

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ВДОЛЬ МЕРИДИАНА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ*

Предлагается теоретико-экспериментальный подход к алгоритмизации определения упругих характеристик материала многослойной композитной оболочки вращения, изготовленной методом непрерывной перекрёстной намотки из n симметрично расположенных относительно срединной поверхности слоёв однонаправленных армирующих ниток, уложенных поочередно под углами $\pm\varphi_i$ к оси оболочки. Получены выражения для усреднённых переменных вдоль меридиана оболочки физико-механических характеристик композитного материала. Представлены результаты численного анализа.

Ключевые слова: физико-механические характеристики материала, многослойные композитные оболочки вращения.

Введение. Возможности современных технологий изготовления композитных оболочек с достаточно сложной, практически произвольной, формой меридиана и обладающих при этом высокими прочностными и эксплуатационными характеристиками, обуславливают их всё более широкое применение в современном машиностроении.

Как известно [1, 3, 8, 9, 13, 16], в строении композитного материала, представляющего собой существенно неоднородную (гетерогенную) структуру, выделяют наполнитель (армирующий материал или дисперсную фазу) и вяжущее вещество (матрицу). Определяющее влияние на свойства композитного материала имеет распределённый в матрице наполнитель, в зависимости от которого различают два вида композитов: с дисперсными частицами и волокнистые. Соединение слоёв однонаправленных композитов позволяет создавать сложные многослойные композитные структуры. Характерной особенностью таких материалов (в отличие, например, от металлов) является то, что они, как правило, образуются одновременно с технологическим процессом изготовления конструкции. При этом расположение армирующего материала в различных частях оболочечной конструкции, обусловлено как необходимостью выбора рациональных параметров армирования, так и технологией изготовления, а значит, и механические свойства композитного материала оказываются различными. В связи с этим результаты экспериментальных испытаний образцов, вырезанных в каких-либо местах и направлениях из оболочечной конструкции с целью экспериментального определения механических свойств материала, как и данные заранее составленных таблиц, оказываются недостаточно достоверными для решения задач численного анализа поведения конкретной конструкции.

В настоящее время для определения упругих характеристик композитных материалов с дисперсными частицами используются данные об упругих постоянных материала матрицы и армирующих частиц, их взаимного расположения, размеров, объёмного содержания в композите и т. п. Определение упругих постоянных волокнистых композитных материалов часто осуществляется путем замены исходного гетерогенного материала некоторой условной однородной анизотропной (ортотропной) средой, обладающей такими же (или усреднёнными) упругими характеристиками, как и неоднородный материал. Различные варианты подхода к определению механических

✉ dzb@ua.fm

* Рекомендовано в печать Программным комитетом 10-й Международной научной конференции «Математические проблемы механики неоднородных структур» (17–20 сентября 2019 г., Львов, Украина, <http://iapmm.lviv.ua/mpmns2019>)

ких характеристик таких анизотропных материалов основываются, как правило, на моделях математического прогнозирования или расчётно-экспериментальных методиках [1, 4–7, 11, 12, 14–16, 18]. Однако при этом следует учитывать, что современные средства численного анализа, особенно при решении задач оптимизации параметров конструкций, в частности, переменных вдоль меридиана углов намотки и (или) упругих характеристик композитного материала оболочек требуют алгоритмизации их определения на каждом шаге вычислительного итерационного процесса, что представляет собой отдельную задачу [10, 17]. В связи с этим задача определения необходимых для расчёта упругих характеристик таких неоднородных композитных материалов является достаточно актуальной.

В данной работе предлагается расчётно-экспериментальная методика определения физико-механических характеристик многослойного композитного материала, как исходных данных для численного расчёта напряженно-деформированного состояния и выбора оптимальных переменных вдоль меридиана оболочки вращения параметров армирования.

1. Постановка задачи. Рассматривается многослойная оболочка вращения, состоящая из n расположенных симметрично относительно срединной поверхности слоёв. Оболочка изготавливается путём непрерывной перекрестной намотки однонаправленных армирующих нитей, расположенных поочередно под углами $\pm\varphi_i$ к оси оболочки. Считается, что оболочка является упругой и тонкой, а слои материала её стенки деформируются без проскальзывания. Таким образом, структура материала оболочки вращения оказывается непосредственно связанной с технологическим процессом изготовления конструкции путём её намотки армирующей нитью, предварительно пропитанной связующим с последующей полимеризацией, а углы армирования φ_i и толщины слоёв h_i , в связи с переменностью кривизны и обратно-поступательным характером намотки, оказываются переменными вдоль меридиана оболочки при наличии ограничений

$$\varphi_i^b(s) \leq \varphi_i(s) \leq \varphi_i^t(s), \quad h_i^b(s) \leq h_i(s) \leq h_i^t(s), \quad \sum_{i=1}^n h_i(s) = h(s), \quad (1)$$

где $\varphi_i^b(s)$, $\varphi_i^t(s)$ – некоторые граничные значения углов намотки, определяемые формой меридиана срединной поверхности оболочки вращения, натягом ленты и другими параметрами технологического процесса её намотки; $h_i^b(s)$, $h_i^t(s)$, $h(s)$ – соответственно граничные значения толщины i -го слоя и всего пакета из n слоёв.

2. Механические характеристики композитного материала. Как известно, применяемые в расчётах физико-механические характеристики изотропного материала определяются по результатам испытаний одномерного образца (стержня) на растяжение-сжатие (модуль Юнга) или образца в виде тонкой трубки на кручение (модуль сдвига). Здесь аналогичным образом определение основных физико-механических характеристик анизотропного материала основывается на использовании значений физико-механических характеристик, полученных путём экспериментальных испытаний плоского двумерного образца однослойного композитного материала в продольном и поперечном направлениях армирования, с последующим использованием зависимостей, связывающих деформации и напряжения по направлениям вдоль и поперёк волокон с деформациями и напряжениями на площадках, расположенных под некоторым углом к направлению армирования в соответствующей точке вдоль меридиана оболочки [1, 12].

Практическая целесообразность такого подхода, связанного с использованием «образца-свидетеля», изготовленного в тех же условиях, что и оболочка, подтверждается, в частности, и особенностями технологического процесса намотки конструкций, так как дает возможность учета, при экспери-

ментальном испытании «образца-свидетеля», таких факторов как натяжение армирующих волокон, режима полимеризаций и иных трудно контролируемых параметров, а также алгоритмизации процесса вычислений упругих постоянных композитного материала.

В этой работе в качестве исследуемого элемента принимается полоска, выделенная из отдельного слоя и находящаяся в условиях плоского напряжённого состояния, которая наделяется жесткостями при растяжении-сжатии в двух ортогональных направлениях и сдвиге. В однонаправленном (армированном в одном направлении) слое материала напряжения σ_1^i воспринимаются волокнами, а σ_2^i, τ_{12}^i – связующим.

Основные физические соотношения для i -го слоя в координатной системе, связанной с направлением армирования, представляются соотношениями обобщённого закона Гука [1, 12]

$$\varepsilon_1^i = \frac{1}{E_1^i} \sigma_1^i + \frac{\mu_{12}^i}{E_2^i} \sigma_2^i, \quad \varepsilon_2^i = \frac{1}{E_2^i} \sigma_2^i + \frac{\mu_{21}^i}{E_1^i} \sigma_1^i, \quad \varepsilon_{12}^i = \frac{1}{G_{12}^i} \sigma_{12}^i. \quad (2)$$

Эти же соотношения относительно напряжений имеют вид:

$$\sigma_1^i = \bar{E}_1^i (\varepsilon_1^i + \mu_{12}^i \varepsilon_2^i), \quad \sigma_2^i = \bar{E}_2^i (\varepsilon_2^i + \mu_{21}^i \varepsilon_1^i), \quad \tau_{12}^i = G_{12}^i \varepsilon_{12}^i, \quad (3)$$

где $\bar{E}_j^i = E_j^i / (1 - \mu_{12}^i \mu_{21}^i)$, $j = 1, 2$; E_1^i, E_2^i – модули упругости при нагружении соответственно в направлении армирования и в ортогональном направлении; G_{12}^i – модуль сдвига; μ_{12}^i, μ_{21}^i – коэффициенты Пуассона. При этом четыре упругие постоянные для каждого слоя ($E_1^i, E_2^i, G_{12}^i, \mu_{12}^i$) определяются путём экспериментальных испытаний «образца-свидетеля», а коэффициент Пуассона μ_{21}^i может быть найден из условия $E_1^i \mu_{12}^i = E_2^i \mu_{21}^i$.

Составляющие $\sigma_\alpha^i, \sigma_\beta^i, \tau_{\alpha\beta}^i$ напряжений для i -го слоя, расположенного под углом φ_i к направлению армирования в осях (α, β) , выражаются через напряжения вдоль и поперёк волокон слоя из условий равновесия элемента следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^i &= \sigma_1^i \cos^2 \varphi_i + \sigma_2^i \sin^2 \varphi_i - \tau_{12}^i \sin 2\varphi_i, \\ \sigma_\beta^i &= \sigma_1^i \sin^2 \varphi_i + \sigma_2^i \cos^2 \varphi_i + \tau_{12}^i \sin 2\varphi_i, \\ \tau_{\alpha\beta}^i &= (\sigma_1^i - \sigma_2^i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \tau_{12}^i \cos 2\varphi_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогичным образом представляется связь деформаций $\varepsilon_1^i, \varepsilon_2^i, \varepsilon_{12}^i$ элемента i -го слоя вдоль и поперёк волокон на площадках, расположенных под углом φ_i , через деформации $\varepsilon_\alpha^i, \varepsilon_\beta^i, \varepsilon_{\alpha\beta}^i$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^i &= \varepsilon_\alpha^i \cos^2 \varphi_i + \varepsilon_\beta^i \sin^2 \varphi_i + \varepsilon_{\alpha\beta}^i \sin \varphi_i \cos \varphi_i, \\ \varepsilon_2^i &= \varepsilon_\alpha^i \sin^2 \varphi_i + \varepsilon_\beta^i \cos^2 \varphi_i - \varepsilon_{\alpha\beta}^i \sin \varphi_i \cos \varphi_i, \\ \varepsilon_{12}^i &= (\varepsilon_\beta^i - \varepsilon_\alpha^i) \sin 2\varphi_i + \varepsilon_{12}^i \cos 2\varphi_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим теперь элемент, составленный из n слоёв, каждый из которых определяется своим углом армирования φ_i в системе координат (α, β) и толщиной h_i . Определение упругих характеристик такого пакета осуществляется путем замены исходного гетерогенного волокнистого материала некоторой условно-однородной ортотропной средой. Принимается также, что в рассматриваемых условиях плоского напряжённого состояния

напряжения по толщине каждого слоя постоянны, а деформации ε_α , ε_β , $\varepsilon_{\alpha\beta}$ отдельных слоёв будут одинаковыми. При этом усилия

$$N_\alpha = \sum_{i=1}^n \sigma_\alpha^i h_i, \quad N_\beta = \sum_{i=1}^n \sigma_\beta^i h_i, \quad N_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \tau_{\alpha\beta}^i h_i \quad (6)$$

в срединной поверхности в глобальных координатах (α, β) с учётом (4) принимают вид:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \sum_{i=1}^n h_i (\sigma_1^i \cos^2 \varphi_i + \sigma_2^i \sin^2 \varphi_i - \tau_{12}^i \sin 2\varphi_i), \\ N_\beta &= \sum_{i=1}^n h_i (\sigma_1^i \sin^2 \varphi_i + \sigma_2^i \cos^2 \varphi_i + \tau_{12}^i \sin 2\varphi_i), \\ N_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^n h_i ((\sigma_1^i - \sigma_2^i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \tau_{12}^i \cos 2\varphi_i). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставив ε_1^i , ε_2^i , ε_{12}^i из (5) в (3), а вычисленные по формулам (3) σ_1^i , σ_2^i , τ_{12}^i – в (7), получим

$$\begin{aligned} N_\alpha &= c_{11}\varepsilon_\alpha + c_{12}\varepsilon_\beta + c_{13}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad N_\beta = c_{21}\varepsilon_\alpha + c_{22}\varepsilon_\beta + c_{23}\varepsilon_{\alpha\beta}, \\ N_{\alpha\beta} &= c_{31}\varepsilon_\alpha + c_{32}\varepsilon_\beta + c_{33}\varepsilon_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (8)$$

где выражения для обобщённых жесткостей имеют вид [1, 12]:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum_{i=1}^n h_i (\bar{E}_1^i \cos^4 \varphi_i + 2\bar{E}_1^i \mu_{12}^i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \\ &\quad + \bar{E}_2^i \sin^4 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i), \\ c_{12} = c_{21} &= \sum_{i=1}^n (h_i (\bar{E}_1^i + \bar{E}_2^i) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \\ &\quad + \bar{E}_1^i \mu_{12}^i (\cos^4 \varphi_i + \sin^4 \varphi_i) - G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i), \\ c_{22} &= \sum_{i=1}^n h_i (\bar{E}_1^i \sin^4 \varphi_i + \bar{E}_2^i \cos^4 \varphi_i + \\ &\quad + 2\bar{E}_1^i \mu_{12}^i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12}^i \sin^2 2\varphi_i), \\ c_{13} = c_{31} &= \sum_{i=1}^n h_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i (\bar{E}_1^i (1 - \mu_{12}^i) \cos^2 \varphi_i - \\ &\quad - \bar{E}_2^i (1 - \mu_{21}^i) \sin^2 \varphi_i - 2G_{12}^i \cos 2\varphi_i), \\ c_{23} = c_{32} &= \sum_{i=1}^n h_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i (\bar{E}_1^i (1 - \mu_{12}^i) \sin^2 \varphi_i - \\ &\quad - \bar{E}_2^i (1 - \mu_{21}^i) \cos^2 \varphi_i + 2G_{12}^i \cos 2\varphi_i), \\ c_{33} &= \sum_{i=1}^n h_i ((\bar{E}_1^i + \bar{E}_2^i - 2\bar{E}_1^i \mu_{12}^i) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12}^i \cos^2 2\varphi_i). \end{aligned} \quad (9)$$

Далее вводятся средние напряжения для пакета из n слоёв при плоском напряжённом состоянии

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{h} N_\alpha, \quad \sigma_\beta = \frac{1}{h} N_\beta, \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} N_{\alpha\beta},$$

где h – суммарная толщина пакета, определенная последним равенством (1).

Принимая во внимание равенство деформаций выделенных элементов, находящихся в условиях плоского напряженного состояния при растяжении-сжатии в двух ортогональных направлениях и сдвиге, исходного гетерогенного и условного ортотропного материала, разрешая (8) относительно деформаций ε_α , ε_β , $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и приравнивая их к деформациям, выписанным по закону Гука в виде, аналогичном (2), в координатах (α, β) для пакета из n слоёв, можно получить усредненные модули упругости в виде [12]:

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \frac{c}{c_{22}c_{33} - c_{23}^2}, & E_\beta &= \frac{c}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}, & G_{\alpha\beta} &= \frac{c}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \\ \mu_{\alpha\beta} &= \frac{c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23}}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}, & \mu_{\beta\alpha} &= \frac{c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23}}{c_{22}c_{33} - c_{23}^2}, \\ c &= \frac{1}{h} ((c_{11}c_{22} - c_{12}^2)c_{33} + 2c_{12}c_{13}c_{23} - c_{11}c_{23}^2 - c_{22}c_{13}^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Зависимости (10) представлены для произвольной схемы армирования, поскольку, как указывается в [1], для случая, когда главные направления упругости не совпадают с главными геометрическими направлениями оболочки (α, β) , должны быть учтены и сдвиговые составляющие.

Для случая симметричного армирования оболочки вращения, при котором структура материала образуется парами одинаковых слоёв, уложенных под углами $\pm\varphi_i$, закон Гука имеет вид:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E_\alpha} \sigma_\alpha - \frac{\mu_{\alpha\beta}}{E_\beta} \sigma_\beta, \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{E_\beta} \sigma_\beta - \frac{\mu_{\beta\alpha}}{E_\alpha} \sigma_\alpha, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}},$$

равенства (7) подаются в форме:

$$N_\alpha = c_{11}\varepsilon_\alpha + c_{12}\varepsilon_\beta, \quad N_\beta = c_{21}\varepsilon_\alpha + c_{22}\varepsilon_\beta, \quad N_{\alpha\beta} = c_{33}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad (11)$$

а средние упругие постоянные материала в этом случае могут быть вычислены в виде:

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \frac{1}{h} \left(c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{22}} \right), & E_\beta &= \frac{1}{h} \left(c_{22} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right), & G_{\alpha\beta} &= \frac{1}{h} c_{33}, \\ \mu_{\alpha\beta} &= \frac{c_{12}}{c_{11}}, & \mu_{\beta\alpha} &= \frac{c_{12}}{c_{22}}. \end{aligned} \quad (12)$$

В зависимостях (12) могут быть осуществлены и дальнейшие упрощения, если принять во внимание, что модули упругости E_1^i i -го слоя вдоль армирующих волокон оказываются намного больше, чем E_2^i поперёк волокон и их влиянием в (9) и далее в (12) можно пренебречь.

Таким образом, подстановкой исходных значений E_1^i , E_2^i , G_{12}^i , μ_{12}^i , μ_{21}^i физико-механических характеристик материала слоя, которые предварительно определяются экспериментально вдоль и поперёк волокон, а также реальных углов намотки волокна φ_i и толщины слоёв h_i , как данных программного обеспечения устройства для намотки армирующего волокна, в (9), (12) получаем физико-механические характеристики материала в направлениях координат (α, β) , т. е. вдоль меридиана и в окружном направлении.

Выписанные выше упругие постоянные являются параметрами технологического процесса изготовления как функции толщины $h_i = h_i(s)$ и углов намотки $\varphi_i = \varphi_i(s)$ реального изделия, рациональные значения которых могут быть выбраны и реализованы в соответствии с принятыми критериями качества при выполнении соответствующих условий прочности.

3. Задача расчета композитной оболочки вращения. Численный анализ изготовленной методом непрерывной намотки анизотропной оболочки вращения с переменной вдоль меридиана ортотропией, может осуществляться методом конечных элементов (МКЭ). При этом зависимости (12) непосредственно используются при построении матрицы жёсткости по ходу вычислительного процесса или интегрированием соответствующей краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами методом прогонки [2]. Для решения задачи определения оптимальных переменных вдоль меридиана оболочки углов намотки используются методы теории оптимальных процессов [9].

Задача расчета оболочки вращения, которая находится под действием произвольной осесимметричной нагрузки, решается в предположении линейной зависимости между компонентами напряженного состояния и упругой деформации, а также справедливости соотношений Коши связи деформаций с перемещениями [2]. При выводе уравнений состояния оболочка считается тонкой, упругой, имеет суммарную толщину h симметрично расположенных относительно срединной поверхности слоёв, которые деформируются без проскальзывания. Значения физико-механических характеристик материала в меридиональном и окружном направлениях (главных кривизн) поверхности оболочки, которым соответствуют индексы (α, β) , принимаются в соответствии с (12).

В этом случае, с учётом гипотез Кирхгоффа, напряжения связаны с деформациями ε_α , ε_β и изменениями кривизн χ_α , χ_β следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha^i &= b_{11}^i \varepsilon_\alpha + b_{12}^i \varepsilon_\beta + z(b_{11}^i \chi_\alpha + b_{12}^i \chi_\beta), \\ \sigma_\beta^i &= b_{12}^i \varepsilon_\alpha + b_{22}^i \varepsilon_\beta + z(b_{12}^i \chi_\alpha + b_{22}^i \chi_\beta),\end{aligned}\quad (13)$$

где z – координата по толщине i -го слоя, а из сравнения (8), (9), (13) для b_{jk}^i , b_{jk}^i имеют место соотношения $c_{jk} = \sum_{i=1}^n b_{jk}^i h_i$.

Выражения для усилий принимаются в виде (6), а выражения для моментов будут следующими [1]:

$$M_\alpha = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \sigma_\alpha^i h_i^3, \quad M_\beta = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \sigma_\beta^i h_i^3.$$

Связь усилий и деформаций срединной поверхности оболочки имеет вид (11), а для моментов она будет следующей

$$M_\alpha = d_{11} \chi_\alpha + d_{12} \chi_\beta, \quad M_\beta = d_{12} \chi_\alpha + d_{11} \chi_\beta, \quad d_{jk} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{2n} b_{jk}^i h_i^3. \quad (14)$$

Уравнения равновесия и геометрические соотношения в предположении, что влиянием изменения углов намотки вдоль меридиана можно пренебречь, для рассматриваемой оболочки остаются такими же, как и для изотропной [2].

Исключая переменные N_β , M_β с помощью (11), (14):

$$N_\beta = \frac{c_{12}}{c_{11}} N_\alpha + \frac{\Delta}{c_{11}} \varepsilon_\beta, \quad M_\beta = \frac{d_{12}}{d_{11}} M_\alpha + \frac{\Omega}{d_{11}} \chi_\beta,$$

$$\Delta = c_{11}c_{22} - c_{12}^2, \quad \Omega = d_{11}d_{22} - d_{12}^2,$$

уравнения состояния анизотропной многослойной оболочки, аналогично [2], могут быть получены через компоненты вектора основных переменных $\mathbf{u} = (\xi, \vartheta, Nr, M_\alpha r, \zeta)$, где ξ, ζ, ϑ – радиальное и осевое перемещение и угол поворота нормали меридиана оболочки; N – распорная сила; M_α – изгибающий момент по направлению меридиана; $r(s), \theta(s)$ – радиус параллельного круга и угол между нормалью меридиана оболочки и её осью, соответственно.

В этих условиях, выбирая в качестве переменной интегрирования длину меридиана $s_0 \leq s \leq s_L$, аналогично [2], получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в виде:

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{A}(s)\mathbf{u} + \mathbf{B}(s), \quad (15)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{c_{12} \cos \theta}{c_{11} r} & \sin \theta & \frac{\cos^2 \theta}{c_{11} r} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d_{12} \cos \theta}{d_{11} r} & 0 & \frac{1}{d_{11} r} & 0 \\ \frac{\Delta}{c_{11}} & 0 & \frac{c_{12} \cos \theta}{c_{11} r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Omega \cos^2 \theta}{d_{11} r} & \sin \theta & \frac{d_{12} \cos \theta}{d_{11} r} & 0 \\ -\frac{c_{12} \sin \theta}{c_{11} r} & \cos \theta & \frac{1 \sin 2\theta}{c_{11} 2r} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \left(\frac{F(s) \sin 2\theta}{2\pi 2c_{11}r}, 0, -rq_r, -\cos \theta \frac{F(s)}{2\pi}, \frac{\sin^2 \theta F(s)}{c_{11} 2\pi} \right)^T,$$

$q_r = q_\alpha \cos \theta + q_\beta \sin \theta$ – радиальная составляющая внешней нагрузки, $F(s)$ – суммарная осевая нагрузка на выделенную часть оболочки.

Система (15) дополняется краевыми условиями, соответствующими условиям закрепления торцов оболочки:

$$\Psi(\mathbf{u}(s_0)) = 0, \quad \mathbf{u}(s_0) \in U_0, \quad \Psi(\mathbf{u}(s_L)) = 0, \quad \mathbf{u}(s_L) \in U_L, \quad (16)$$

В представленном виде система уравнений (15), (16) для композитной оболочки совпадает с точностью до коэффициентов (упругих постоянных) с системой уравнений для изотропной оболочки [2].

4. Результаты численного анализа. Ниже приведены результаты численных исследований влияния изменения значений физико-механических характеристик материала на максимальные напряжения в защемлённом фрагменте двуслойной стеклопластиковой оболочки вращения, находящейся под действием внутреннего давления (рис. 1). Параметры оболочки следующие: $s_0 = 0$ м, $s_L = 1.08$ м,

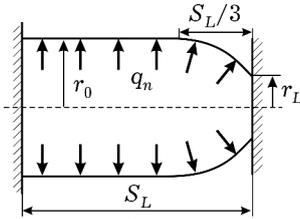


Рис. 1

$r_0 = 0.788$ м, $r_L = 0.57$ м, $h = 0.4 \cdot 10^{-2}$ м, $q_n = 0.1$ МПа, $\mu_\alpha = 0.242$, $\mu_\beta = 0.165$, $G_{\alpha\beta} = 0.6 \cdot 10^4$ МПа.

На рис. 2 приведены зависимости значений σ_{\max} от изменения E_α при заданном $E_\beta = 0.15 \cdot 10^5$ МПа (линия 1) и при $E_\beta = 0.5 \cdot 10^5$ МПа (линия 2), а

также зависимости значений σ_{\max} от E_{β} при заданном $E_{\alpha} = 0.5 \cdot 10^5$ МПа (линия 3) и при $E_{\alpha} = 0.75 \cdot 10^5$ МПа (линия 4). Из графиков, приведенных на рис. 2, следует, что при изменении E_{α} , когда $E_{\beta} = 0.15 \cdot 10^5$ МПа (линия 1), или E_{β} , когда $E_{\alpha} = 0.5 \cdot 10^5$ МПа (линия 2), с $0.2 \cdot 10^5$ МПа на $0.3 \cdot 10^5$ МПа значение σ_{\max} изменилось более, чем на 30%.

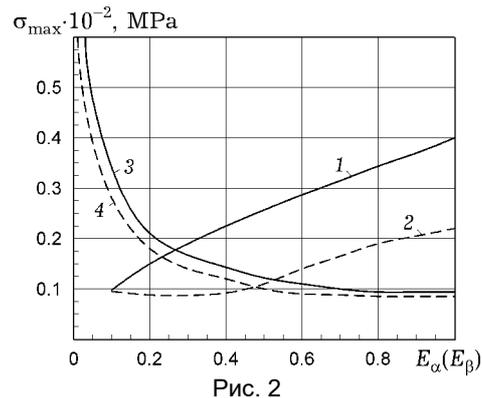


Рис. 2

Уменьшение σ_{\max} при увеличении E_{β} (линии 3, 4) объясняется более резким уменьшением деформаций в этом случае. Следует заметить также, что при изменении модулей E_{α} , E_{β} меняется (для рассматриваемой расчётной схемы) и картина напряжённо-деформированного состояния в композитной оболочке, в частности, расположение точки σ_{\max} . При этом изменение значений E_{α} , E_{β} влияет на результат расчёта в различной степени (видно из сравнения линий 1, 2 и 3, 4).

Представленные зависимости демонстрируют значительное влияние неточности определения упругих постоянных композитного материала на результаты численных расчётов, что должно быть учтено в задачах расчёта композитных конструктивных элементов современного машиностроения.

Выводы. Представлен подход к определению упругих постоянных материала многослойных композитных оболочек вращения, основанный на полученных экспериментальным путём физико-механических характеристиках отдельных слоёв «образца-свидетеля» вдоль и поперёк волокон и дальнейшего усреднения (гомогенизации) упругих постоянных материала, таких как функций углов намотки и толщин отдельных слоёв композитных многослойных оболочек вращения. Это позволяет более точно определить значения упругих постоянных и учесть различные аспекты технологического процесса изготовления реального конструктивного элемента и алгоритмизировать процесс определения переменных вдоль продольной координаты физико-механических характеристик в соответствии с требованиями современных средств численного анализа.

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1977. – 488 с.
3. Голушко С. К., Немировский Ю. В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. – Москва: Физматлит, 2008. – 432 с.
4. Гоменюк С. И., Гребенюк С. Н., Ольшанецкий В. Е., Лавренко А. С. Применение различных теорий определения упругих характеристик композиционного материала при расчете конструкций // Вестник двигателестроения. – 2009. – № 2. – С. 139–142.
5. Гребенюк С. М., Клименко М. І. Визначення ефективного модуля пружності композиту при нормальному розподілі модулів пружності волокна та матриці // Вестник Херсонск. нац. техн. ун-та. – 2014. – Вып. 3(50). – С. 254–258.
6. Гребенюк С. Н. Модуль сдвига волокнистого композита с трансверсально-изотропными матрицей и волокном // Прикл. математика и механика. – 2014. – 78, № 2. – С. 270–276.

- То же: Grebenyuk S. N. The shear modulus of a composite material with a transversely isotropic matrix and a fibre // J. Appl. Math. Mech. – 2014. – **78**, No 2. – P. 187–191. – <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2014.07.012>.
7. Гребенюк С. Н. Упругие характеристики композитного материала с транс-тропными матрицей и волоконном // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць. – 2011. – Вип. 12. – С. 62–68.
 8. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Емельянов И. Г. и др. Статика элементов конструкций. – Киев: «А.С.К.», 1999. – 379 с. – Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 8.
 9. Гудрамович В. С., Скальський В. Р., Селіванов Ю. М. Голографічне та акустико-емісійне діагностування неоднорідних конструкцій і матеріалів / Під заг. ред. З. Т. Назарчука. – Львів: Простір-М, 2017. – 492 с.
 10. Дзюба А. П., Сіренко В. М., Дзюба П. А., Сафронова І. А. Моделі та алгоритми оптимізації елементів неоднорідних оболонкових конструкцій // в кн.: Актуальні проблеми механіки / За ред. М. В. Полякова. – Дніпро: Ліра, 2018. – С. 225–243.
 11. Димитриенко Ю. И., Соколов А. П. Об упругих свойствах композиционных материалов // Матем. моделирование. – 2009. – **21**, № 4. – С. 96–110.
То же: Dimitrienko Y. I., Sokolov A. P. Elastic properties of composite materials // Math. Models Comput. Simul. – 2010. – **2**, No. 1. – P. 116–130. – <https://doi.org/10.1134/S2070048210010126>.
 12. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. – Москва: Машиностроение, 1977. – 144 с.
 13. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я, Андрюшин В. А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. – Москва: Физматгиз, 2013. – 406 с.
 14. Федотов А. Ф. Прогнозирование эффективных модулей упругости пористых композиционных материалов // Изв. вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2015. – № 1. – С. 32–37. – <https://doi.org/10.17073/1997-308X-2015-1-32-37>.
 15. Хорошун Л. П., Левчук О. И. Эффективные упругие свойства стохастических однонаправленных волокнистых композитов при несовершенной адгезии // Доп. НАН України. – 2018. – № 9. – С. 51–63. – <https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.09.051>.
 16. Хорошун Л. П. Эффективные упругие свойства зернистых стохастических композитных материалов с дефектами на границе раздела компонентов // Прикл. механика. – 2017. – **53**, № 5. – С. 108–121.
То же: Khoroshun L. H. Effective elastic properties of stochastic granular composites with interfacial defects // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, No. 5. – P. 574–587. – <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0839-x>.
 17. Sharma R., Bhagat A. R., Mahajan P. Finite element analysis for mechanical characterization of 4D inplane carbon/carbon composite with imperfect microstructure // Lat. Am. J. Solids Struct. – 2014. – **11**, No. 2. – P. 170–184. – <https://doi.org/10.1590/S1679-78252014000200002>.
 18. Whitney J. M. Elastic properties of fiber-reinforced shells // AIAA Journal. – 1967. – **5**, No. 5. – P. 966 – 968. – <https://doi.org/10.2514/3.4109>.
То же: Уитни Д. М. Упругие свойства оболочек, армированных волокнами // Ракетная техника и космонавтика. – 1967. – № 5. – С. 170–173.

АЛГОРИТМІЗАЦІЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЗМІННИХ УЗДОВЖ МЕРИДІАНА ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРІАЛУ БАГАТОШАРОВИХ КОМПЗИТНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

Пропонується теоретично-експериментальний підхід до алгоритмізації визначення пружних характеристик матеріалу багатошарової композитної оболонки обертання, виготовленої методом неперервного перехресного намотування n симетрично розташованих відносно середньої поверхні шарів однонаправлених армувальних ниток, укладених по черзі під кутами $\pm\varphi_i$ до осі оболонки. Отримано вирази для усереднених змінних уздовж меридіана оболонки фізико-механічних характеристик композитного матеріалу. Подано результати числового аналізу.

Ключові слова: фізико-механічні характеристики матеріалу, багатошарові композитні оболонки обертання.

**ALGORITHMIZATION OF THE DETERMINATION OF ALONG-THE-MERIDIAN VARIABLE
PHYSICO-MECHANICAL MATERIAL PROPERTIES OF MULTILAYER COMPOSITE SHELLS
OF REVOLUTION**

A theoretical-experimental approach is proposed for the algorithmic determination of elastic material properties of a multilayer composite shell of revolution consisting of n layers that are arranged symmetrically relative to the midsurface and made by continuous unidirectional cross winding of reinforcing filament deposited in turn at angles $\pm\varphi_i$. The layers are composed symmetrically with respect to the midsurface. Expressions are obtained for the averaged variables along the meridian of the shell of the physico-mechanical characteristics of the composite material. The results of numerical analysis are presented.

Key words: *physico-mechanical characteristics of material, multilayer composite shell of revolution.*

¹ Днепро́вский нац. у-нт им. О. Гончара, Днепр

² ГП «КБ «Южное» им. М. К. Янгеля», Днепр

Получено

15.10.19