_{ij0}^{(k)}\right) + \tilde{\beta}_k \left(u_i^{(k)} - u_i^{0(k)}\right) = 0 \text{ на } \tilde{\Gamma}_k, \tag{4}$$

где Γ_{kk-1} — граница k и $k-1$ слоев; $\tilde{\Gamma}_k$ — торцевая поверхность k-го слоя.

Однако такой подход оказывается достаточно сложным, его удается реализовать лишь для неограниченных слоистых сред с относительно небольшим числом однородных слоев или для сред периодической структуры. Некоторые упрощения, которые приводят к возможности достижения результата, получаются при учете мелкослоистости среды. Вообще для бесконечных слоистых сред удается использовать методы акустики и линейной оптики и на основе этого получить эффективное решение. Фундаментальные исследования, выполненные в этом направлении, подытожены в монографии [3]. Применение этих результатов к механике слоистых конструкций почти невозможно из-за ограниченности объектов как по направлениям в поверхностях слоев, так и по направлению, перпендикулярному срединным поверхностям слоев.

Подходы, предназначенные для описания напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций ограниченной толщины, обычно делят на два класса. К первому относят теории, базирующиеся на введении гипотез для всего пакета в целом. Другой класс составляют теории, основанные на гипотезах для отдельных слоев. В связи с этим следует отметить, что первая группа теорий описывает интегральные эффекты деформирования, а вторая может описать также и некоторые локальные эффекты (зависит от введенных гипотез). Порядок разрешающих систем в теориях первой группы не зависит от числа слоев:

$$L_\gamma(\bar{u}; \; t) = 0 \;\; (\gamma = 1, 2, \ldots m), \;\; \bar{u} = (u_1, \ldots, u_m)^T. \tag{5}$$

В теориях второй группы эта зависимость существенна:

$$L_\gamma^{(k)}\left(\bar{u}^{(k)}; \; t\right) = 0 \;\; (\gamma = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, N),$$

$$\bar{u}^{(k)} = \left(u_1^{(k)}, \ldots, u_m^{(k)}\right)^T. \tag{6}$$

Последнее обстоятельство обусловливает тот факт, что теории второй группы используются реже, хотя область их применения шире области применения теорий первой группы.

Одним из важных этапов в решении динамических задач является введение гипотез об учете тех или иных инерционных членов. Этот вопрос приобретает особое значение для слоистых конструкций, поскольку его приходится решать в зависимости не только от характера исследуемых движений, но и от относительных свойств материалов отдельных слоев. Наиболее удобным и последовательным представляется вывод уравнений динамики вариационным путем, например, используя принцип Гамильтона — Остроградского:

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U - \Pi)\, dt = 0. \tag{7}$$

При применении такого подхода имеется возможность относительной оценки тех или иных динамических членов в исходном функционале, например интеграла действия по Гамильтону. Динамические члены должны быть согласованы с гипотезами, которые принимаются при подсчете энергии деформации слоистой конструкции. Поэтому при выборе модели оказывается необходимым принимать во внимание характер динамических процессов, в частности масштаб динамических возмущений, распространяющихся в конструкции, или масштабы изменения напряженно-деформированного состояния при колебаниях слоистой конструкции.

Здесь можно привести несколько примеров. Если используется подход с применением гипотез Кирхгофа — Лява для пакета в целом при изгибных деформациях слоистых плит или оболочек, то при изучении преимущественно изгибных мод можно ограничиться только учетом нормальных сил инерции. Это наиболее простой из всех возможных случаев. Применение уточненных теорий типа теории Тимошенко для пакета слоев требует учета инерционных членов, связанных с поворотом нормального элемента. Учет тангенциальных сил инерции позволяет рассмотреть преимущественно тангенциальные формы колебаний. Если в пластинах эти колебания разделяются при изучении свободных колебаний, то в оболочках они оказываются связанными и можно выделить лишь преимущественный характер форм колебаний. Если используются теории с принятием гипотез для отдельных слоев, то учет тангенциальных сил инерции для отдельных слоев позволяет уже рассмотреть не только формы тангенциальных колебаний, но также и формы колебаний, связанных с вращением интегральных нормальных элементов. Учет аналогичных эффектов для каждого слоя соответствует моментным эффектам, аналогичным тем, которые могут появиться при рассмотрении динамики в пластинах и оболочках из моментного упругого материала (среда Коссера). Наконец, при учете трансверсальной деформации в отдельных слоях учет соответствующих инерционных членов дает возможность рассмотреть различные формы движений в поперечном направлении.

Остановимся теперь на основных характерных задачах динамики для слоистых конструкций. Одной из основных задач является задача об изменении спектра собственных колебаний, т. е. задача об определении частот и форм собственных колебаний

$$A\ddot{\bar{u}} + C\bar{u} = 0, \tag{8}$$

где A, C — матричные дифференциальные или дифференциально-разностные операторы кинетической и потенциальной энергий.

Заметим, что характер спектра будет существенным образом зависеть от структуры конструкции и свойств материала отдельных слоев, не говоря уже о форме и относительных размерах.

Применение различных теорий, естественно, приводит к различным спектрам в том смысле, что в одном будет, а в другом не будет присутствовать ряд характерных частот и соответствующих форм. В том случае, если конструкция такова, что указанные частоты очень высоки, обе теории фактически дадут сведения об основной части спектра. Формы, соответствующие высоким частотам, практически возбуждаться не будут. Это связано с тем, что внешние нагрузки, как правило, не имеют составляющих с такой высокой частотой, а если такие составляющие есть, то наличие демпфирования в системе практически гасит эти колебания.

Нахождение спектра собственных колебаний является в большинстве случаев основной частью решения задачи о вынужденных колебаниях в силу возможности применения метода собственных функций с представлением решения в виде разложения по формам собственных колебаний:

$$u = \sum_j u_j \bar{\varphi}_j(\bar{x};\ t), \tag{9}$$

что сводит исследование к системе независимых уравнений

$$\ddot{u}_j + \omega^2 u_j = F_j(t). \tag{10}$$

Это позволяет решать такие задачи, как задачи о вынужденных установившихся колебаниях, неустановившихся вынужденных колебаниях, случайных колебаниях, параметрических колебаниях и др. Заметим, что многие из перечисленных задач реализованы в рамках той или иной теории многослойных конструкций. Окончательного заключения о том, что указанные задачи решены и все аспекты, связанные с ними, изучены, сделать нельзя. При этом для слоистых конструкций, по-видимому, можно обнаружить еще ряд неизученных эффектов. В качестве подобных эффектов можно указать, например, на поверхностные явления при вынужденных и параметрических колебаниях.

При рассмотрении вынужденных колебаний могут быть осуществлены различные постановки задачи. Если объект, на который действует внешняя сила, локализованная на небольшой области, велик по сравнений с этой областью, то возможна постановка задачи, отличная от традиционной. Эта постановка состоит в учете волновых явлений, в частности распространения возмущений от места приложения нагрузки.

Очевидно, что для подобной постановки необходимо, чтобы нагрузка была такой, чтобы возбуждались волны небольшой длины (высокая частота, кратковременная нагрузка, удар), много меньше размеров области, занятой телом. Вообще в слоистой среде имеется большое разнообразие волновых форм. Существует ряд волновых форм, характерных для слоистой среды, помимо P и S волн для каждого из слоев. В слоистой среде мы встречаемся с волнами Релея, Лява, Лэмба и, наконец, Стоунли. Большинство волн уже хорошо изучены. Здесь, однако, хотелось бы отметить, что еще мало решенных задач об искажении волнового поля около различных нарушений структуры среды — разрезов, включений и т. д. Решенных дифракционных задач немного, а важность их изучения несомненна. Обратим внимание, что одним из приложений этих исследований являются неразрушающие методы испытаний и дефектоскопия.

Во всех перечисленных выше задачах использовалась линейная постановка. Естественно, что многие явления могут быть изучены только при нелинейной постановке задачи. Например, возможные автоколебательные режимы, затягивание, забрасывание и срыв при вынужденных колебаниях и т. д. Подобных исследований для многослойных конструкций немного, особенно по теориям, основанным на гипотезах для отдельных слоев. Здесь имеется чрезвычайно широкая область деятельности, где можно ожидать получения интересных результатов в ближайшем будущем.

Для большинства многослойных конструкций характерно, что отдельные слои, а возможно и все, обладают широко развитыми реологическими свойствами. Игнорировать эти свойства при решении динамических задач невозможно. Учет их невозможен без применения аппарата теории вязкоупругости. Выбор подходящей модели, адекватно описывающей поведение материала слоев при колебаниях, составляет один из важных вопросов рассматриваемой области механики многослойных конструкций. Выбранная модель, кроме всего прочего, должна еще быть удобной для выполнения аналитического или численного исследований. Результатом может явиться сведение задач к уравнению

$$A\ddot{\bar{u}} + B\dot{\bar{u}} + C\bar{u} = 0, \tag{11}$$

где B — диссипативный дифференциальный оператор. Вид оператора B определяется выбранной моделью вязкоупругого поведения материала слоев многослойной конструкции.

Методы решения задачи о собственных колебаниях могут быть весьма разнообразны. Это зависит от вида конструкции, расчетной модели и целей исследования. Характер объекта и особенно краевых условий является одним из определяющих факторов выбора метода. Различный характер уравнений динамики для различных моделей также влияет на выбор метода. Например, применяя теорию, основанную на введении гипотез для отдельных слоев, для пластины или оболочки из чередующихся жестких и мягких слоев при условии отсутствия обжатия слоев, приходится решать задачу в конечных разностях. Наконец, цель исследования также влияет на выбор метода. Если необходимо знание только основной частоты, то предпочтительным является использование формулы Релея

$$\omega^2 = \frac{(C\bar{u}, \bar{u})}{(A\bar{u}, \bar{u})}. \tag{12}$$

Если необходимы сведения о спектре, то приходится обращаться к другому методу.

Точных решений задач о собственных колебаниях известно не много. Это, во-первых, решения, когда возможно разделение переменных по координатам и по времени. Здесь можно указать на задачи для стержней при некоторых дополнительных предположениях о модели, пластин и пологих оболочек с краевыми условиями Навье или Лява (шарнирное опирание по всем кромкам или по двум противоположным), круговых замкнутых цилиндрических оболочек, замкнутых сферических оболочек. В ряде случаев схема точного решения может быть реализована только с использованием ЭВМ. Регулярность структур, небольшое число слоев, пренебрежение трансверсальной деформацией позволяют упростить задачу и в некоторых случаях получить решение в замкнутой форме.

Как уже было сказано выше, для задач о вынужденных колебаниях основным можно считать метод собственных функций с дальнейшим применением аппарата теории линейных, параметрических или нелинейных колебаний. Для задач о случайных колебаниях возможно применение практически всех методов статистической динамики. Широко применимы и различные приближенные методы решения динамических краевых задач, такие, как метод Бубнова — Галеркина, Релея — Ритца и т. п.

Например, в случае метода Бубнова — Галеркина имеем

$$\left(\left[A \sum_i \ddot{u}_i \overline{\Psi}_i + C \sum_i u_i \overline{\Psi}_i\right];\ \overline{\Psi}_k\right) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

В результате вместо (10) приходим к системе уравнений

$$\sum_i (a_{ik}\ddot{u}_k + c_{ik}u_k) = 0. \tag{14}$$

В отличие от случая полного разделения переменных получаются системы связанных уравнений, решение которых затруднительно при учете большого числа членов ряда.

Перечисление можно было бы продолжить. Практически все известные аналитические методы могут быть применены к решению задач динамики многослойных конструкций.

Широкое внедрение ЭВМ в практику инженерных расчетов, которое произошло в последнее время, коснулось и механики многослойных конструкций. Поле применения различных численных методов здесь достаточно велико. Уточнение и модернизация созданных алгоритмов расчета могут производиться практически неограниченно. В последнее время основное внимание стало уделяться модульным программам, когда разные блоки используются для создания программ расчета аналогичных конструкций. Такая более гибкая система алгоритмизации позволяет создавать универсальные программы, пригодные как для промежуточных, так и для уточненных расчетов.

Говоря о численных методах, невозможно не упомянуть метод конечных элементов (МКЭ), который с успехом может быть применен в ряде случаев расчета слоистых конструкций. Единственным препятствием его применения является сложность структуры слоистых элементов, которая требует использования чрезвычайно большого числа конечных элементов, так что, как правило, задачи не умещаются в памяти современных ЭВМ. То же самое можно сказать о других методах дискретизации (методе сеток, конечных разностей и т. п.). На наш взгляд, наиболее удачным является разумное сочетание численных и аналитических методов. Это позволяет значительно сократить требования к памяти машины, сократить дорогостоящее машинное время и получить результат с достаточной степенью точности. Хотелось, чтобы именно по этому пути развивалась методология решения динамических задач теории многослойных конструкций и задач механики деформируемого твердого тела вообще.

В заключение укажем на некоторые монографии [1, 2], где представлены решения задач динамики многослойных конструкций, а также на обзор [4], где имеются ссылки на работы по динамике слоистых конструкций.

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. — Л.: Наука, 1974.— 448 с.
2. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. — М.: Машиностроение, 1980.—375 с.
3. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.—343 с.
4. *Григолюк Э. И., Коган Ф. А.* Современное состояние теории многослойных оболочек.— Прикл. механика, 1972, 8, № 6, с. 5—17.

Московский гидромелиоративный ин-т

Получено 20.08.84.

УДК 539.3 : 534.014

Р. С. Мусий

ОДНОМЕРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В БИМЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛОВОМ И СИЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИЯХ С КОНЕЧНОЙ СКОРОСТЬЮ ИЗМЕНЕНИЯ

Рассмотрим биметаллический слой толщиной $h=h_1+h_2$, отнесенный к декартовой системе координат $(x;\ y;\ z)$.

Слой находится в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. Его поверхности свободны от силовой нагрузки, а на спае $(z=0)$ имеют место условия идеального теплового и механического контактов. Примем, что начальный момент времени $t=0$ вектор перемещений $\vec{u}$, скорости $\partial\vec{u}/\partial t$ и температура T во всей области слоя равны нулю. Материалы составных слоев изотропны и их характеристики постоянны.

Ставится задача об определении динамических напряжений в слое, обусловленных объемной силой $\vec{F}=\vec{F}(z,\ t)$ и температурным полем, создаваемым источниками тепла $Q=Q(z,\ t)$, которые имеют конечную скорость изменения.