$$
N = \left|\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\bar i & \bar j & \bar k & & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & \bar j & & \bar k & \bar i & & & & & & & & & & & & \\
 & & & \bar i & \bar k & & & \bar j & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \bar j & \bar i & & & \bar k & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \bar k & \bar i & & & \bar j & & & & & \\
 & & & & & & & & & \bar i & & \bar j & & & \bar k & & & & \\
 & & & & & & & & & \bar j & & & \bar k & & \bar i & & & & \\
 & & & & & & & & & & \bar j & & & & & \bar k & \bar i & & \\
 & & & & & & & & & & & \bar k & & \bar i & & & & \bar j & \\
 & & & & & & & & & & & & \bar i & & \bar j & & & & \bar k \\
\hline
\multicolumn{19}{c}{O}
\end{array}\right|
$$


1. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы. — М. : Наука, 1977.—440 с.



Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов



Получено 17.02.84



УДК 539.30



В. П. Баран


## ПРИНЦИП МАКСИМУМА МОДУЛЯ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

Обзор работ по доказательству принципа максимума можно найти в [4]. Пусть $G$ — область в евклидовом пространстве $R^3$. Ищется достаточно гладкий вектор $\vec{W}$:

$$
\vec{U}(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{W}(x, \omega)\, e^{-i\omega\tau} d\omega, \tag{1}
$$

удовлетворяющий в области $G$ уравнению

$$
a\Delta\vec{W} + b \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{W} + \Lambda\vec{W} = 0. \tag{2}
$$

**Теорема 1.** Пусть в области $G$ функция $\vec{W}$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда для того, чтобы внутри области величина функции не могла иметь максимума, достаточно выполнения условия

$$
\Lambda_1 < \Lambda_2 < 0. \tag{3}
$$

Здесь введены обозначения $\Lambda_1 = \frac{\Lambda}{a+b}$, $\Lambda_2 = \frac{\Lambda}{a}$.

Доказательство. Решение однородного уравнения (2) можно представить в виде суммы $\vec{W} = \vec{W}_1 + \vec{W}_2$ и в $G$

$$
(\Delta + \Lambda_1)\vec{W}_1 = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{W}_1 = 0, \tag{4}
$$

$$
(\Delta + \Lambda_2)\vec{W}_2 = 0, \quad \operatorname{div}\vec{W}_2 = 0. \tag{5}
$$

Обозначим

$$
\vec{\Psi} = \operatorname{Re}\vec{W} = \operatorname{Re}\vec{W}_1 + \operatorname{Re}\vec{W}_2 = \vec{\Psi}_1 + \vec{\Psi}_2,
$$

$$
\vec{\Phi} = \operatorname{Im}\vec{W} = \operatorname{Im}\vec{W}_1 + \operatorname{Im}\vec{W}_2 = \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2.
$$

Исходя из уравнений (2), (4), (5) получаем два различных по записи соотношения для $\vec{\Psi}\Delta\vec{\Psi}$:

$$
\vec{\Psi}\Delta\vec{\Psi} = -\frac{\Lambda}{a}\vec{\Psi}^2 + \frac{\Lambda}{a}\cdot\frac{b}{a+b}\left(\vec{\Psi}_1^2 + \vec{\Psi}_1\vec{\Psi}_2\right), \tag{6}
$$

$$\vec{\Psi}\Delta\vec{\Psi} = -\frac{\Lambda}{a+b}\vec{\Psi}^2 - \frac{\Lambda}{a+b}\cdot\frac{b}{a}\left(\vec{\Psi}_2^2 + \vec{\Psi}_1\vec{\Psi}_2\right). \quad (7)$$

Если $\Lambda < 0$, то, как следует из (6), (7), $\vec{\Psi}\Delta\vec{\Psi} > 0$, если только $\vec{\Psi}_1$ и $\vec{\Psi}_2$ удовлетворяют неравенству $\vec{\Psi}_1\vec{\Psi}_2 < -\vec{\Psi}_1^2$ или $\vec{\Psi}_1\vec{\Psi}_2 > -\vec{\Psi}_2^2$.

Пусть

$$\vec{\Psi}_1^2 > \vec{\Psi}_2^2 \quad (8)$$

и

$$-\vec{\Psi}_1^2 < \vec{\Psi}_1\vec{\Psi}_2 < -\vec{\Psi}_2^2.$$

Используя неравенство

$$-(\Lambda_1 + \Lambda_2)\vec{\Psi}_1\vec{\Psi}_2 \geqslant \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2}\left(\vec{\Psi}_1^2 + \vec{\Psi}_2\right)$$

справедливое при $\Lambda_1 + \Lambda_2 \leqslant 0$ и то обстоятельство, что

$$\vec{\Psi}\Delta\vec{\Psi} = -\Lambda_1\vec{\Psi}_1^2 - (\Lambda_1 + \Lambda_2)\vec{\Psi}_1\vec{\Psi}_2 - \Lambda_2\vec{\Psi}_2^2, \quad (9)$$

получаем

$$\vec{\Psi}\Delta\vec{\Psi} \geqslant \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{2}\left(\vec{\Psi}_2^2 - \vec{\Psi}_1^2\right). \quad (10)$$

Согласно (8), (10) и в этом случае $\vec{\Psi}\Delta\vec{\Psi} \geqslant 0$, если только $\Lambda_1 < \Lambda_2$.

Оператор Лапласа от квадрата модуля удовлетворяет неравенству

$$\Delta|\vec{\Psi}|^2 > \vec{\Psi}_1\Delta\vec{\Psi}_1 + \vec{\Psi}_2\Delta\vec{\Psi}_2 + \vec{\Psi}_3\Delta\vec{\Psi}_3 = \vec{\Psi}\Delta\vec{\Psi} \geqslant 0. \quad (11)$$

Аналогично можно доказать неравенство $\Delta|\vec{\Phi}|^2 > 0$. Следовательно, $|\vec{W}| = \sqrt{\vec{\Phi}^2 + \vec{\Psi}^2}$ не может иметь максимума в области $G$.

Теорему 1 можно использовать для доказательства теорем единственности.

**Теорема** 2. Пусть $\vec{W}^{(1)}$ и $\vec{W}^{(2)}$ — два достаточно гладких решения

$$\mu\Delta\vec{W} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{W} + \rho\omega^2\vec{W} = \vec{F}(x), \quad (12)$$

$$\vec{W}|_s = \vec{f}(x). \quad (13)$$

$\vec{F}(x) \equiv 0$ всюду, кроме ограниченной подобласти $G_f \subset G$, $\vec{f}(x) \equiv 0$, кроме ограниченной подобласти $S_f \subset S$. $S$ — поверхность, образованная семейством, может быть, и бесконечным (замкнутыми или уходящими на бесконечности поверхностями). Если при $\mathrm{Re}\,\omega = 0$, $|\mathrm{Im}\,\omega| > 0$ выполнено условие

$$\lim_{|x|\to\infty}|\vec{W}^{(1)} - \vec{W}^{(2)}| = 0, \text{ то } \vec{W}^{(1)} \equiv \vec{W}^{(2)}.$$

Доказательство теоремы основывается на теореме 1 и аналитическом критерии принципа причинности [3]. Причем полученное аналитическим продолжением решение при $\mathrm{Im}\,\omega = 0$ будет также единственным.

В области $G$ задана задача несвязанной термоупругости в пространстве изображений Фурье по времени:

$$\mu\Delta\vec{W} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{W} - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_t\,\mathrm{grad}\,t + \rho\omega^2\vec{W} = \vec{F}(x), \quad (14)$$

$$\Delta t + i\omega t = Q(x), \quad (15)$$

$$\vec{W}|_s = \vec{f}(x), \quad (16)$$

$$\frac{\partial t}{\partial n} + kt|_s = T(x). \quad (17)$$

На $\tilde{F}$, $Q$, $\tilde{f}$, $T$ накладываются ограничения аналогичные ограничениям теоремы 2

**Теорема 3.** Пусть $\vec{W}^{(1)}$, $\vec{W}^{(2)}$, $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ — два решения (14)—(17) в $G$. Если выполнены условия при $\operatorname{Re}\omega = 0$, $\operatorname{Im}\omega > 0$

$$\lim_{|x|\to\infty} |\vec{W}^{(1)} - \vec{W}^{(2)}| = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} |t^{(1)} - t^{(2)}| = 0, \quad \text{то } \vec{W}^{(1)} \equiv \vec{W}^{(2)}, t^{(1)} \equiv t^{(2)}.$$

Доказательство требует привлечения результатов работы [2] и в дальнейшем не отличается от доказательства теоремы 2.

Если выполняется аналитический критерий принципа причинности, то так же легко могут быть доказаны, на основании работы [2], теоремы единственности квазистатической задачи термоупругости для полупространства, если силовая часть задачи аналогична условиям теоремы 7.1, 7.2, 7.3 работы [1, гл. II].

**Теорема 4.** Пусть $\vec{W}^{(1)}(x, \omega)$, $\vec{W}^{(2)}(x, \omega)$, $t^{(1)}(x, \omega)$, $t^{(2)}(x, \omega)$ — два регулярных в полупространстве $x_3 \geqslant 0$ решения уравнений

$$\mu\Delta\vec{W} + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{W} - \rho\operatorname{grad} t = 0, \tag{18}$$

$$\Delta t + \frac{i\omega}{a} t = 0. \tag{19}$$

Если выполнены условия $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \neq \frac{3}{2}$ и $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \neq \frac{1}{2}$, $\mu \neq 0$,

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{-1} |W_i^{(1)}| - W_i^{(2)}| = 0, \; i = 1, 2, 3, \tag{20}$$

$$\vec{W}^{(1)}|_{x_3=0} = \vec{W}^{(2)}|_{x_3=0} = \vec{\varphi}(x), \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial t^{(1)}}{\partial n} + kt^{(1)}\right|_{x_3=0} = \left.\frac{\partial t^{(2)}}{\partial n} + kt^{(2)}\right|_{x_3=0} = T, \tag{22}$$

то $\vec{W}^{(1)} \equiv \vec{W}^{(2)}$, $t^{(1)} \equiv t^{(2)}$.

**Теорема 5.** Если два поля напряжений $T\vec{W}^{(1)}(x, \omega)$, $T\vec{W}^{(2)}(x, \omega)$ имеют равные значения на границе $x_3 = 0$, для температуры справедливы граничные условия (22) и выполнены условия

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{-1} |\tau_{3i}(x, \omega)| = 0, \; i = 1, 2, 3, \tag{23}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} |\tau_{\alpha\beta}(x, \omega)| = 0, \quad \alpha, \beta = 1,2, \tag{24}$$

$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \neq \frac{1}{2}$, $\mu \neq 0$, то $T\vec{W}^{(1)}(x,\omega) \equiv T\vec{W}^{(2)}(x, \omega)$, $t^{(1)} \equiv t^{(2)}$,

а смещения определяются с точностью до перемещения тела как жесткого целого.

**Теорема 6.** Если на граничной плоскости $x_3 = 0$ выполнены условия

$$W_3^{(1)}(x, \omega) - W_3^{(2)}(x, \omega) = 0, \; \tau_{3i}^{(1)}(x, \omega) - \tau_{3i}^{(2)}(x, \omega) = 0, \; i = 1, 2, \tag{25}$$

или условия

$$W_i^{(1)}(x, \omega) - W_i^{(2)}(x, \omega) = 0, \; i = 1, 2, \; \tau_{33}^{(1)}(x, \omega) - \tau_{33}^{(2)}(x, \omega) = 0, \tag{26}$$

$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \neq \frac{1}{2}$, $\mu \neq 0$, то поле напряжений и температура определяются однозначно, а смещения отличаются один от другого на жесткое смещение тела как целого.

Отметим, что доказательство теорем единственности может быть приведено и при использовании гиперболического уравнения теплопроводности.

Результаты теоремы 1 могут быть использованы также при решении задач с нелинейными граничными условиями на основе теорем сравнения и численного обращения преобразования Лапласа.

1. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башалейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М.: Наука, 1976.—627 с.
2. *Малюжинец Г. Д.* Задача о скачке в теории дифракции. — Тр. Акуст. ин-та, 1971, вып. 15, с. 140—168.
3. *Нуссенцвейг Х. М.* Причинность и дисперсионные соотношения.— М.: Мир, 1976.—402 с.
4. *Sperb R. P.* Maximum principles and their applications. — New York etc.: Acad. press, 1981. — 224 p.

Львовский государственный
ун-т им. Ив. Франко

Получено 11.04.84

УДК 539.3

М. Г. Грингауз, Л. А. Фильштинский

## МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ СРЕД С РАЗРЕЗАМИ

Исходной при использовании методов механики разрушения [8] служит, в частности, поставляемая теорией упругости информация о напряженно-деформированном состоянии вблизи вершин трещин (математических разрезов).

Методы решения двумерных краевых задач для областей с разрезами, когда последние целиком (включая вершины) расположены в однородной среде, разработаны к настоящему времени достаточно полно. Подробную библиографию по этим вопросам можно найти в [7].

Отличия в развитии трещин в структурно-неоднородных телах, в том числе в композиционных материалах, обусловлены, в первую очередь, наличием поверхностей раздела, которые могут являться как преградой на пути распространения трещин, так и их источником. Важное значение в связи с этим приобретает исследование полей напряжений вблизи разрезов, частично или полностью расположенных на линиях раздела сред с различными упругими свойствами.

Известно большое количество работ, посвященных решению такого рода задач для некоторых частных конфигураций, преимущественно для прямых и круговых разрезов и линий раздела.

Одним из методов, свободных от таких жестких ограничений на форму границы области, является метод интегральных уравнений.

В [2] в рамках метода интегральных уравнений была рассмотрена задача о продольном сдвиге анизотропной среды, содержащей двоякопериодическую систему инородных включений, ограниченных произвольными гладкими контурами, при частичной отслойке волокон от матрицы, в [9] — плоская задача теории упругости для изотропной среды, содержащей инородное включение, ограниченное произвольным гладким контуром, когда на линии раздела расположен разрез (здесь и далее предполагаем, говоря о гладких дугах, что их кривизны удовлетворяют условию Гельдера [5]).

В [1] был предложен основанный на методе интегральных уравнений единый подход к решению плоской задачи теории упругости для изотропной кусочно-однородной среды с разрезами, когда граница области (объединение разрезов и линий раздела материалов) есть произвольная кусочно-гладкая линия. Такая постановка охватывает случаи инородного включения с кусочно-гладким контуром, разреза с точкой излома, ветвящегося разреза, расположения разреза на линии раздела материалов, выхода на эту линию или пересечения с ней и т. п.

Интегральные представления для комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили [4] конструировались в [1] путем определенной модификации представлений типа [10]. Достоинством использованных