Необходимость очевидна.

Достаточность. Так как в $\mathbb{R}[x]$ неразложимыми бывают только многочлены не выше второй степени, то $\varphi(x)$ можно представить так:

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_s)^{k_s}(x-\bar{\alpha}_1)^{k_1}\ldots(x-\bar{\alpha}_s)^{k_s}(x-\beta_1)^{p_1}\ldots(x-\beta_2)^{p_2},$$

где α_i, $\bar{\alpha}_i$ — сопряженные комплексные числа; $\beta_j\in\mathbb{R}$. Пусть

$$N=\left\|\begin{matrix} M_{g(x)}\left[\alpha_1^{(k_1)}\right] \\ \ldots\ldots \\ M_{g(x)}\left[\alpha_s^{(k_s)}\right]\end{matrix}\right\|,\quad N_1=\left\|\begin{matrix} M_{xg(x)}\left[\alpha_1^{(k_1)}\right] \\ \ldots\ldots\ldots \\ M_{xg(x)}\left[\alpha_s^{(k_s)}\right]\end{matrix}\right\|,$$

$\bar{N}$, $\bar{N}_1$ — матрицы, сопряженные соответственно к N и N_1. Тогда уравнение (5) можно записать так:

$$\left\|\begin{matrix} N \\ \bar{N} \\ K\end{matrix}\right\| Y = \left\|\begin{matrix} N_1 \\ \bar{N}_1 \\ K_1\end{matrix}\right\|,$$

где K и K_1 — действительные матрицы.

Известно, что если многочлен $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ и $\alpha\in\mathbb{C}$, то из равенства $f(\alpha)=a$ следует $f(\bar{\alpha})=\bar{a}$. Учитывая это, видно, что каждая комплексная строка матриц $M_{g(x)}(\varphi)$ и $M_{xg(x)}(\varphi)$ имеет себе сопряженную, причем сопряженные строки в этих матрицах расположены на одних и тех же местах. Поэтому, применяя лемму 1, получим

$$|M_{g(x)}(\varphi)| = ai^s,$$

где $a\in\mathbb{R}$. Для того чтобы найти элемент y_{tj} матрицы Y, найдем частное

$$|M_{g(x)}(\varphi)|_{(tj)}/|M_{g(x)}(\varphi)|,$$

где $|M_{g(x)}(\varphi)|_{(tj)}$ — определитель матрицы, полученной заменой t-го столбца матрицы $M_{g(x)}(\varphi)$ на j-й столбец матрицы $M_{xg(x)}(\varphi)$. Ясно, что при такой замене структура полученной матрицы останется прежней, т. е. строки, которые были сопряжены между собой, останутся снова сопряженными. Поэтому

$$|M_{g(x)}(\varphi)|_{(tj)} = a_{tj}i^s,$$

где $a_{tj}\in\mathbb{R}$. Следовательно, $y_{tj}=a_{tj}/a$. Значит, матрица B_1 состоит из действительных чисел. Учитывая лемму 3, а также то, что матрица P действительная, получаем, что матрица B также действительная.

1. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники.— К.: Наук. думка, 1981.—224 с.
2. *Петрикович В. М.* Абсолютная разложимость матричных многочленов. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 37—41.

Ин-т прикладных проблем механики и математики АН УССР, Львов

Получено 10.04.84.

УДК 519.95

Н. А. Недашковский

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНО-БУКВЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Работа посвящена численным методам решения систем алгебраических уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda)\,x_j(\lambda) = a_{i,n+1}(\lambda)\quad (i=\overline{1,\ n}). \tag{1}$$

Здесь $a_{ij}(\lambda)$ — полиномы от действительной или комплексной переменной. Без ограничения общности будем предполагать, что

$$a_{ij}(\lambda)=\sum_{k=0}^{m} a_{ijk}\lambda^k \quad (i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n+1}), \tag{2}$$

где a_{ijk} — действительные либо комплексные числа или символы.

Решение систем вида (1) является важной составной частью алгоритмов оптимизации электронных схем на ЭВМ [3]. Подобные системы встречаются в динамическом программировании, при решении неклассических задач для дифференциальных уравнений, в теории исключения.

Простейшим способом определения неизвестных $x_j(\lambda)$ является применение формулы Крамера с последовательным раскрытием определителей по минорам. Решения $x_j(\lambda)$ получаются как отношения полиномов порядка mn за $0(m^n n!)$ арифметических операций. Если последовательно преобразовывать элементы матрицы по алгоритму

$$a_{ij}^{(k)}(\lambda)=a_{ij}^{(k-1)}(\lambda)\,a_{kk}^{(k-1)}(\lambda)-a_{ik}^{(k-1)}(\lambda)\,a_{kj}^{(k-1)}(\lambda)\quad (i=\overline{k+1,n};\ j=\overline{k+1,n+1}), \tag{3}$$

то вследствие быстрого роста степени полиномиальных элементов матриц $A_{(\lambda)}^{(k)}$ число арифметических действий будет $0(m^{2^n})$. В книге П. Ланкастера [4] для λ-матриц указан более «экономичный алгоритм», требующий $0(2^n m)$ операций. Вполне удовлетворительного результата можно добиться для прямого хода метода Гаусса, используя указанный Р. В. Дмитришиным прием, основанный на выделении общего множителя элементов $a_{i,j}^{(k)}(\lambda)$ $(k=\overline{1,n-1},\ i,j=\overline{k+1,n})$.

Здесь мы рассмотрим прямые методы решения систем (1) близкие в идейном плане к методам линейной алгебры, основанным на неунитарных преобразованиях. В работе [5] показано, что подобные методы можно трактовать как алгоритмы вычисления снизу вверх некоторых ветвящихся цепных дробей [1]. Этот подход позволяет получить и обосновать приведенные ниже алгоритмы.

Аналог метода окаймления. Идея метода окаймления заключается в использовании вычисленных решений усеченных систем порядка $k-1$ для определения неизвестных усеченных систем порядка k $(k=\overline{2,n})$. Обозначим через $A_\lambda\begin{bmatrix} i_1 i_2 \ldots i_s \\ j_1 j_2 \ldots j_s\end{bmatrix}$ минор, стоящий на пересечении строк $i_1, i_2, \ldots, i_s$ и столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_s$ матрицы $\|a_{ij}(\lambda)\|$ исходной системы. Векторной форме обычного метода окаймления

$$X=\begin{bmatrix} X_{kp} \\ 0\end{bmatrix}-\frac{a_{k+1,p}+V_{k+1}X_{kp}}{a_{k+1,k+1}+V_{k+1}X_{kk+1}}\begin{bmatrix} X_{kk+1} \\ 1\end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$V_{k+1}=(a_{k+1,1};\ a_{k+1,2};\ \ldots;\ a_{k+1,k}),$$

согласно [5], соответствует рекуррентное соотношение:

$$\frac{A\begin{bmatrix} 123\ldots s-1\ s\ s+1\ldots k+1 \\ 123\ldots s-1\ p\ s+1\ldots k+1\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 123\ldots s-1\ s\ s+1\ldots k+1 \\ 123\ldots s-1\ s\ s+1\ldots k+1\end{bmatrix}}=\frac{A\begin{bmatrix} 123\ldots s-1\ s\ s+1\ldots k \\ 123\ldots s-1\ p\ s+1\ldots k\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 123\ldots s-1\ s\ s+1\ldots k \\ 123\ldots s-1\ s\ s+1\ldots k\end{bmatrix}}-$$

$$-\frac{a_{k+1,p}A\begin{bmatrix} 123\ldots k \\ 123\ldots k\end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{k} a_{k+1,i}A\begin{bmatrix} 123\ldots i-1 & i & i+1\ldots k \\ 123\ldots i-1 & p & i+1\ldots k\end{bmatrix}}{a_{k+1,k+1}A\begin{bmatrix} 123\ldots k \\ 123\ldots k\end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{k} a_{k+1,i}A\begin{bmatrix} 123\ldots i-1 & i & i+1\ldots k \\ 123\ldots i-1 & k+1 & i+1\ldots k\end{bmatrix}}\times$$

$$\times\frac{A\begin{bmatrix} 12\ldots s-1 & s & s+1\ldots k \\ 12\ldots s-1 & k+1 & s+1\ldots k\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 12\ldots s-1\ s\ s+1\ldots k \\ 12\ldots s-1\ s\ s+1\ldots k\end{bmatrix}}. \tag{5}$$

Если теперь ввести обозначение

$$P_{jk}^{(l)}(\lambda) = A_\lambda \begin{bmatrix} 123 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & k \\ 123 & \ldots & j-1 & l & j+1 & \ldots & k \end{bmatrix}, \tag{6}$$

то на основании (5) можем записать аналог метода окаймления для систем с полиномиально-буквенными элементами. Он реализуется следующими рекуррентными соотношениями:

$$P_{sk+1}^{(s)}(\lambda) = a_{k+1,k+1}(\lambda) P_{sk}^{(s)}(\lambda) + \sum_{i=1}^{k} a_{k+1,i}(\lambda) P_{ik}^{(k+1)}(\lambda),$$

$$P_{sk+1}^{(l)}(\lambda) = \left[P_{sk}^{(l)}(\lambda) P_{sk+1}^{(s)}(\lambda) - P_{sk}^{(k+1)}(\lambda) \left(a_{k+1,l}(\lambda) P_{sk}^{(s)}(\lambda) - \sum_{i=1}^{k} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\, a_{k+1,i}(\lambda)\, P_{ik}^{(l)}(\lambda) \right) \right] \Big/ P_{sk}^{(s)}(\lambda), \tag{7}$$

служащими для вычисления знаменателей $P_{sk+1}^{(s)}(\lambda)$ и числителей $P_{sk+1}^{(l)}(\lambda)$ неизвестных $x_{sk+1}^{(l)}(\lambda)$ систем

$$\sum_{s=1}^{k+1} a_{is}(\lambda)\, x_{sk+1}^{(l)}(\lambda) = a_{i,l}\,(i = \overline{1,\ k+1};\ l = \overline{k+2,\ n+1}). \tag{8}$$

Отметим, что $\deg\left[P_{sk+1}^{(s)}(\lambda)\right]$ и $\deg\left[P_{sk+1}^{(l)}(\lambda)\right]$ в общем случае равны $(k + 1)\,m$. Действительно, если предположить, что $\deg\left[P_{sk}^{(l)}(\lambda)\right] = km$, то для $P_{sk+1}^{(s)}(\lambda)$ это утверждение очевидно. А поскольку

$$X_{sk+1}^{(l)}(\lambda) = P_{sk+1}^{(l)}(\lambda) / P_{sk+1}^{(s)}(\lambda) =$$

$$= A_\lambda \begin{bmatrix} 12 & \ldots & s-1 & s & s+1 & \ldots & k+1 \\ 12 & \ldots & s-1 & l & s+1 & \ldots & k+1 \end{bmatrix} \Big/ A_\lambda \begin{bmatrix} 12 & \ldots & s & s+1 & \ldots & k+1 \\ 12 & \ldots & s & s+1 & \ldots & k+1 \end{bmatrix},$$

$$P_{sk+1}^{(s)}(\lambda) = A_\lambda \begin{bmatrix} 12 & \ldots & k+1 \\ 12 & \ldots & k+1 \end{bmatrix},$$

нетрудно сделать вывод, что $P_{sk}^{(s)}(\lambda)$ является делителем полиномов

$$P_{sk}^{(l)}(\lambda) P_{sk+1}^{(s)}(\lambda) - P_{sk}^{(k+1)}(\lambda) \left[a_{k+1,l}(\lambda) P_{sk}^{(s)}(\lambda) - \sum_{i=1}^{k} a_{k+1,i} P_{ik}^{(l)}(\lambda) \right]$$

и

$$P_{sk+1}^{(l)}(\lambda) = A_\lambda \begin{bmatrix} 123 & \ldots & k+1 \\ 123 & \ldots & k+1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, алгоритм (7) позволяет вычислить числители и знаменатели всех $x_j(\lambda) = x_{sn}^{(j)}(\lambda)$ — полиномы порядка mn. Несложные расчеты показывают, что для этого ЭВМ потребуется выполнить по $m^2 \times \frac{n^5}{5}$ арифметических операций сложения и умножения.

Аналог метода оптимального исключения. На основании (5) с использованием обозначения

$$P_{sp}^{(k)}(\lambda) = A_\lambda \begin{bmatrix} 12 & \ldots & s-1 & s & s+1 & \ldots & k \\ 12 & \ldots & s-1 & p & s+1 & \ldots & k \end{bmatrix} \tag{9}$$

можно построить следующий аналог метода оптимального исключения:

$$P_{k+1,p}^{(k+1)}(\lambda) = a_{k+1,p}(\lambda) P_{kk}^{(k)}(\lambda) + \sum_{i=1}^{k} a_{k+1,i}(\lambda) P_{ip}^{(k)}(\lambda),$$

$$P_{k+1,k+1}^{(k+1)}(\lambda) = a_{k+1,k+1}(\lambda) P_{kk}^{(k)}(\lambda) + \sum_{i=1}^{k} a_{k+1,i}(\lambda) P_{ik+1}^{(k)}(\lambda), \tag{10}$$

$$P_{s,p}^{(k+1)}(\lambda) = \left[P_{sp}^{(k)}(\lambda)\, P_{k+1,k+1}^{(k+1)}(\lambda) - P_{kk}^{(k)}(\lambda)\, P_{k+1,p}^{(k)}(\lambda)\right] / P_{kk}^{(k)}(\lambda).$$

Схема вычислений включает в себя этапы определения полиномов $P_{sp}^{(k+1)}(\lambda)$ и $P_{k+1,p}^{(k+1)}(\lambda)$, $P_{k+1,k+1}^{(k+1)}(\lambda)$ по соответствующим рекуррентным формулам. Легко видеть, что полином

$$\left[P_{sp}^{(k)}(\lambda)\, P_{k+1,k+1}^{(k+1)}(\lambda) - P_{kk}^{(k)}(\lambda)\, P_{k+1,p}^{(k+1)}(\lambda)\right]$$

нацело делится на $P_{kk}^{(k)}(\lambda)$ и, следовательно,

$$\deg\left[P_{sp}^{(k+1)}(\lambda)\right] = m(k+1). \tag{11}$$

Решения системы (1) запишутся в виде $x_i(\lambda) = P_{i,n+1}^{(n)}(\lambda) / P_{nn}^{(n)}(\lambda)$. Сложность алгоритма — по $m^2 \frac{n^5}{5}$ операций сложения и умножения.

Аналог метода Жордана. По методу Жордана исходная система преобразуется к диагональному виду. Для систем с полиномиально-буквенными элементами подобный алгоритм может быть представлен цепочкой преобразований:

$$\begin{gathered}
x_s(\lambda) = \Big\{P_{s,n+1}^{(s-1)}(\lambda)\, P_{s+1,s+1}^{(s)}(\lambda)\, P_{ss}^{(s-1)}(\lambda) - P_{s-1,s-1}^{(s-2)}(\lambda)\, P_{s+1,n+1}^{(s-1)}(\lambda)\, P_{ss}^{(s-1)}(\lambda) - \\
- \sum_{i=s+2}^{n} \left[P_{s,i}^{(s-1)}(\lambda)\, P_{s+1,s+1}^{(s-1)}(\lambda)\, P_{ss}^{(s-1)}(\lambda) - P_{ss+1}^{(s-1)}(\lambda)\, P_{s+1,i}^{(s)}(\lambda)\, P_{s-1,s-1}^{(s-2)}(\lambda)\right] \times \\
\times x_i(\lambda)\Big\} \left\{P_{ss}^{(s-1)}(\lambda)\, P_{s+1,s+1}^{(s)}(\lambda)\right\}^{-1} = \ldots = \Big\{P_{s,n+1}^{(s+k-2)}(\lambda)\, P_{s+k,s+k}^{(s+k-1)}(\lambda) \times \\
\times P_{s+k-1,s+k-1}^{(s+k-2)}(\lambda) - P_{s+k-2,s+k-2}^{(s+k-3)}(\lambda)\, P_{s+k,n+1}^{(s+k-1)}(\lambda)\, P_{s+k-1,s+k-1}^{(s+k-2)}(\lambda) - \\
- \sum_{i=s+k+1}^{n} \left[P_{s+k-1,i}^{(s+k-2)}(\lambda)\, P_{s+k,s+k}^{(s+k-1)}(\lambda)\, P_{s+k-1,s+k-1}^{(s+k-2)}(\lambda) - P_{s+k-1,s+k-1}^{(s+k-1)}(\lambda) \times \right. \\
\left. \times P_{s+k,i}^{(s+k-1)}(\lambda)\, P_{s+k-2,s+k-2}^{(s+k-3)}(\lambda)\right] x_i(\lambda) \Big\} \left\{P_{s+k-1,s+k-1}^{(s+k-2)}(\lambda)\, P_{s+k,s+k}^{(s+k-1)}(\lambda)\right\}^{-1} = \ldots = \\
= \frac{P_{s,n+1}^{(n-2)}(\lambda)\, P_{n,n}^{(n-1)}(\lambda)\, P_{n-1,n-1}^{(n-2)}(\lambda) - P_{n-2,n-2}^{(n-3)}(\lambda)\, P_{n,n+1}^{(n-1)}(\lambda)\, P_{n-1,n-1}^{(n-1)}(\lambda)}{P_{n,n}^{(n-1)}(\lambda)} \times \\
\times \left\{P_{n-2,n-2}^{(n-3)}(\lambda)\, P_{n,n}^{(n-1)}(\lambda) \left[P_{s,s}^{(s-1)}(\lambda) / P_{s-1,s-1}^{(s-2)}(\lambda)\right]\right\}^{-1},
\end{gathered}$$

где

$$P_{qp}^{(l)}(\lambda) = A_\lambda \begin{bmatrix} 123 & \ldots & l & p \\ 123 & \ldots & l & q \end{bmatrix}.$$

Нетрудно показать, что полином

$$P_{s,n+1}^{(n-2)}(\lambda)\, P_{n,n}^{(n-1)}(\lambda)\, P_{n-1,n-1}^{(n-2)}(\lambda) - P_{n-2,n-2}^{(n-3)}(\lambda)\, P_{nn+1}^{(n-1)}(\lambda)\, P_{n-1,n-1}^{(n-1)}(\lambda)$$

делится без остатка на выражение

$$P_{n-2,n-2}^{(n-3)}(\lambda)\, P_{n-1,n-1}^{(n-2)}(\lambda) \left[P_{s,s}^{(s-1)}(\lambda) / P_{s-1,s-1}^{(s-2)}(\lambda)\right].$$

Следовательно, в результате вычислений получаются числитель и знаменатель $x_s(\lambda)$ в виде полиномов порядка mn. Для реализации метода на ЭВМ необходимо затратить $\frac{3}{4} m^2 n^5$ операций умножения и $\frac{3}{4} m^2 n^5$ операций сложения.

Аналог ВЦД метода. Основная идея данного метода — использование решений всех усеченных систем низших порядков для определения неизвестных системы, решаемой на данном шаге [5]. Так, если определены неизвестные всех усеченных систем порядка 1, 2, . . ., $k-1$, то решения систем

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ji}(\lambda)\, z_j^{(k)}(\lambda) = a_{k-1,i}(\lambda) \quad (i = \overline{1, k}) \tag{12}$$

и

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}(\lambda)\, x_j^{(k)}(\lambda) = a_{i,k-1}(\lambda) \quad (i = \overline{1,\ k}) \tag{13}$$

могут быть вычислены по соотношениям

$$a_{l,k+1}^{(j)}(\lambda) = \left[a_{l,k+1}(\lambda)\, P_{ss}^{(k)}(\lambda) - \sum_{s=j-1}^{k} a_{s,l}(\lambda)\, P_{s,k+1}^{(k)}(\lambda)\right] \Big/ P_{ss}^{(k)}(\lambda),$$

$$x_j^{(k)}(\lambda) = \frac{P_{k+1,j}^{(k)}(\lambda)}{P_{kk}^{(k)}(\lambda)} = \frac{a_{j,k+1}^{(j)}(\lambda)\, P_{s,s}^{(j-1)}(\lambda) - \sum_{l=1}^{j-1} a_{l,k+1}^{j}(\lambda)\, P_{jl}^{(j-1)}(\lambda)}{a_{jj}(\lambda)\, P_{ss}^{(j-1)}(\lambda) - \sum_{l=1}^{j-1} a_{l,j}(\lambda)\, P_{jl}^{(j-1)}(\lambda)}, \tag{14}$$

$$a_{k+1,l}^{(j)}(\lambda) = \left[a_{k+1,l}(\lambda)\, P_{ss}^{(k)}(\lambda) - \sum_{s=j-1}^{k} a_{l,s}(\lambda)\, P_{sk+1}^{(k)}(\lambda)\right] \Big/ P_{ss}^{(k)}(\lambda),$$

$$z_j^{(k)}(\lambda) = \frac{P_{j,k-1}^{(k)}(\lambda)}{P_{kk}^{(k)}(\lambda)} = \frac{a_{k+1,j}^{(j)}(\lambda)\, P_{ss}^{(j-1)}(\lambda) - \sum_{l=1}^{j-1} a_{k+1,l}^{(j)}(\lambda)\, P_{l,j}^{(j-1)}(\lambda)}{a_{jj}(\lambda)\, P_{ss}^{(j-1)}(\lambda) - \sum_{l=1}^{j-1} a_{j,l}(\lambda)\, P_{l,j}^{(j-1)}(\lambda)}, \tag{15}$$

причем $x_j(\lambda) = x_j^{(n)}(\lambda)$. Следует отметить, что

$$\deg\left[P_{k-1,j}^{(k)}(\lambda)\right] = \deg\left[P_{j,k-1}^{(k)}(\lambda)\right] = km,$$

поскольку в процессе вычисления, например, $P_{k-1,j}^{(k)}(\lambda)$ полином

$$\left[a_{j,k+1}(\lambda)\, P_{ss}^{(k)}(\lambda) - \sum_{s=j-1}^{k} a_{s,j}(\lambda)\, P_{s,k+1}^{(k)}(\lambda)\right] P_{ss}^{(j-1)}(\lambda) - \sum_{l=1}^{j-1} \left[a_{l,k+1}(\lambda) \times \right.$$
$$\left. \times\, P_{ss}^{(k)}(\lambda) - \sum_{l=j-1}^{k} a_{s,l}(\lambda)\, P_{sk+1}^{(l)}(\lambda)\right] P_{jl}^{(j-1)}(\lambda)$$

без остатка делится на $P_{ss}^{(k)}(\lambda)$.

Для реализации метода необходимо выполнить с точностью до главного члена по $\frac{2}{15} m^2 n^5$ операций сложения и умножения.

Для иллюстрации рассмотрим решение конкретной системы уравнений с λ-матрицей, например, ВЦД методом.

Пример 1. Пусть задана система уравнений вида

$$\begin{Vmatrix} \lambda+1 & 2\lambda+1 & \lambda+2 \\ \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda+1 & \lambda+1 & 2\lambda+1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \\ x_3(\lambda) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3\lambda+4 \\ \lambda+2 \\ \lambda+1 \end{Vmatrix}. \tag{16}$$

На первом этапе решаются усеченные системы уравнений первого порядка

$$(\lambda+1)\, x_1^{(1)}(\lambda) = 2\lambda+1 \ \text{ и } \ (\lambda+1)\, z_1^{(1)}(\lambda) = \lambda+2:$$

$$x_1^{(1)}(\lambda) = (2\lambda+1)/(\lambda+1) = P_{12}^{(1)}(\lambda)/P_{11}^{(1)}(\lambda), \quad z_1^{(1)}(\lambda) = (\lambda+2)/(\lambda+1) =$$
$$= P_{21}^{(1)}(\lambda)/P_{11}^{(1)}(\lambda).$$

Затем определяются неизвестные систем второго порядка

$$\begin{Vmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 \\ 2\lambda+1 & \lambda+1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} z_1^{(2)}(\lambda) \\ z_2^{(2)}(\lambda) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda+1 \\ \lambda+1 \end{Vmatrix}$$

по соотношениям (14) и (15):

$$z_2^{(2)}(\lambda)=\frac{(\lambda+1)P_{11}^{(1)}(\lambda)-(\lambda+1)P_{12}^{(1)}(\lambda)}{-(\lambda^2+3\lambda+1)}=\frac{(\lambda+1)(\lambda+1-2\lambda-1)}{-(\lambda^2+3\lambda+1)}=$$

$$=\frac{-(\lambda+1)\lambda}{-(\lambda^2+3\lambda+1)}=\frac{-\lambda^2-\lambda}{-\lambda^2-3\lambda-1}=\frac{P_{32}^{(2)}(\lambda)}{P_{22}^{(2)}(\lambda)},$$

$$a_{31}^{(1)}(\lambda)=\{a_{31}(\lambda)P_{22}^{(2)}(\lambda)-a_{21}(\lambda)P_{32}^{(2)}(\lambda))/P_{22}^{(2)}(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda^2+3\lambda+1)-$$
$$-(\lambda+2)(\lambda^2+\lambda)]/(\lambda^2+3\lambda+1)=(\lambda+1)(\lambda+1)/(\lambda^2+3\lambda),$$

$$z_1^{(2)}(\lambda)=\frac{a_3^{(1)}(\lambda)}{a_{11}^{(1)}(\lambda)}=\frac{(\lambda+1)(\lambda+1)}{(\lambda^2+3\lambda+1)(\lambda+1)}=\frac{\lambda+1}{\lambda^2+3\lambda+1}=\frac{P_{31}^{(2)}(\lambda)}{P_{22}^{(2)}(\lambda)}.$$

И наконец, для данной системы (16) можем записать:

$$x_3(\lambda)=\frac{a_{34}(\lambda)P_{22}^{(2)}(\lambda)-a_{14}(\lambda)P_{31}^{(2)}(\lambda)-a_{24}(\lambda)P_{32}^{(2)}(\lambda)}{a_{33}(\lambda)P_{22}^{(2)}(\lambda)-a_{13}(\lambda)P_{31}^{(2)}(\lambda)-a_{23}(\lambda)P_{32}^{(2)}(\lambda)}=\frac{-2\lambda^2-5\lambda-3}{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}=$$
$$=\frac{P_{43}^{(3)}(\lambda)}{P_{33}^{(3)}(\lambda)},$$

$$a_{14}^{(1)}(\lambda)=\frac{a_{14}(\lambda)P_{33}^{(3)}(\lambda)-a_{13}(\lambda)P_{43}^{(3)}(\lambda)}{P_{33}^{(3)}(\lambda)}=\frac{3\lambda^4+12\lambda^3+14\lambda^2+6\lambda+2}{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1},$$

$$a_{24}^{(1)}(\lambda)=\frac{a_{24}(\lambda)P_{33}^{(3)}(\lambda)-a_{23}(\lambda)P_{43}^{(3)}(\lambda)}{P_{33}^{(3)}(\lambda)}=\frac{\lambda^4+6\lambda^3+14\lambda^2+15\lambda+7}{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1},$$

$$x_2(\lambda)=\frac{a_{14}^{(1)}(\lambda)P_{21}^{(1)}(\lambda)-P_{11}^{(1)}(\lambda)a_{24}^{(1)}(\lambda)}{P_{22}^{(2)}(\lambda)P_{33}^{(3)}(\lambda)}=\frac{2\lambda^3+5\lambda^2+\lambda-3}{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}=\frac{P_{42}^{(3)}(\lambda)}{P_{33}^{(3)}(\lambda)},$$

$$a_{14}^{(2)}(\lambda)=\frac{a_{14}^{(1)}(\lambda)P_{33}^{(3)}(\lambda)-a_{12}(\lambda)P_{42}^{(3)}(\lambda)}{P_{33}^{(3)}(\lambda)}=\frac{-\lambda^4+7\lambda^2-11\lambda+5}{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1},$$

$$x_1(\lambda)=\frac{a_{14}^{(2)}(\lambda)}{a_{11}(\lambda)}=\frac{-\lambda^4+7\lambda^2+11\lambda+5}{(\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{-\lambda^3+\lambda^2+6\lambda+5}{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}.$$

Замечание 1. Сравнение сложности приведенных методов позволяет утверждать, что возможна аппаратурная реализация ВЦД метода более быстрая, чем для аналогов метода Гаусса, Жордана и т. д. (в том числе и для линейных систем алгебраических уравнений).

Замечание 2. Применяя быстрые способы умножения и деления [6], основанные на преобразовании Фурье, можно уменьшить сложность для систем с λ-матрицами до $0\,(mn^4\log_2 mn)$. Однако для систем с буквенными элементами подобный прием неприемлем.

Замечание 3. Вычислительные схемы рассмотренных выше методов легко «адаптировать» для решения других задач алгебры. Формула вида

$$A\begin{bmatrix}123 & \ldots & k\\ 123 & \ldots & k\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}123 & \ldots & k-1\\ 123 & \ldots & k-1\end{bmatrix}\times$$
$$\times\left\{a_{kk}-\sum_{i=1}^{k-1}a_{ki}\frac{A\begin{bmatrix}123 & \ldots & i-1\; i\; i+1 & \ldots & k-1\\ 123 & \ldots & i-1\; k\; i+1 & \ldots & k-1\end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix}123 & \ldots & i-1\; i\; i+1 & \ldots & k-1\\ 123 & \ldots & i-1\; i\; i+1 & \ldots & k-1\end{bmatrix}}\right\}$$

позволяет свести вычисление определителя к решению системы уравнений меньшего порядка. Это позволяет, в частности, строить прямые методы решения проблемы собственных значений, вычислять результаты и т. п.

Замечание 4. Каждая из описанных схем может быть использована для решения задач целочисленного и динамического программирования.

1. *Бондарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. — К. : Наук. думка, 1974.—272 с.
2. *Воеводин В. В.* Численные методы алгебры : Теория и алгоритмы. — М. : Наука, 1966.—248 с.
3. *Дмитришин Р. В.* Оптимизации электронных схем на ЭВМ. — Киев : Техніка, 1980.—224 с.
4. *Недашковский Н. А.* Решение систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1980.—16 с.
5. *Недашковский Н. А.* Прямой метод решения систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 8, с. 24—28.

Тернопольский финансово-экономический ин-т Получено 06.04.84

УДК 519.251 + 621.542

Л. И. Липкович, В. Э. Лянце, Д. Б. Потягайло

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

1. Рассматривается задача определения передаточной характеристики (ПХ) по результатам измерений. ПХ является функцией вида

$$K(j\omega) = M(j\omega)/N(j\omega),$$

где $j = \sqrt{-1}$; $N(j\omega) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (j\omega)^\nu$; $M(j\omega) = \sum_{\mu=0}^{m} a_{n+1+\mu} (j\omega)^\mu$. Предполагается, что $m \leqslant n$, $a_n \neq 0$, $a_{n+m+1} \neq 0$ и многочлены M и N не имеют общих корней. $K(j\omega)$ — передаточная характеристика [1], зависящая от комплексного аргумента (комплексной частоты $j\omega$). Для физически реализуемых линейных преобразователей многочлен $N(j\omega)$ имеет нули строго в левой полуплоскости и все коэффициенты ПХ — действительные числа.

2. Задача восстановления ПХ по результатам измерений — частный случай известной интерполяционной задачи Коши [4]. Пусть m и n — натуральные числа, (z_i, w_i), $i = 1, 2, \ldots, m+n+2$ — заданные пары комплексных чисел. Требуется построить функцию f вида

$$f(z) = M(z)/N(z)$$

(где M — многочлен степени m, а N — многочлен степени n), такую, что $f(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, m+n+2$. В столь общей постановке задача Коши некорректна, ее решение, вообще говоря, не существует, а если существует, то не единственно. Нетрудно построить соответствующие примеры [5, 6].

Пусть $k_i = \mathrm{Re}\, k_i + j\, \mathrm{Im}\, k_i$ — результаты эксперимента, полученные при прохождении через преобразователь синусоидального сигнала с частотой ω_i. Покажем, что в условиях п. 1 имеем $K(j\omega_i) = k_i$, или в развернутом виде

$$-k_i \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (j\omega_i)^\nu + \sum_{\mu=0}^{m} a_{n+1+\mu} (j\omega_i)^\mu = k_i. \tag{1}$$

Пусть $i = 1, 2, \ldots, n+m+1$ и $\omega_i \neq \omega_{i'}$ при $i \neq i'$. Тогда (1) образует систему $n+m+1$ уравнений для неизвестных $a_1, a_2, \ldots, a_{n+m+1}$. Убедимся, что определитель Δ этой системы отличен от нуля. Предположим, что наряду с функцией $K = M/N$ равенства (1) выполняются также для функции $\tilde{K} = \tilde{M}/\tilde{N}$, где $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ удовлетворяют тем же условиям п. 1, что M и N. Тогда многочлен $N\tilde{M} - \tilde{N}M$ имеет $n+m+1$ различных корней $s_1, \ldots, s_{n+m+1}$, а так как его степень $\leqslant n+m$, то он тождественно равен нулю. Таким образом, функция K однозначно опреде-