УДК 512.83

А. И. Балинский, Ли Гюн-ы

ТЕПЛИЦЕВЫ МАТРИЦЫ: ОБРАЩЕНИЕ И РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задачи с матрицами типа теплицевых встречаются во многих прикладных проблемах. Возникающие здесь вопросы теоретического характера и численного решения исследовались многими авторами. Наиболее полный обзор полученных к настоящему времени результатов содержится в недавно вышедшей статье [2].

В работе [1] с целью нахождения обратных к ганкелевым и теплицевым матрицам, а также их восстановления предложен подход, состоящий в характеристике таких матриц парами многочленов. В настоящей работе на основе такого подхода разработаны алгоритмы обращения теплицевых матриц, а также решения соответствующих систем линейных уравнений. Эти алгоритмы не включают никаких дополнительных ограничений на исходную матрицу и требуют для своей численной реализации арифметических операций не больше, чем известные алгоритмы.

1. Определение теплицевой матрицы порождающей ее парой многочленов. По заданной паре многочленов

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$h(\lambda) = h_1\lambda^{n-1} + h_2\lambda^{n-2} + \ldots + h_n$$

можно построить матрицу

$$T_n = h(A_f)\, T_f^{-1}, \tag{1}$$

где

$$A_f = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{Vmatrix},$$

$$T_f = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & 1 & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Определяя вид элементов матрицы $A_f^k T_f^{-1}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, нетрудно убедиться, что T_n — теплицева матрица. И обратно, любую невырожденную теплицеву матрицу можно представить в виде (1). Действительно, рассматривая соотношение (1) как уравнение относительно неизвестных многочленов f и h, получаем следующую систему уравнений относительно a_i:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{q-i} a_i = -c_q \quad (q = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2}$$

и такое представление неизвестных h_j:

$$h_j = \sum_{i=0}^{n} c_{j-i-n} a_i \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3}$$

где $a_0 = 1$, $c_q = 0$ при $q < 1 - n$. В силу невырожденности матрицы T_n система уравнений (2) разрешима (неоднозначно). Любое ее решение определяет некоторый многочлен f. Но если многочлен f выбран, то по формулам (3) уже однозначно определяется многочлен h.

Определение. Многочлены f и h будем называть порождающей парой многочленов для теплицевой матрицы T_n, если с помощью этих многочленов она представима в виде (1).

Характеризуя теплицеву матрицу порождающей ее парой многочленов, нетрудно получить следующее условие ее обратимости.

Теорема 1. Теплицева матрица обратима тогда и только тогда, когда порождающие ее многочлены взаимно просты.

Доказательство. Матрица $h(A_f)$ только обратимым матрицей-множителем отличается от матрицы-безутианты многочленов f и h [3].

На основании представления (1) получается следующее представление обратной к теплицевой матрице:

$$T_n^{-1} = T_f g(A_f), \tag{4}$$

где многочлен f из представления (1), а

$$g(\lambda) = b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \ldots + b_n$$

— некоторый многочлен степени не больше $n-1$. Существование такого многочлена можно установить так. Если матрица T_n обратима, то порождающие ее многочлены взаимно просты (теорема 1). В таком случае существуют многочлены g и q степени соответственно не выше $n-1$ и $n-2$, что

$$h(\lambda)g(\lambda) + f(\lambda)q(\lambda) = 1.$$

Подстановка в это соотношение матрицы A_f дает

$$[h(A_f)]^{-1} = g(A_f),$$

так что g — требуемый многочлен.

2. Обращение теплицевой матрицы. Согласно предыдущему пункту обратная к теплицевой матрице будет определена, если найдены порождающие ее многочлены f и g в представлении (4). Здесь будет дан рекуррентный способ нахождения таких многочленов.

Вначале приведем критерий обратимости теплицевой матрицы в следующей форме [4].

Теорема 2. Теплицева матрица $T_n = \| c_{i-j} \|_{i,j=0}^{n-1}$ обратима тогда и только тогда, когда разрешима каждая из систем уравнений:

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_{i-j} x_j = -c_{i+1}, \tag{5}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_{i-j} y_j = \delta_{i,n-1} \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{6}$$

Определенные по решениям этих систем соотношениями $a_j = x_{j+1}$, $b_j = y_{j+1}$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ многочлены f и g являются порождающими для матрицы T_n^{-1}.

Замечание. Элемент c_n в правой части системы уравнений (5) можно выбирать произвольно.

Переходим теперь к построению рекуррентного способа нахождения многочленов f и g. Обозначим через

$$T_{k,n-k} = \begin{Vmatrix} c_{k-n} & \ldots & c_{1-n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{2k-n-1} & \ldots & c_{k-n} \end{Vmatrix}$$

k-ю усеченную теплицеву матрицу, D_k — ее определитель, а

$$f_k(\lambda) = \lambda^k + a_1^{(k)}\lambda^{k-1} + \ldots + a_k^{(k)},$$

$$q_k(\lambda) = b_1^{(k)}\lambda^{k-1} + b_2^{(k)}\lambda^{k-2} + \ \ldots + b_k^{(k)}$$

— порождающие многочлены для матрицы $T_{k,n-k}^{-1}$.

Теорема 3. Пусть для заданной теплицевой матрицы T_n

$$D_k \neq 0,\ D_{k+1} = 0,\ D_{k+2} = 0, \ldots, D_{k+p-1} = 0,\ D_{k+p} \neq 0.$$

Тогда многочлены f_{k+p} и g_{k+p}, порождающие матрицу $T_{k+p,n-k-p}^{-1}$, определяются формулами

$$f_{k+p}(\lambda) = f_k(\lambda)\sum_{j=0}^{p}\alpha_{k+p,j}\lambda^{p-j} - \beta_{k+p,0}g_k(\lambda)\ (\alpha_{k+p,0} = 1), \tag{7}$$

$$g_{k+p}(\lambda) = \beta_{k+p,0}^{-1}f_k(\lambda),$$

где

$$\beta_{k+p,i} = \Gamma_{k+p+i,k}a^{(k)}\ (i = 0, 1, \ldots, p);$$

$$\alpha_{k+p,j} = \beta_{k,0}^{-1}\beta_{k,j} - \beta_{k+p,0}^{-1}\sum_{l=0}^{j-1}\alpha_{k+p,l}\beta_{k,j-l}\,(j = 1, 2, \ldots, p). \tag{8}$$

Здесь $a^{(k)} = (1,\ a_1^{(k)}, \ldots, a_k^{(k)})^t$; $b^{(k)} = (0,\ b_1^{(k)}, \ldots, b_k^{(k)})^t$; $\Gamma_{i,j} = (c_{i+j-n}, c_{i+j-n-1}, \ldots, c_{i-n})$.

Доказательство. Достаточно показать, что коэффициенты так определенных многочленов f_{k+p} и g_{k+p} удовлетворяют соответствующим усеченным системам вида (5), (6). Действительно, прямая подстановка дает

$$\sum_{l=0}^{p}\alpha_{k+p,l}\sum_{j=p}^{k+p}c_{i+j-n-l}a_{k+p-j}^{(k)} - \beta_{k+p,0}\sum_{j=0}^{k-1}c_{i+j-n}b_{k-j}^{(k)} = 0, \tag{9}$$

$$\beta_{k+p,0}\sum_{j=0}^{k}c_{i+j-n}a_{k-j}^{(k)} = \delta_{i,k+p}\quad (i = 1, 2, \ldots, k+p). \tag{10}$$

Так как f_k и g_k — порождающая пара многочленов для матрицы $T_{k,n-k}$, то

$$\sum_{j=p}^{k+p}c_{i+j-n}a_{k+p-j}^{(k)} = 0\,(i = 1, 2, \ldots, k-1),$$

$$\sum_{j=0}^{k-1}c_{i+j-n}b_{k-j}^{(k)} = \delta_{i,k}\,(i = 1, 2, \ldots, k).$$

С учетом того, что $T_{k+1,n-k-1}, \ \ldots, T_{k+p-1,n-k-p+1}$ — необратимые, а $T_{k+p,n-k-p}$ — обратима, имеем

$$\sum_{j=p}^{k+p}c_{i+j-n}a_{k+p-j}^{(k)} = 0\ \ (i = k,\ k+1, \ldots, k+p-1),$$

$$\sum_{j=p}^{k+p}c_{k+p+j-n}a_{k+p-j}^{(k)} \neq 0.$$

Отсюда заключаем, что в системе (9) все уравнения, кроме последних $p+1$ уравнений, а в системе (10), кроме последнего уравнения, превращаются в тождество. При выборе $\alpha_{k+p,l}$ и $\beta_{k+p,l}$ $(l = 0, 1, \ldots, p)$ в виде (8) оставшиеся уравнения также превращаются в тождества.

На основании теоремы 3 получаем следующий алгоритм обращения теплицевой матрицы.

1. Выбор начальной порождающей пары многочленов:

а) если $D_1 \neq 0$, то $a_1^{(1)} = -c_{1-n}^{-1}c_{2-n}$, $b_1^{(1)} = c_{1-n}^{-1}$;

б) если $D_1 = 0, \ldots, D_{m-1} = 0$, а $D_m \neq 0$, то

$$a_i^{(m)} = -c_{m-n}^{-1} \sum_{j=1}^{i} c_{m+j-n} a_{i-j}^{(m)} \quad \left(a_0^{(m)} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, m\right),$$

$$b_i^{(m)} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m-1), \ b_m^{(m)} = c_{m-n}^{-1}. \tag{11}$$

2. Общий рекуррентный шаг. Пусть $D_k \neq 0$, $D_{k+1} = 0, \ldots, D_{k+p-1} = 0$, $D_{k+p} \neq 0$ $(p \geqslant 1)$. Тогда многочлены f_{k+p} и g_{k+p} определяются формулами (7).

3. Восстановление обратной матрицы по многочленам f_n и g_n осуществляется по формуле (4), которую с целью упрощения вычисления следует представить в виде

$$T_n^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} A_k, \tag{12}$$

где

$$A_k = \left\| \begin{matrix} & 0 & & 1 & 0 \\ & & & \cdots & \\ & & & a_{n-k-1} \ \cdots & 1 \\ & & & & \\ -a_n & \cdots & -a_{n-k+1} & & \\ & & \cdots & & \\ 0 & & -a_n & & 0 \end{matrix} \right\|.$$

3. **Решение линейных систем уравнений.** Рассмотрим систему уравнений вида

$$T_n x = d, \tag{13}$$

где $T_n = \| c_{i-j} \|_{i,j=0}^{n-1}$; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$; $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^t$. Ее решение будем искать путем перехода по решениям последовательных усеченных систем. Главная трудность — реализовать переход между решениями двух усеченных систем в случае, когда промежуточные системы вырождены. Это осуществляется в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть матрица $T_n = \| c_{i-j} \|_{i,j=0}^{n-1}$ такова, что $D_k \neq 0$, $D_{k+1} = 0, \ldots, D_{k+p-1} = 0$, а $D_{k+p} \neq 0$ $(p \geqslant 1)$. Пусть f_{k+p}, g_{k+p} — порождающая пара многочленов для матрицы $T_{k+p, n-k-p}$, а $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}\right)^t$ — решение k-й усеченной системы уравнений

$$T_{k,n-k} x^{(k)} = d^{(k)},\ d^{(k)} = (d_1, d_2, \ldots, d_k)^t.$$

Тогда решение $(k+p)$-й усеченной системы уравнений определяется формулой

$$x^{(k+p)} = \begin{pmatrix} O_p \\ x^{(k)} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{p} B_i^{(k+p)} \left(d_{k+i} - \Gamma_{k+i,k-1} x^{(k)}\right), \tag{14}$$

где O_p — нулевой вектор p-й размерности, а

$$B_i^{(k+p)} = \begin{pmatrix} O_{p-1} \\ b_p^{(k+p)} \\ \vdots \\ b_{k+p-1}^{(k+p)} \\ b_{k+p}^{(k+p)} \end{pmatrix} a_{p-i}^{(k+p)} + \begin{pmatrix} O_{p-2} \\ b_p^{(k+p)} \\ \vdots \\ b_{k+p}^{(k+p)} \\ 0 \end{pmatrix} a_{p-i-1}^{(k+p)} + \ldots + \begin{pmatrix} b_p^{(k+p)} \\ b_{p+1}^{(k+p)} \\ \vdots \\ b_{k+p}^{(k+p)} \\ O_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Учитывая, что $x^{(k)}$ — решение k-й усеченной системы, запишем соотношение

$$T_{k+p,n-k-p} \begin{pmatrix} O_p \\ x^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{(k)} \\ \Gamma_{k+1,k-1} x^{(k)} \\ \cdots\cdots \\ \Gamma_{k+p,k-1} x^{(k)} \end{pmatrix},$$

которое вместе с $(k+p)$-й усеченной системой дает следующее представление решения $x^{(k+p)}$:

$$x^{(k+p)} = \begin{pmatrix} O_p \\ x^{(k)} \end{pmatrix} + T^{-1}_{k+p,n-k-p} \begin{pmatrix} O_k \\ d_{k+1} - \Gamma_{k+1,k-1}x^{(k)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ d_{k+p} - \Gamma_{k+p,k-1}x^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Используя представление (4) в форме (12) для матрицы $T^{-1}_{k+p,n-k-p}$, приходим к формуле (14).

Алгоритм решения систем уравнений 13:

1. Решение начальной усеченной системы:

а) если $D_1 \neq 0$, то $a_1^{(1)} = -c^{-1}_{1-n}c_{2-n}$, $b_1^{(1)} = c^{-1}_{1-n}$ и решение 1-й усеченной системы $x_1^{(1)} = c^{-1}_{1-n}d_1$;

б) если $D_1 = 0$, $D_2 = 0, \ldots, D_{m-1} = 0$, $D_m \neq 0$, то $a_i^{(m)}$, $b_i^{(m)}$ определяются формулами (11), а решение m-й усеченной системы дается формулой

$$x_i^{(m)} = c^{-1}_{m-n}\left(d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{m+j-n}x^{(m)}_{i-j}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

2. Общий рекуррентный шаг. Пусть $D_k \neq 0$, $D_{k+1} = 0, \ldots, D_{k+p-1} = 0$, $D_{k+p} \neq 0$. Тогда f_{k+p}, g_{k+p} находим по формуле (7), а решение $(k+p)$-й усеченной системы определяется формулой (14).

В заключение отметим, что для численной реализации каждого из предложенных здесь алгоритмов требуется $3n^2$ умножений.

1. *Балинский А. И., Ли Гюн-ы.* Об обращении ганкелевых и теплицевых матриц.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 31—37.
2. *Воеводин В. В., Тартышников Е. Е.* Вычисления с теплицевыми матрицами.— Вычисл. процессы и системы, 1983, вып. 1, с. 124—266.
3. *Крейн М. Г., Неймарк М. А.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. — Харьков : Гостехиздат Украины, 1936.—44 с.
4. *Ли Гюн-ы.* К обращению и восстановлению теплицевых матриц.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 21—28.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 25.06.84

УДК 512.8

В. П. Щедрик

К ВЫДЕЛЕНИЮ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО УНИТАЛЬНОГО МНОЖИТЕЛЯ ИЗ МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА

Пусть $A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_{s-1}x + A_s$, $|A(x)| \not\equiv 0$ — матричный многочлен, коэффициентами которого являются $n \times n$-матрицы над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. Если элементарные делители матрицы $A(x)$ попарно взаимно просты и из $A(x)$ выделяется линейный множитель $B(x)$, то для того, чтобы $B(x)$ был действительным, необходимо и достаточно, чтобы его характеристический многочлен $\varphi(x) = |B(x)|$ был действительным, т. е. $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Для доказательства теоремы установим ряд фактов, которые представляют и самостоятельный интерес.