$$L(t,\ x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y}) = L_x(t,\ x,\ \dot{x},\ y,\ \dot{y}) + K_y(t,\ y,\ \dot{y}) + \frac{dV}{dt}, \tag{27}$$

$$L(t,\ x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y}) = L_y(t,\ y,\ \dot{y},\ x,\ \dot{x}) + K_x(t,\ x,\ \dot{x}) + \frac{d\bar{V}}{dt}. \tag{28}$$

Эквивалентность выражений (27) и (28) легко показать, записывая

$$\Delta \equiv L_x - L_y = K_x - K_y + \frac{d}{dt}(\bar{V} - V), \tag{29}$$

что согласуется с (25).

Аналогичная задача, связанная с построением функции Лагранжа системы двух точечных частиц, исследована в [3]; эти результаты применялись при построении квазирелятивистского лагранжиана системы гравитирующих тел [4].

В заключение подчеркнем, что наша постановка задачи требует согласно (5) лагранжевости исходной системы уравнений (3). Мы не учитываем возможности использования метода интегрирующих множителей [7, 9], который приводит к лагранжевой системе уравнений эквивалентной исходной.

1. *Голдстейн Г.* Классическая механика. — М. : Наука, 1975.—416 с.
2. *Додонов В. В., Манько В. И., Скаржинский В. Д.* Неоднозначности вариационного описания классических систем и проблема квантования.— Тр. ФИАН СССР, 1983, 152, с. 37—89.
3. *Ключковский Ю. Б.* Условия существования единой функции Лагранжа для системы двух частиц.— В кн.: Материалы VIII конф. молодых ученых Ин-та прикл. проблем мех. и мат. АН УССР. Секция механики деформируемого твердого тела, Львов, 4—8 мая 1981 г. Львов, 1982, с. 55—59. Рукопись деп. в ВИНИТИ, 23.07.82, № 3952—82 Деп.
4. *Ключковский Ю. Б.* Приближенная лоренц-инвариантность и ППН-формализм теории гравитации. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, вып. 16, с. 107—110.
5. *Мацюк Р. Я.* О существовании лагранжиана для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — Там же, 1984, вып. 20, с. 16—19.
6. *Engels E.* On the Helmholtz conditions for the existense of a Lagrange formalism. — Nuovo cim. B, 1975, 25, N 2, p. 481—492.
7. *Havas P.* The range of application of the Lagrange formalism. — Nuovo cim. Suppl., 1957, 5, N 3, p. 363—388.
8. *Henneaux M.* On the inverse problem of the calculus of variations in field theory. — J. Phys. A, 1984, 17, N 1, p. 75—86.
9. *Santilli R. M.* Foundation of theoretical mechanics.— New York etc.: Springer, 1978.— XIX, 266 p.
10. *Sarlet W., Cantrijn F.* Symmetries, first integrals, and the inverse problem of Lagrangian mechanics. — J. Phys. A, 1983, 16, N 7, p. 1383—1396.

Ин-т прикладных проблем механики и математики АН УССР, Львов

Получено 08.02.84.

УДК 530.145.6

Ю. М. Кричевец

ПЛОТНОСТЬ ЭЛЕКТРОННЫХ СОСТОЯНИЙ АМОРФНОГО ВЕЩЕСТВА В МОДЕЛИ РАССЛОЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

Если описывать аморфное вещество как расслоенное пространство, где слоем является кластер, обладающий нефедоровской симметрией, а базой пространство V_4, то геометризация взаимодействий приводит к необходимости введения коэффициентов связности расслоения Γ^a_μ, которые в совокупности с константами группы f^a_{bc} определяют тензор кривизны расслоенного пространства [4]:

$$R^a_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}\Gamma^a_{\nu]} - \frac{1}{2} f^a_{bc}\Gamma^b_{[\mu}\Gamma^c_{\nu]} \tag{1}$$

(здесь и далее латинские индексы относятся к слою, греческие — к базе).

Тензор кривизны (1) используется для построения лагранжиана системы, варьирование которого по метрике приводит к уравнениям для коэффициентов связности:

$$\partial_\nu \partial_{[\mu} \Gamma^a_{\nu]} + \frac{1}{2} f^a_{bc} \left\{ f^b_{dk} \Gamma^d_{[\mu} \Gamma^k_{\nu]} \Gamma^c_\nu - 2\partial_{[\mu} \Gamma^b_{\nu]} \Gamma^c_\nu - \partial_\nu \left(\Gamma^{\ b}_{[\mu} \Gamma^c_{\nu]} \right) \right\} = 0. \tag{2}$$

Уравнения движения определяются варьированием лагранжиана по волновой функции рассматриваемой системы и для произвольной группы Ли [2] имеют вид

$$[\gamma^\mu (\partial_\mu - \alpha_\mu) - m] \Psi = 0, \tag{3}$$

где γ^μ — матрицы Дирака; $\mu = (\overline{0,3})$; Ψ — биспинор; $\alpha_\mu = \frac{1}{2} I_a \Gamma^a_\mu$; I_a — генераторы группы Ли.

В настоящей работе предпринята попытка получить выражение для плотности электронных состояний аморфного вещества, описанного как расслоение.

Пусть в слое определена группа SU (2). Выбор конкретной группы определен необходимостью иметь равными размерности пространства базы и слоя. С учетом конкретного вида генераторов группы SU (2) уравнение (3) приобретает вид

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_i = G_{ik} + m\Psi_i, \tag{4}$$

где G_{ik} определяются коэффициентами связности расслоенного пространства

$$G_{ik} = \begin{pmatrix} \| G_1 (\Gamma^a_\nu) \| & \| G_2 (\Gamma^a_\nu) \| \\ \| G_3 (\Gamma^a_\nu) \| & \| G_4 (\Gamma^a_\nu) \| \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Если биспинор и матрицы Дирака записать в стандартном представлении [1], то после Фурье-преобразования уравнение (4) приобретает вид

$$(p^0 \gamma^0 - p\gamma) \tilde{\Psi}_i - \frac{1}{2} \tilde{G}_{ik} \Psi_k = m\Psi_i, \tag{6}$$

где $\tilde{\Psi}$ и G_{ik} — Фурье-образы Ψ и G_{ik} соответственно.

Если предположить, что на амо́рфное вещество не воздействует внешнее магнитное поле, то после обратного Фурье-преобразования в нерелятивистском пределе для стационарных состояний уравнение (6) удается привести к виду

$$\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{2} G_{13} [\Gamma^a_1 (x)] G_{34} [\Gamma^a_1 (x)] + m \right\} \Psi = 0, \tag{7}$$

где Ψ — волновая функция.

Соответствующее уравнение для функции Грина имеет вид

$$\{\nabla^2 + m [1 + \alpha (x)]\} G_{x,0} = \delta_{x-0}, \tag{8}$$

где

$$-\alpha (x) = (4m)^{-1} G_{13} [\Gamma^a_1 (x)] G_{34} [\Gamma^a_1 (x)]. \tag{9}$$

Ряд теории возмущений для функции Грина можно записать в виде

$$G_{x,0} = G^0_{x,0} - m \int G_{x,1} \alpha_1 G^0_{1,0} d^3 1 + m^2 \int G^0_{x,1} \alpha_1 G^0_{1,2} \alpha_2 G^0_{2,0} d^3 1 d^3 2 + \ldots \tag{10}$$

Поскольку коэффициенты связности являются случайными функциями $\alpha (x)$ также является случайной функцией и возникает проблема усреднения.

Если предположить, что $\alpha (x)$ — гауссово поле, то

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+1} \rangle = 0, \tag{11}$$

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n} \rangle = \sum \beta_{\alpha,\beta} \ldots \beta_{\gamma,\delta}. \tag{12}$$

Тогда, усредняя в (10) с учетом (11), (12), для усредненной функции Грина получаем

$$\langle G_{x,0}\rangle = G^0_{x,0} + m^2\int G^0_{x,1}G^0_{1,2}G^0_{2,0}\beta_{1,2}d^31d^32 +$$

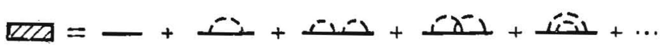
$$+ m^4\int G^0_{x,1}G^0_{1,2}G^0_{2,3}G^0_{3,4}G^0_{4,0}(\beta_{1,2}\beta_{3,4}+\beta_{1,3}\beta_{2,4}+\beta_{1,4}\beta_{2,3})\,d^31\,\ldots\,d^34, \quad (13)$$

где $G^0_{x,0} = G_0(x, x_0)$; $\beta_{ij} = \beta(x_i, x_j)$ — корреляционная функция.

Соответствующий диаграммный ряд с обозначениями

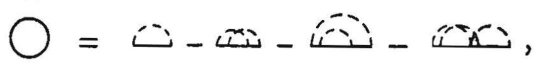
(14)

можно записать так:



(15)

Если отобрать из (15) все сильно связанные диаграммы и обозначить их сумму как $-\bigcirc-$, где



(16)

то сумму сильно связанных диаграмм можно записать в аналитическом виде следующим образом:

$$\langle G_{x,0}\rangle = \int G_{x,1}Q_{1,2}G_{2,0}d^31d^32, \quad (17)$$

где $Q_{1,2}$ — ядро массового оператора, для которого в рассматриваемом случае получается следующий ряд:

$$Q_{1,2} = m^2\beta_{1,2}G^0_{1,2} + m^4\int G^0_{1,3}G^0_{3,4}G^0_{4,2}\beta_{1,3}\beta_{3,2}d^33d^34 +$$

$$+ m^4\int G^0_{1,3}G^0_{3,4}G^0_{4,2}\beta_{1,2}\beta_{2,4}d^33d^34 + \ldots \quad (18)$$

Сумма всех диаграмм с показателем связности 2 имеет вид

(19)

Нетрудно убедиться, что, записав последовательно диаграммы с возрастающим показателем связности, ряд для усредненной функции Грина можно представить в виде

(20)

Непосредственной подстановкой можно доказать, что ряд (20) является решением уравнения Дайсона [6], которому соответствует следующее диаграммное соотношение:

(21)

В предположении статистической однородности рассматриваемых стохастических процессов $\beta_{1,0} = \beta_{1-0}$. Откуда

$$\langle G_{x,0}\rangle = \langle G_{x-0}\rangle. \quad (22)$$

Тогда уравнение (21) принимает вид

$$\langle G_{x-0}\rangle = G^0_{x-0} + \int G^0_{x-1}Q_{1-2}\langle G_{2-0}\rangle d^31d^32. \quad (23)$$

После преобразования Фурье (23) можно записать в виде алгебраического уравнения

$$\langle g_\varkappa\rangle = g_{0\varkappa} + (8\pi^3)^2 g_{0\varkappa}q_\varkappa\langle g_\varkappa\rangle, \quad (24)$$

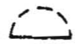
решение которого

$$\langle g_\varkappa\rangle = \{8\pi^3[m - \varkappa^2 - 8\pi^3 q_\varkappa + i(0)]\}^{-1} \quad (25)$$

после Фурье-обращения запишется как

$$<G_{x-0}> = (8\pi^3)^{-1} \int \frac{\exp[i\varkappa (x - 0)]\, d^3\varkappa}{m - \varkappa^2 - 8\pi^3 q_\varkappa + i(0)}. \tag{26}$$

Ограничиваясь приближением Бурре

$Q = Q_1 \sim$  (27)

и используя диаграммное обозначение

$\langle G_1 \rangle =$  , (28)

для средней функции Грина получаем

 (29)

В предположении статистической изотропии $<G_{x-0}> = <G_{|x-0|}>$ после перехода в сферическую систему и интегрирования по углам, средняя функция Грина приобретает вид

$$<G_R> = \frac{1}{4\pi^2 Ri} \int \frac{\exp(i\varkappa R)\, \varkappa d\varkappa}{m - \varkappa^2 - \frac{4\pi}{\varkappa} \int\limits_0^\infty Q(r) \sin \varkappa r dr}. \tag{30}$$

Соотношение (30) является точным, однако ядро массового оператора Q определено бесконечным диаграммным рядом. Для конкретных расчетов воспользуемся приближением (27), в результате чего получаем

$$<G_R> = \frac{1}{4\pi^2 Ri} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\varkappa R)\, \varkappa d\varkappa}{m - \varkappa^2 + \frac{m^2}{\varkappa} \int\limits_0^\infty \beta(r) \exp(im_1 r) \sin \varkappa r dr + i(0)}, \tag{31}$$

где

$$\beta(r) = \beta(|r - r_0|) = <(16m^2)^{-1} (G_{1.4} G_{3.4} G^0_{1.4} G^0_{3.4})>.$$

Если индексы слоя записать как ковариантные, то ненулевые матричные элементы матрицы G_{ik} запишутся так:

$$G_{3.4} = \Gamma_2 - i\Gamma_3, \;\; G_{1.4} = i\Gamma_1, \;\; \Gamma^0_a = \Gamma_a(x_0) \tag{32}$$

и корреляционная функция $\beta(r)$ примет вид

$$\beta(r) = (16m^2)^{-1} \{\sigma^2_{12} e^{-\lambda_{12} r} \delta - \sigma^2_{13} e^{-\lambda_{13} r} \gamma + i[\sigma^2_{12} e^{-\lambda_{12} r} \delta + \sigma^2_{13} e^{-\lambda_{13} r} \gamma]\}, \tag{33}$$

$$\gamma = \Gamma^0_1 \Gamma^0_2, \quad \delta = \Gamma^0_1 \Gamma^0_3.$$

В предположении статистической изотропии в пространстве слоя

$$\beta(r) = \sigma^2 e^{-\lambda r} \{(16m^2)^{-1} [\delta - \gamma + i(\delta + \gamma)]\}. \tag{34}$$

С учетом (34) соотношение (31) можно записать как

$$<G_{1R}> = \frac{1}{4\pi^2 Ri} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\varkappa R)\, \varkappa^3 d\varkappa}{m\varkappa^2 - \varkappa^4 + \mathfrak{z}(\sigma, \lambda, m_1)}, \tag{35}$$

где

$$\mathfrak{z}(\sigma, \lambda, m_1) = \frac{\sigma^2}{16} \{[(im_1 - \lambda)^2 + 1]^{-1} [(\delta - \gamma) + i(\delta + \gamma)]\}. \tag{36}$$

Заменой $\varkappa = \sqrt{z}$ соотношение (35) приводится к виду

$$<G_{1R}> = \frac{1}{4\pi^2 Ri} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(iz^{1/2} R)\, z^{3/2} dz}{(z - z_1)(z - z_2)}, \tag{37}$$

где

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(iz^{1/2}R)\, z^{3/2} dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi i \left\{ \frac{e^{iz_1^{1/2}R} z_1^{3/2}}{2z_1 - m} - \frac{e^{iz_2^{1/2}} z_2^{3/2}}{2z_2 - m} \right\};$$

$$z_1 = \left(m - \frac{\lambda^2}{2} + \sqrt{\frac{r+x}{2}}\right) + i\left[\lambda m_1 + \sqrt{\frac{r-x}{2}}\right];$$

$$z_2 = \left(m - \frac{\lambda^2}{2} - \sqrt{\frac{r+x}{2}}\right) - i\left[\sqrt{\frac{r-x}{2}} - \lambda m_1\right]; \tag{38}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};\ x = 4m^2\sigma^2 U_R - m\lambda^2 + \lambda^4/4;$$

$$y = [2(m - \lambda^2/2)\lambda m_1 + 4m^2\sigma^2 U_J - 2m_1 m\lambda];$$

$$U_R = (16m^2)^{-1}(\delta - \gamma);\ U_J = (16m^2)^{-1}(\delta + \gamma). \tag{39}$$

Анализ соотношения (37) свидетельствует о существенной зависимости функции Грина от статистических характеристик коэффициентов связности. Для определения плотности электронных состояний используем соотношение

$$\rho(E) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \operatorname{Sp} G. \tag{40}$$

В $\varkappa$-пространстве мнимая часть функции Грина имеет вид

$$\operatorname{Im} \langle g_\varkappa \rangle = \operatorname{Im} (g_{0\varkappa}^{-1} - 8\pi q_\varkappa)^{-1}. \tag{41}$$

После ряда несложных преобразований для плотности электронных состояний получаем

$$\rho(E) = \frac{16(1-m)\sigma^2(\delta+\gamma)(2mE)^{3/2}}{\pi[32mE + 16(1-m)(m-2mE) + (\delta-\gamma)]^2 + [\sigma^2 + (\delta+\gamma)^2]}. \tag{42}$$

Из соотношения (42) ясно, что в зависимости от значений статистических характеристик коэффициентов связности расслоенного пространства, которые определяются симметрией ближнего порядка аморфного вещества, вид функции плотности электронных состояний существенно изменяется. При фиксированной энергии $\rho(E)$ принимает экстремальные значения при нулевой дисперсии, а также при $\sigma = \delta^{1/2}$, $\sigma = \frac{1}{4}$.

Полученные результаты свидетельствуют в пользу концепции нефедоровской симметрии ближнего порядка аморфного вещества [3, 5] и целесообразности его описания как расслоенного пространства.

1. *Берестецкий В. Б., Лившиц Е. М., Питаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория. Ч. 1.— М.: Наука, 1968.— 480 с.
2. *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли.— М.: Наука. 1983.— 360 с.
3. *Зюбрик А. И., Кричевец Ю. М., Манжар В. В.*—Применение теории нефедоровских групп для расчета ПЭС аморфных сред. — Аппаратура и метод рентген. анализа, 1983, № 29, с. 85.
4. *Коноплева Н. И., Попов В. Н.* Калибровочные поля. — М. : Атомиздат, 1980.— 238 с.
5. *Манжар В. В., Кричевец Ю. М.* Плотность состояний ХСП с учетом симметрии ближнего порядка. — Физ. электрон., 1982, вып. 25, с. 16.
6. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. — М. : Наука, 1978.— 463 с.

Получено 21.03.84

УДК 539.377

Ю. Н. Новичков

ДИНАМИКА СЛОИСТЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Один из наиболее сложных разделов механики многослойных конструкций составляют динамические задачи. Сложность и разнообразие струк-