1. *Бондарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. — К. : Наук. думка, 1974.—272 с.
2. *Воеводин В. В.* Численные методы алгебры : Теория и алгоритмы. — М. : Наука, 1966.—248 с.
3. *Дмитришин Р. В.* Оптимизации электронных схем на ЭВМ. — Киев : Техніка, 1980.—224 с.
4. *Недашковский Н. А.* Решение систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1980.—16 с.
5. *Недашковский Н. А.* Прямой метод решения систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 8, с. 24—28.

Тернопольский финансово-экономический ин-т Получено 06.04.84

УДК 519.251 + 621.542

Л. И. Липкович, В. Э. Лянце, Д. Б. Потягайло

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

1. Рассматривается задача определения передаточной характеристики (ПХ) по результатам измерений. ПХ является функцией вида

$$K(j\omega) = M(j\omega)/N(j\omega),$$

где $j = \sqrt{-1}$; $N(j\omega) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (j\omega)^\nu$; $M(j\omega) = \sum_{\mu=0}^{m} a_{n+1+\mu} (j\omega)^\mu$. Предполагается, что $m \leqslant n$, $a_n \neq 0$, $a_{n+m+1} \neq 0$ и многочлены M и N не имеют общих корней. $K(j\omega)$ — передаточная характеристика [1], зависящая от комплексного аргумента (комплексной частоты $j\omega$). Для физически реализуемых линейных преобразователей многочлен $N(j\omega)$ имеет нули строго в левой полуплоскости и все коэффициенты ПХ — действительные числа.

2. Задача восстановления ПХ по результатам измерений — частный случай известной интерполяционной задачи Коши [4]. Пусть m и n — натуральные числа, (z_i, w_i), $i = 1, 2, \ldots, m+n+2$ — заданные пары комплексных чисел. Требуется построить функцию f вида

$$f(z) = M(z)/N(z)$$

(где M — многочлен степени m, а N — многочлен степени n), такую, что $f(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, m+n+2$. В столь общей постановке задача Коши некорректна, ее решение, вообще говоря, не существует, а если существует, то не единственно. Нетрудно построить соответствующие примеры [5, 6].

Пусть $k_i = \mathrm{Re}\, k_i + j\,\mathrm{Im}\, k_i$ — результаты эксперимента, полученные при прохождении через преобразователь синусоидального сигнала с частотой ω_i. Покажем, что в условиях п. 1 имеем $K(j\omega_i) = k_i$, или в развернутом виде

$$-k_i \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (j\omega_i)^\nu + \sum_{\mu=0}^{m} a_{n+1+\mu} (j\omega_i)^\mu = k_i. \qquad (1)$$

Пусть $i = 1, 2, \ldots, n+m+1$ и $\omega_i \neq \omega_{i'}$ при $i \neq i'$. Тогда (1) образует систему $n+m+1$ уравнений для неизвестных $a_1, a_2, \ldots, a_{n+m+1}$. Убедимся, что определитель Δ этой системы отличен от нуля. Предположим, что наряду с функцией $K = M/N$ равенства (1) выполняются также для функции $\tilde{K} = \tilde{M}/\tilde{N}$, где $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ удовлетворяют тем же условиям п. 1, что M и N. Тогда многочлен $N\tilde{M} - \tilde{N}M$ имеет $n+m+1$ различных корней $s_1, \ldots, s_{n+m+1}$, а так как его степень $\leqslant n+m$, то он тождественно равен нулю. Таким образом, функция K однозначно определяется интерполяционными данными (ω_i, k_i), $i = 1, 2, \ldots, n+m+1$. По K однозначно определяются корни многочленов M и N, а по ним — коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{n+m+1}$. Поскольку система (1) имеет единственное решение, то $\Delta \neq 0$. Очевидно, Δ зависит непрерывно от (ω_i, k_i), $i = 1, 2, \ldots, n+m+1$, что и обеспечивает корректность.

3. Ввиду погрешностей измерений величин k_i надежность восстановления ПХ по данным (ω_i, k_i) требует дополнительного исследования. В дальнейшем мы применяем методику, близкую к предложенной в работе [3], однако в дополнение к этой методике мы предлагаем использование некоторой априорной информации, полученной, например, из технической документации на соответствующий преобразователь.

4. Обозначим через $\mathcal{K}_i$ случайную величину — результат измерения, получаемого при подаче на вход преобразователя сигнала частоты ω_i. Определяя из уравнений $K(j\omega_i) = \mathcal{K}_i$ значения коэффициентов многочленов M и N, вместо истинных значений a_ν получим случайные значения A_ν. Обозначим

$$\xi_\nu = A_\nu - a_\nu, \quad \eta_i = \mathcal{K}_i - k_i, \tag{2}$$

где k_i — истинное значение передаточной характеристики. Если пренебречь произведениями вида $\eta_i \xi_\nu$ как имеющими второй порядок малости, то для ξ_ν и η_i получаем равенство

$$-k_i \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu (j\omega_i)^\nu + \sum_{\mu=0}^{m} \xi_{n+1+\mu} (j\omega_i)^\mu = \eta_i \left[1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (j\omega_i)^\nu \right]. \tag{3}$$

Подходящей системой таких равенств можно воспользоваться для нахождения уточненных значений $a_\nu + \xi_\nu$ искомых коэффициентов ПХ, считая известными некоторые их приближения a_ν. Так же, как и в работе [3], мы применим некоторую модификацию метода наименьших квадратов (ММНК). Введем квадратичный функционал

$$\mathcal{J}_1(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 \left| k_i \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu (j\omega_i)^\nu - \sum_{\mu=0}^{m} x_{n+1+\mu} (j\omega_i)^\mu + \zeta_i \right|^2, \tag{4}$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_N$ — заданные вещественные числа;

$$\rho_i = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (j\omega)^\nu; \quad \zeta_i = \eta_i \rho_i; \quad \lambda_i = |\rho_i|^{-4}. \tag{5}$$

В качестве оценки случайного вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+m+1})$ принимаем вектор $\hat{\boldsymbol{\xi}} = (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \ldots, \hat{\xi}_{n+m+})$ такой, что при $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{\xi}}$ функционал (4) принимает минимальное значение в комплексном арифметическом пространстве $\mathbb{C}^{n+m+1}$.

Формулу (4) можно записать в виде

$$\mathcal{J}_1(\boldsymbol{x}) = \| \Lambda \mathbf{Q} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\zeta} \|^2, \tag{6}$$

где $\|\cdot\|$ — обычная норма $\mathbb{C}^N$; $\mathbf{Q}$ — оператор $\mathbb{C}^{n+m+1} \to \mathbb{C}^N$, отвечающий матрице коэффициентов при $\xi_1, \ldots, \xi_{n+m+1}$ в равенствах (3); Λ — диагональная матрица (здесь и далее мы отождествляем оператор и его матрицу относительно стандартных базисов) с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$; $\boldsymbol{\zeta}$ — вектор с компонентами $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$ (см. (5)). Несложные соображения, основанные на теореме об ортогональной проекции элементарной теории комплексных гильбертовых пространств, показывают, что искомый минимум достигается при $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{\xi}}$, где

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = S^{-1} T_0^* \boldsymbol{\zeta}, \quad T_0 = \Lambda \mathbf{Q}, \quad S = T_0^* T_0, \tag{7}$$

причем

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n+m+1}} \mathcal{J}_1(\boldsymbol{x}) = \| \boldsymbol{\zeta} \|^2 - \| T_0 \hat{\boldsymbol{\xi}} \|^2. \tag{8}$$

5. Далее мы исходим из предположения о том, что случайные величины $\operatorname{Re}\eta_i$, $\operatorname{Im}\eta_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, независимы и имеют одно и то же нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$. Это соответствует предположению о том, что измерения на выходе производятся без систематических погрешностей (случай распределения $N(m_i, \sigma^2)$ лишь незначительно усложнит последующие формулы). На основании (7) заключаем, что $\mathbf{M}\hat{\xi}_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n + m + 1$, где $\mathbf{M}$ — операция математического ожидания. Опишем ковариационную матрицу вектора $\hat{\xi}$. С этой целью представим матрицу $S^{-1}T_0^*$ в виде

$$S^{-1}T_0^* = B' + jB'', \tag{9}$$

где $j = \sqrt{-1}$, а B', B'' — вещественны. Далее определим

$$c_{\nu i} = \begin{cases} B'_{\nu i}, & i = 1, 2, \ldots, N, \ \nu = 1, 2, \ldots, n + m + 1, \\ -B''_{\nu i}, & i = N + 1, N + 2, \ldots, 2N, \ \nu = 1, 2, \ldots, n + m + 1, \end{cases}$$

$$c_{\nu i} = \begin{cases} B''_{\nu i}, & i = 1, 2, \ldots, N, \ \nu = n + m + 2, \ldots, 2(n + m + 1), \\ B'_{\nu i}, & i = N + 1, \ldots, 2N, \ \nu = n + m + 2, \ldots, 2(n + m + 1), \end{cases}$$

где индексами νi обозначен элемент матрицы на пересечении ν-й строки и i-го столбца. Положим далее

$$\hat{\mathbf{u}} = (\operatorname{Re}\hat{\xi}, \operatorname{Im}\hat{\xi}) = (\operatorname{Re}\hat{\xi}_1, \ldots, \operatorname{Re}\hat{\xi}_{n+m+1}, \operatorname{Im}\hat{\xi}_1, \ldots, \operatorname{Im}\hat{\xi}_{n+m+1}).$$

Тогда для ковариационной матрицы Γ вектора $\hat{\mathbf{u}}$ справедлива формула

$$\Gamma = (\operatorname{cov}(\hat{u}_\nu, \hat{u}_{\nu'}))_{\nu, \nu'=1}^{2(n+m+1)} = \sigma^2 C \cdot C^T, \tag{10}$$

где C^T — транспонированная матрица C.

Важным обстоятельством, вытекающим из доказанного в п. 1 неравенства $\Delta \neq 0$ (Δ — определитель системы (1)), является то, что ковариационная матрица Γ невырождена:

$$\operatorname{rang}\Gamma = 2(n + m + 1). \tag{11}$$

Следовательно, плотность распределения вектора $\hat{\mathbf{u}}$ есть

$$f_{\hat{\mathbf{u}}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n+m+1}\sqrt{\det \Gamma}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{\nu, \nu'=1}^{2(n+m+1)} \Omega_{\nu\nu'} x_\nu x_{\nu'}}, \tag{12}$$

где $\Omega = \Gamma^{-1}$.

6. Пусть $\varphi = F(U)$ — произвольная гладкая функция вектора $U = a + \mathbf{u}$, где $a = (a_1, \ldots, a_{n+m+1}, 0, \ldots, 0)$; $\mathbf{u} = (\operatorname{Re}\xi, \operatorname{Im}\xi)$. В частности, φ может совпадать с ПХ K и тогда зависит дополнительно от параметра ω. Учитывая, что $\mathbf{M}\hat{u}_\nu = 0$, в качестве оценки случайной величины φ принимаем

$$\hat{\varphi} = F(a) + \hat{\psi}, \text{ где } \hat{\psi} = \sum_{\nu=1}^{2(n+m+1)} \frac{\partial F}{\partial u_\nu}(a)\,\hat{u}_\nu. \tag{13}$$

Как легко видеть, оценка $\hat{\varphi}$ имеет нормальное распределение $N(F(a), \sigma^2\|r\|^2)$, где

$$r = C^T \operatorname{grad} F(a), \tag{14}$$

причем C^T — та же транспонированная матрица, что и в формуле (10), а $\|r\|^2 = \|r_1\|^2 + \ldots + \|r_{2N}\|^2$.

7. Определим (см. формулу (6))

$$T_1 = T_0 (T_0^* T_0)^{-1} T_0^*, \text{ где } T_0 = \Lambda\mathbf{Q}. \tag{15}$$

Непосредственно проверяется, что T_1 является ортопроектором, т. е. удовлетворяет условию идемпотентности $T_1^2 = T$ и самосопряженности $T_1^* =$

$= T_1$. Используя это, а также тот факт, что $\hat{\xi}$ является решением уравнения $\Lambda \mathbf{Q} \boldsymbol{x} = \zeta$ (см. (5)), построенным по методу наименьших квадратов, заключаем, что

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\| \zeta - \Lambda \mathbf{Q} \hat{\xi} \|^2}{2 \sum_{i=1}^{N} \left(1 - T_{ii}^1\right) | \rho_i |^2} \tag{16}$$

является несмещенной оценкой дисперсии σ^2, $\mathbf{M}\hat{\sigma}^2 = \sigma^2$. При этом T_{ii}^1 — диагональные элементы матрицы T_1, а ρ_i — те же, что в (5). Полагая

$$\alpha^2 = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} | \rho_i |^2, \quad \beta^2 = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} | \rho_i |^2, \tag{17}$$

на основании (16) и учитывая, что ранг идемпотентной матрицы равен ее следу, получаем двустороннюю оценку:

$$\frac{\| \zeta - T_0 \hat{\xi} \|^2}{2\beta^2 (N - n - m - 1)} \leqslant \hat{\sigma}^2 \leqslant \frac{\| \zeta - T_0 \hat{\xi} \|^2}{2\alpha^2 (N - n - m - 1)}. \tag{18}$$

8. Построим доверительный интервал для случайной величины $\hat{\varphi}$ (см. 13). Пусть $\tilde{\boldsymbol{v}} = (\operatorname{Re} \zeta, \operatorname{Im} \zeta)$, где $\zeta = (\rho_1 \eta_1, \ldots, \rho_N \eta_N)$ (см. (5)). Тогда $\tilde{v}_i$, $\tilde{v}_{i+N}$ являются независимыми случайными величинами с нормальным распределением $N(0, | \rho_i |^2 \sigma^2)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Однако мы будем считать, что все они имеют одинаковое распределение $N(0, \gamma^2 \sigma^2)$, где

$$\gamma^2 = \frac{\| \zeta - T_0 \hat{\xi} \|^2}{2 (N - n - m - 1) \sigma^2}.$$

Это допустимо, поскольку при этом выполняется оценка $\alpha^2 \leqslant \gamma^2 \leqslant \beta^2$ (см. (17) и (18)). Принимая во внимание, что T_1 — идемпотентная матрица и что $\operatorname{rang} T_1 = n + m + 1$, заключаем, что

$$r = \frac{\| \zeta - T_0 \hat{\xi} \|^2}{\gamma^2 \sigma^2}$$

является случайной величиной, имеющей центральное χ^2-распределение с $2(N - n - m - 1)$ степенями свободы. Из (13) следует, что случайная величина

$$z = \hat{\psi} \Big/ \| \boldsymbol{r} \| \sigma$$

имеет нормальное распределение $N(0, 1)$. Заметим, что величину z можно представить в виде $z = l\zeta$, где l — некоторый линейный функционал. Непосредственная проверка показывает, что $l(1 - T_1) = 0$, а поэтому [2] случайные величины τ и z являются независимыми и случайная величина

$$t = z \sqrt{\frac{2(N - n - m - 1)}{\tau}} \tag{19}$$

имеет центральное распределение Стьюдента с $2(N - n - m - 1)$ степенями свободы. С другой стороны, поскольку для случайной величины t справедлива также формула

$$t = \frac{\hat{\psi}}{\| \boldsymbol{r} \| \sigma} \tag{20}$$

и $\hat{\psi} = \hat{\varphi} - F(\boldsymbol{a})$ (см. (13)), то, задаваясь произвольным коэффициентом доверия $1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, заключаем, что вероятность неравенства

$$F(\boldsymbol{a}) - \| \boldsymbol{r} \| \hat{\sigma} t_\varepsilon \leqslant \hat{\varphi} \leqslant F(\boldsymbol{a}) + \| \boldsymbol{r} \| \hat{\sigma} t_\varepsilon, \tag{21}$$

где t_ε — ε — процентная точка распределения Стьюдента, равна этому коэффициенту доверия.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Киев : Вища шк., 1979.—407 с.
2. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их приложения. — М. : Наука, 1968.—497 с.
3. *Солопченко Г. Н.* Определение параметров дробно-рациональной передаточной функции средств измерений по экспериментальным данным. — Метрология : Прил. к журн. «Измер. техника», 1978, **5**, с. 25—35.
4. *Netto E.* Zur Cauchy'schen Interpolatonsaufgabe. — Math. Ann., 1893, **42**, S. 453—456.
5. *Wuytack L.* On some aspects of the rational interpolation problem. — SIAM J. Numer. Anal., 1974, 11, N 1, p. 52—60.
6. *Wuytack L.* On the osculatory rational interpolation problem. — Math. Comput., 1975, 29, N 131, p. 837—843.

Львовский государственный ун-т им. Ив. Франко Получено 15.02.84

УДК 517.949.8

Р. В. Фильц

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ОПЕРАТОРА ГАМИЛЬТОНА

Одним из важнейших этапов разработки численных алгоритмов решения краевых задач математической физики является составление разностных операторов, аппроксимирующих дифференциальные операторы, входящие в ключевые дифференциальные уравнения. Эта процедура выполняется для каждого вновь рассматриваемого оператора в отдельности [1] и при этом не ставится требование, чтобы разностное уравнение, аппроксимирующее исходное тензорное дифференциальное уравнение, сохраняло свойство инвариантности при преобразованиях координат. Игнорирование этого требования привносит в разностную краевую задачу качества, не свойственные исходной дифференциальной краевой задаче, что приводит к зависимости численного решения от выбора системы координат, а при особо неблагоприятном стечении обстоятельств может пагубно отразиться даже на качественной стороне результатов.

Ниже излагается сущность метода, обеспечивающего для дифференциального оператора Гамильтона составление инвариантного разностного аналога.

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве скалярную функцию $U = U[x, y, z]$, являющуюся полным полиномом n-й степени. Пусть заданы $P = (3+n)!/(6n!)$ точек $Q_p = Q[x_p, y_p, z_p]$ $(p = \overline{1, P})$ и в этих точках известны значения функции U равные соответственно $U_1, \ldots, U_P$. Эти точки будем называть узлами, их совокупность — комплектом, а значения функции в узлах — дискретами. Будем полагать, что узлы не принадлежат одной поверхности n-го порядка, а удовлетворяющий этому условию комплект будем называть несингулярным.

Разложение функции U в ряд Тейлора имеет вид

$$U = u^{(0)} + u^{(x)}x + u^{(y)}y + u^{(z)}z + u^{(xy)}2xy/2! + u^{(yz)}2yz/2! + u^{(zx)}2zx/2! + \\ + u^{(x^2)}x^2/2! + u^{(y^2)}y^2/2! + u^{(z^2)}z^2/2! + \ldots + u^{(x^n)}x^n/n! + u^{(y^n)}y^n/n! + \\ + u^{(z^n)}z^n/n!, \tag{1}$$

где буквы u с верхними индексами, заключенными в скобки, обозначают частные производные функции U по соответствующим независимым переменным, вычисленные в начале координат.

Введя в рассмотрение P-мерное линейное векторное пространство, представим выражение (1) в виде

$$U = \vec{T}\vec{u}_*, \tag{2}$$

где

$$\vec{T} = \left(1,\ x,\ y,\ z,\ \frac{2xy}{2!},\ \frac{2yz}{2!},\ \frac{2zx}{2!},\ \frac{x^2}{2!},\ \frac{y^2}{2!},\ \frac{z^2}{2!},\ \ldots,\ \frac{x^n}{n!},\ \frac{y^n}{n!},\ \frac{z^n}{n!}\right) \tag{3}$$

— P-мерный вектор-строка, называемый в дальнейшем вектором Тейлора;