УДК 530.1 : 51—72

Ю. Б. Ключковский, П. П. Навроцкий

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЕДИНОЙ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ЧАСТИЧНО ЛАГРАНЖЕВОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Обратная задача вариационного исчисления — задача построения функционала действия по заданным уравнениям экстремалей — в последнее время вызывает значительный интерес, в частности, связанный с приложениями в аналитической механике [9], широко использующей представление уравнений движения в виде

$$\mathcal{L}_a L = 0 \quad (a = \overline{1, N}), \tag{1}$$

где $L(q, \dot{q})$ — функция Лагранжа; $q = \{q^a\}$ — обобщенные координаты; $\dot{q}^a = dq^a/dt$;

$$\mathcal{L}_a = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial}{\partial q^a} \tag{2}$$

— оператор Эйлера — Лагранжа [1]. Условия существования представления (1) для заданной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (так называемые условия самосопряженности [9]) были установлены Гельмгольцем еще в прошлом веке, однако различные аспекты этой проблемы, связанные с развитием математического аппарата [7, 10], физической интерпретацией [7, 2] и некоторыми обобщениями [5, 8], являются в настоящее время предметом интенсивных исследований.

Настоящая статья посвящена изучению одного частного случая указанной проблемы.

Рассмотрим систему уравнений для двух наборов переменных $x = \{x^i\}$ $(i = \overline{1, n})$ и $y = \{y^\mu\}$ $(\mu = \overline{1, m})$, зависящих от одного аргумента $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} E_i(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}) &\equiv \frac{d}{dt}\varphi_i(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}) + \gamma_i(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}) = 0, \\ E_\mu(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, x, \dot{x}, \ddot{x}) &\equiv \frac{d}{dt}\varphi_\mu(t, y, \dot{y}, x, \dot{x}) + \gamma_\mu(t, y, \dot{y}, x, \dot{x}) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть для каждой из двух подсистем системы (3) известны «индивидуальные» лагранжианы $L_x(t, x, \dot{x}, y, \dot{y})$ и $L_y(t, y, \dot{y}, x, \dot{x})$, т. е. $E_i = \mathcal{L}_i L_x$, $E_\mu = \mathcal{L}_\mu L_y$, где $\mathcal{L}_i$ и $\mathcal{L}_\mu$ — операторы Эйлера — Лагранжа в терминах переменных x^i и y^μ соответственно. Такую систему уравнений (3) назовем *частично лагранжевой*. В частности, имеем

$$\varphi_i = \frac{\partial L_x}{\partial \dot{x}^i}, \quad \gamma_i = -\frac{\partial L_x}{\partial x^i}; \quad \varphi_\mu = \frac{\partial L_y}{\partial \dot{y}^\mu}, \quad \gamma_\mu = -\frac{\partial L_y}{\partial y^\mu}. \tag{4}$$

Исследуемая задача состоит в установлении условий существования и вида единой функции Лагранжа системы (3), т. е. такой функции $L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$, что

$$E_i = \mathcal{L}_i L, \quad E_\mu = \mathcal{L}_\mu L. \tag{5}$$

При решении этой задачи удобно использовать условия самосопряженности Гельмгольца в форме, предложенной в [6] (см. также [9]). Обозначая $\{q^a\}$ $(a = \overline{1, n+m})$ совокупность переменных $\{x^i, y^\mu\}$ и вводя величины

$$\omega_{ab} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial q^b} + \frac{\partial \gamma_b}{\partial \dot{q}^a}, \tag{6}$$

указанные условия можно записать в виде

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial \dot{q}^b} = \frac{\partial \varphi_b}{\partial \dot{q}^a}, \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba}, \quad \frac{\partial \omega_{ab}}{\partial \dot{q}^c} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{d\omega_{ab}}{dt}+\frac{\partial\gamma_a}{\partial q^b}-\frac{\partial\gamma_b}{\partial q^a}=0\ (a,\ b,\ c=\overline{1,\ n+m}). \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что соотношения (7) выполняются тождественно в случае индексов a, b одного типа (i, j либо μ, ν). Остальные соотношения (7), являющиеся условиями существования единой функции Лагранжа L, с использованием (4) и обозначения $\Delta = L_x - L_y$ принимают вид

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{y}^\mu}=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\Delta}{\partial y^\mu\partial\dot{x}^i}-\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^i\partial\dot{y}^\mu}=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^3\Delta}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j\partial y^\mu}=0,\quad \frac{\partial^3\Delta}{\partial\dot{y}^\mu\partial\dot{y}^\nu\partial x^i}=0, \tag{10}$$

$$\mathcal{L}_i\frac{\partial\Delta}{\partial y^\mu}=0,\quad \mathcal{L}_\mu\frac{\partial\Delta}{\partial x^i}=0. \tag{11}$$

Отметим, что второе из уравнений (11) является следствием первого и соотношений (9).

Система уравнений (8)—(11) выражает ограничения, налагаемые условиями Гельмгольца на возможный вид индивидуальных лагранжианов L_x и L_y.

Из (10) с учетом (9) следует система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Delta}{\partial x^i}&=f_{i\mu}(t,\ x,\ y)\,\dot{y}^\mu+g_i(t,\ x,\ \dot{x},\ y),\\ \frac{\partial\Delta}{\partial y^\mu}&=f_{i\mu}(t,\ x,\ y)\,\dot{x}^i+g_\mu(t,\ y,\ \dot{y},\ x),\end{aligned} \tag{12}$$

где произвольные функции $f_{i\mu}$, g_i, g_μ должны удовлетворять условиям интегрируемости системы (12). Часть этих условий приводит к равенствам

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_i}{\partial y^\mu}&=\frac{\partial f_{j\mu}}{\partial x^i}\dot{x}^j+h_{i\mu}(t,\ x,\ y),\\ \frac{\partial g_\mu}{\partial x^i}&=\frac{\partial f_{i\nu}}{\partial y^\mu}\dot{y}^\nu+h_{i\mu}(t,\ x,\ y),\end{aligned} \tag{13}$$

где $h_{i\mu}$ произвольны. Остальные условия интегрируемости будут использованы ниже. Подставляя (12) и (13) в первое из соотношений (11), имеем

$$\frac{\partial f_{i\mu}}{\partial t}+\frac{\partial f_{i\mu}}{\partial x^j}\dot{x}^j+\frac{\partial f_{i\mu}}{\partial y^\nu}\dot{y}^\nu=\frac{\partial f_{j\mu}}{\partial x^i}\dot{x}^j+\frac{\partial f_{i\nu}}{\partial y^\mu}\dot{y}^\nu+h_{i\mu}, \tag{14}$$

откуда ввиду независимости производных $\dot{x}^i$, $\dot{y}^\nu$ получаем

$$\frac{\partial f_{i\mu}}{\partial t}=h_{i\mu}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial f_{i\mu}}{\partial x^j}=\frac{\partial f_{j\mu}}{\partial x^i},\quad \frac{\partial f_{i\mu}}{\partial y^\nu}=\frac{\partial f_{i\nu}}{\partial y^\mu}. \tag{16}$$

Последние уравнения означают, что существуют функции $\Phi_\mu(t,\ x,\ y)$ и $F_i(t,\ x,\ y)$ такие, что

$$f_{i\mu}=\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x^i}=\frac{\partial F_i}{\partial y^\mu}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует также, что

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial y^\nu}-\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial y^\mu}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial y^\mu}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}-\frac{\partial F_j}{\partial x^i}\right)=0. \tag{18}$$

Общее решение системы (17), (18) для функций Φ_μ и F_i можно представить в виде

$$\Phi_\mu = \frac{\partial}{\partial y^\mu} W(x, y, t) + \overline{\Phi}_\mu(t, y), \tag{19}$$

$$F_i = \frac{\partial}{\partial x^i} W(x, y, t) + \overline{F}_i(t, x),$$

вследствие чего

$$f_{i\mu} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^i \partial y^\mu}. \tag{20}$$

После учета соотношений (20) и (15) уравнения (13) интегрируются сразу:

$$g_i = \frac{\partial^2 W}{\partial x^i \partial x^j}\dot{x}^j + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x^i} + G_i(t, x, \dot{x}), \tag{21}$$

$$g_\mu = \frac{\partial^2 W}{\partial y^\mu \partial y^\nu}\dot{y}^\nu + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial y^\mu} + G_\mu(t, y, \dot{y}),$$

где функции G_i и G_μ вследствие условий интегрируемости системы (12), не сводящихся к (13), имеют вид

$$G_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\Psi_x(t, x, \dot{x}),\ G_\mu = \frac{\partial}{\partial y^\mu}\Psi_y(t, y, \dot{y}). \tag{22}$$

Подставляя (21) и (22) в (12), находим решения:

$$\Delta = \frac{dW}{dt} + \Psi_x + C_y(t, y, \dot{y}, \dot{x}) = \frac{dW}{dt} + \Psi_y + C_x(t, x, \dot{x}, \dot{y}). \tag{23}$$

Требуя тождественности этих выражений, имеем

$$\Psi_x - C_x = \Psi_y - C_y = H(t, \dot{x}, \dot{y}) = H_x(t, \dot{x}) + H_y(t, \dot{y}), \tag{24}$$

где последнее равенство следует из (8).

Учитывая (24) в (23) и объединяя произвольные функции от одинаковых наборов аргументов, получаем общее решение системы (8)—(11):

$$\Delta \equiv L_x - L_y = K_x(t, x, \dot{x}) - K_y(t, y, \dot{y}) + \frac{d}{dt}W(t, x, y), \tag{25}$$

где K_x и K_y — произвольные функции. Полученный результат сформулируем в следующем виде:

Утверждение 1. Частично лагранжева система уравнений (3) допускает единую функцию Лагранжа (в смысле тождеств (5)), если индивидуальные лагранжианы L_x и L_y ее подсистем удовлетворяют условию (25).

Напомним, что члены типа последнего слагаемого в (25), имеющие вид полной производной по времени, несущественны в функции Лагранжа [1].

Эффективный алгоритм построения лагранжиана L предложен в [9]: если функции $E_a(t, q, \dot{q}, \ddot{q})$, определяющие систему уравнений $E_a = 0$ $(a = \overline{1, N})$, удовлетворяют условиям Гельмгольца, то функция L такая, что $E_a = \mathcal{L}_a L$, имеет вид

$$L(t, q, \dot{q}) = -q^a \int_0^1 E_a(t, \tau q, \tau\dot{q}, \tau\ddot{q})\, d\tau + \frac{d}{dt}\Omega(t, q, \dot{q}), \tag{26}$$

где последнее слагаемое компенсирует зависимость от вторых производных $\ddot{q}^a$, содержащихся в первом члене.

Результат соответствующих вычислений в нашем случае сформулируем в следующем виде:

Утверждение 2. При выполнении условия (25) единая функция Лагранжа L для системы (3) представляется в любой из двух эквивалентных форм:

$$L(t,\ x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y}) = L_x(t,\ x,\ \dot{x},\ y,\ \dot{y}) + K_y(t,\ y,\ \dot{y}) + \frac{dV}{dt}, \qquad (27)$$

$$L(t,\ x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y}) = L_y(t,\ y,\ \dot{y},\ x,\ \dot{x}) + K_x(t,\ x,\ \dot{x}) + \frac{d\bar{V}}{dt}. \qquad (28)$$

Эквивалентность выражений (27) и (28) легко показать, записывая

$$\Delta \equiv L_x - L_y = K_x - K_y + \frac{d}{dt}(\bar{V} - V), \qquad (29)$$

что согласуется с (25).

Аналогичная задача, связанная с построением функции Лагранжа системы двух точечных частиц, исследована в [3]; эти результаты применялись при построении квазирелятивистского лагранжиана системы гравитирующих тел [4].

В заключение подчеркнем, что наша постановка задачи требует согласно (5) лагранжевости исходной системы уравнений (3). Мы не учитываем возможности использования метода интегрирующих множителей [7, 9], который приводит к лагранжевой системе уравнений эквивалентной исходной.

1. *Голдстейн Г.* Классическая механика. — М. : Наука, 1975.—416 с.
2. *Додонов В. В., Манько В. И., Скаржинский В. Д.* Неоднозначности вариационного описания классических систем и проблема квантования.— Тр. ФИАН СССР, 1983, **152**, с. 37—89.
3. *Ключковский Ю. Б.* Условия существования единой функции Лагранжа для системы двух частиц.— В кн.: Материалы VIII конф. молодых ученых Ин-та прикл. проблем мех. и мат. АН УССР. Секция механики деформируемого твердого тела, Львов, 4—8 мая 1981 г. Львов, 1982, с. 55—59. Рукопись деп. в ВИНИТИ, 23.07.82, № 3952—82 Деп.
4. *Ключковский Ю. Б.* Приближенная лоренц-инвариантность и ППН-формализм теории гравитации. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, вып. 16, с. 107—110.
5. *Мацюк Р. Я.* О существовании лагранжиана для неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — Там же, 1984, вып. 20, с. 16—19.
6. *Engels E.* On the Helmholtz conditions for the existense of a Lagrange formalism. — Nuovo cim. B, 1975, **25**, N 2, p. 481—492.
7. *Havas P.* The range of application of the Lagrange formalism. — Nuovo cim. Suppl., 1957, **5**, N 3, p. 363—388.
8. *Henneaux M.* On the inverse problem of the calculus of variations in field theory. — J. Phys. A, 1984, **17**, N 1, p. 75—86.
9. *Santilli R. M.* Foundation of theoretical mechanics.— New York etc.: Springer, 1978.— XIX, 266 p.
10. *Sarlet W., Cantrijn F.* Symmetries, first integrals, and the inverse problem of Lagrangian mechanics. — J. Phys. A, 1983, **16**, N 7, p. 1383—1396.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 08.02.84.

УДК 530.145.6

Ю. М. Кричевец

ПЛОТНОСТЬ ЭЛЕКТРОННЫХ СОСТОЯНИЙ АМОРФНОГО ВЕЩЕСТВА В МОДЕЛИ РАССЛОЕННОГО ПРОСТРАНСТВА

Если описывать аморфное вещество как расслоенное пространство, где слоем является кластер, обладающий нефедоровской симметрией, а базой пространство V_4, то геометризация взаимодействий приводит к необходимости введения коэффициентов связности расслоения Γ^a_μ, которые в совокупности с константами группы f^a_{bc} определяют тензор кривизны расслоенного пространства [4]:

$$R^a_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}\Gamma^a_{\nu]} - \frac{1}{2} f^a_{bc}\Gamma^b_{[\mu}\Gamma^c_{\nu]} \qquad (1)$$

(здесь и далее латинские индексы относятся к слою, греческие — к базе).