

Рис. 5.

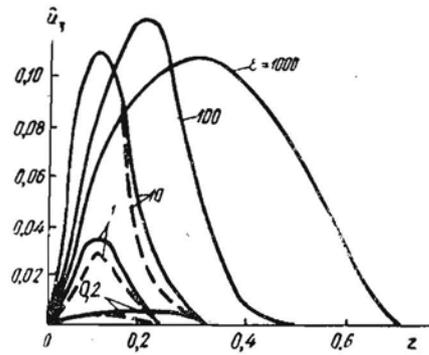


Рис. 6.

На рис. 3 и 4 сплошными линиями показано (в случае зависимости (4)) распределение амплитуды первой гармоники напряженности магнитного поля для  $\epsilon=0; 0,0001; 0,001; 0,01; 0,1$  и  $\epsilon=0,2; 1; 10; 100; 1000$  соответственно. Как видно, при изменении  $\epsilon$  от 0 до 0,2 распределение поля имеет приповерхностный характер, причем наиболее это выражено при  $\epsilon=0,2$ . Для  $\epsilon>0,2$  степень затухания магнитного поля уменьшается, т. к. распределение становится более линейным.

Аналогичные графики распределения амплитуд третьей гармоники напряженности магнитного поля для тех же значений параметров изображены сплошными линиями соответственно на рис. 5 и 6.

На рис. 4 и 6 для сравнения штриховыми линиями показаны распределения амплитуд первой и третьей гармоник напряженности магнитного поля для  $\epsilon=0,2; 1; 10; 100; 1000$ , найденных из зависимости (7). Отметим, что при  $\epsilon=100; 1000$  эти графики совпадают.

Из анализа результатов видно, что разность решений уравнения (9) для зависимостей (4) и (7) с увеличением  $\epsilon$  уменьшается. Так, для  $\epsilon>0,1$  она становится меньше 3%, а для  $\epsilon>100$  — меньше 1%. Это означает, что при определении электромагнитного поля в ферромагнитных телах для слабых полей нужно пользоваться аппроксимацией  $\mu_z = \mu_z(H)$ , определяемой формулой (4), а в случае сильных полей с достаточностью можно пользоваться уточненной аппроксимацией Мюллера (7) — (8).

1. Дружинин В. В., Векслер А. З., Куренных Л. К. Справочник по магнитным и электрическим свойствам горячекатанной электротехнической стали. — М.: Изд-во стандартов, 1971.—128 с.
2. Колесников П. М. Введение в нелинейную электродинамику. — Минск: Наука и техника, 1971.—384 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматгиз, 1959.—532 с.
4. Пелех Я. Н. Явный А-устойчивый метод четвертого порядка точности численного интегрирования дифференциальных уравнений. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, вып. 15, с. 19—23.
5. Пелех Я. Н. Решение квазилинейных уравнений параболического типа, используя ветвящиеся ценные дроби. — В кн.: Общая теория граничных задач. Киев: Наук. думка, 1983, с. 291—292.

Ин-т прикладных проблем механики  
и математики АН УССР, Львов

Получено 07.12.83

УДК 517.945

Р. В. Фильц, В. П. Карашецкий, Д. П. Гречин

#### РАСЧЕТ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В методе конечных элементов (МКЭ), использующем элементы первого порядка, распределение векторного магнитного потенциала А

в пределах каждого конечного элемента (КЭ) предполагается линейным, и, следовательно, вектор  $\vec{B}$  магнитной индукции и удельная энергия  $W$  магнитного поля внутри каждого КЭ постоянны. Это обстоятельство позволило создать весьма простой алгоритм формирования алгебраических уравнений для определения потенциалов внутренних узлов области  $D$  расчета поля, что, в свою очередь, явилось главной причиной столь широкого распространения МКЭ первого порядка [2]. Однако ввиду низкого порядка аппроксимации зависимости  $A[x, y]$  в пределах КЭ размеры элементов, необходимые для обеспечения удовлетворительной точности расчета поля, должны быть весьма малыми, что при сложной конфигурации области приводит к высоким порядкам систем алгебраических уравнений и связанным с этим трудностям в машинной реализации метода. Снижение порядка системы уравнений возможно только ценой перехода к КЭ более высоких порядков, что, однако, сопряжено с усложнением алгоритма. Существующие варианты МКЭ второго порядка имеют строгое обоснование только применительно к линейным средам. Поэтому развитие теории МКЭ второго порядка в направлении его распространения на нелинейные среды является актуальной задачей.

Решение краевой задачи расчета плоскопараллельного магнитного поля в области  $D$ , заполненной нелинейной безгистерезисной средой, сводится к минимизации функционала

$$F = \int_S \left( AJ - \int_0^{\vec{B}} \vec{H} d\vec{B} \right) dS, \quad (1)$$

где  $A, J$  — нормальные к плоскости  $D$  составляющие векторного магнитного потенциала и плотности тока;  $\vec{H}, \vec{B}$  — расположенные в плоскости  $D$  векторы напряженности и магнитной индукции;  $S$  — площадь области  $D$ .

Заполним область  $D$  совокупностью  $M$  треугольных КЭ второго порядка с прямолинейными сторонами и каждому КЭ присвоим порядковый номер  $m$  ( $m = \overline{1, M}$ ). Узлы  $m$ -го КЭ пронумеруем двойными индексами  $m1, \dots, m6$ , как показано на рисунке, и такую нумерацию будем называть локальной. Кроме того, все узлы пронумеруем одноиндексными номерами, текущие значения которых будем обозначать буквой  $r$  или  $s$  ( $r, s = \overline{1, R + P}$ , где  $R$  — число внутренних узлов;  $P$  — число граничных узлов). Такую нумерацию будем называть сетевой. Тогда выражение (1)

примет вид

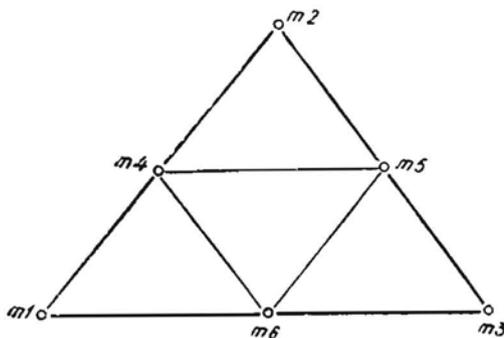
$$F = \sum_{m=1}^M F_m. \quad (2)$$

Здесь

$$F_m = \int_{S_m} G dS - \int_{S_m} W dS, \quad (3)$$

где

$$G = AJ; \quad W = \int_0^{\vec{B}} \vec{H} d\vec{B}, \quad (4)$$



причем  $S_m$  обозначает площадь  $m$ -го КЭ.

Образует  $R$ -мерные вектор-строку и вектор-столбец потенциалов узлов в сетевой нумерации

$$\vec{A} = (A_1, \dots, A_R), \quad \vec{A}_s = (A_1, \dots, A_R). \quad (5)$$

Приравняв нулю производную от функционала  $F$  по вектору  $\vec{A}$ , приходим к нелинейной системе  $R$  алгебраических уравнений, объединяемых одним уравнением

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\vec{A}} &= \sum_{m=1}^M \frac{dF_m}{d\vec{A}} = \left( \sum_{m=1}^M \frac{\partial F_m}{\partial A_1}, \dots, \sum_{m=1}^M \frac{\partial F_m}{\partial A_R} \right), = \\ &= (\varphi_1[\vec{A}_*], \dots, \varphi_R[\vec{A}_*])_* = \vec{\varphi}_*[\vec{A}_*] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем решать эту систему итерационным методом Ньютона. При этом рабочая формула на  $(i+1)$ -й итерации имеет вид

$$\Phi(\vec{A}_{*i+1} - \vec{A}_{*i}) = -\vec{\varphi}_{*i}, \quad (7)$$

где  $\vec{A}_{*i+1}$ ,  $\vec{A}_{*i}$  — значения вектора  $\vec{A}_*$  соответственно на  $(i+1)$ -й и  $i$ -й итерациях,  $\vec{\varphi}_{*i}$  — вектор невязок, численно равный функции  $\vec{\varphi}_*[\vec{A}_{*i}]$  при  $\vec{A}_* = \vec{A}_{*i}$ ;

$$\Phi_i = \left. \frac{d\vec{\varphi}_*}{d\vec{A}_*} \right|_{\vec{A}_* = \vec{A}_{*i}} = \begin{vmatrix} \sum_{m=1}^M \frac{\partial^2 F_m}{\partial A_1^2} & \dots & \sum_{m=1}^M \frac{\partial^2 F_m}{\partial A_1 \partial A_R} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{m=1}^M \frac{\partial^2 F_m}{\partial A_R \partial A_1} & \dots & \sum_{m=1}^M \frac{\partial^2 F_m}{\partial A_R^2} \end{vmatrix} \quad (8)$$

— матрица Якоби функции  $\vec{\varphi}_*[\vec{A}_*]$  при  $\vec{A}_* = \vec{A}_{*i}$ .

В МКЭ формирование вектора невязок и матрицы коэффициентов системы (7) осуществляется в соответствии с выражениями (6) и (8) путем суммирования вкладов каждого из  $M$  конечных элементов. Перейдем к выводу формул для определения этих вкладов.

Аппроксимируем в пределах  $m$ -го КЭ зависимости

$$U = U[x, y] \quad (U = A, G, W) \quad (9)$$

полными двумерными полиномами второй степени:

$$\begin{aligned} U &= u_{m1} + u_{m2}x + u_{m3}y + u_{m4}x^2 + u_{m5}xy + u_{m6}y^2 \\ &(U = A, G, W; \quad u = a, g, w), \end{aligned} \quad (10)$$

или

$$U = \vec{k}[x, y] \vec{u}_{m*}, \quad (11)$$

где

$$\vec{k}[x, y] = (1, x, y, x^2, xy, y^2) \quad (12)$$

— вектор-строка, которую назовем координатным вектором точки  $Q[x, y]$ ;

$$\vec{u}_{m*} = (u_{m1}, \dots, u_{m6})_* \quad (u = a, g, w) \quad (13)$$

— вектор-столбец коэффициентов полинома для  $m$ -го КЭ.

Составив выражения вида (11) для каждого из шести узлов  $m$ -го КЭ, получим три системы алгебраических уравнений, которые в матричной записи имеют вид

$$\vec{U}_{m*} = k_{m*} \vec{u}_{m*}, \quad (14)$$

где

$$\vec{U}_{m*} = (U_{m1}, \dots, U_{m6}), \quad (U = A, G, W) \quad (15)$$

— векторы-столбцы узловых значений переменной  $U$ ;

$$k_{m*} = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & x_{m1} & y_{m1} & x_{m1}^2 & x_{m1}y_{m1} & y_{m1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{m6} & y_{m6} & x_{m6}^2 & x_{m6}y_{m6} & y_{m6}^2 \end{array} \right\| \quad (16)$$

— квадратная неособая матрица размерности  $6 \times 6$ , которую назовем координатной матрицей  $m$ -го КЭ.

Решив уравнение вида (14) относительно вектора  $\vec{u}_{m*}$ , имеем

$$\vec{u}_{m*} = k_{m*}^{-1} \vec{U}_{m*} \quad (U = A, G, W; u = a, g, \omega), \quad (17)$$

и, следовательно, аппроксимация (11) может быть представлена в виде

$$U = \vec{k}[x, y] k_{m*}^{-1} \vec{U}_{m*} \quad (U = A, G, W). \quad (18)$$

Подставив выражения вида (18) в (3) и выполнив интегрирование по площади  $S_m$ , приходим к следующему выражению для вклада  $F_m$   $m$ -го КЭ в функционал  $F$ :

$$F_m = \sum_{j=1}^6 q_{mj} (G_{mj} - W_{mj}). \quad (19)$$

Здесь  $G_{mj} = A_{mj} J_{mj}$ ;  $W_{mj} = \int_0^{\bar{B}_{mj}} \overline{H} d\bar{B}$ , (20)

а коэффициенты  $q_{mj}$  являются элементами вектор-строки

$$\vec{q}_m = \vec{p}_m k_{m*}^{-1} = (p_{m1}, \dots, p_{m6}) k_{m*}^{-1}, \quad (21)$$

где  $p_{m1} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 (x_{m,l+1} - x_{m,l}) (y_{m,l} + y_{m,l+1});$

$$p_{m2} = \frac{1}{6} \sum_{l=1}^3 (x_{m,l+1} - x_{m,l}) (y_{m,l+1} (x_{m,l} + 2x_{m,l+1}) + y_{m,l} (2x_{m,l} + x_{m,l+1}));$$

$$p_{m3} = \frac{1}{6} \sum_{l=1}^3 (x_{m,l+1} - x_{m,l}) (y_{m,l}^2 + y_{m,l} y_{m,l+1} + y_{m,l+1}^2); \quad (22)$$

$$p_{m4} = \frac{1}{12} \sum_{l=1}^3 (x_{m,l+1} - x_{m,l}) (y_{m,l+1} (x_{m,l}^2 + 2x_{m,l} x_{m,l+1} + 3x_{m,l+1}^2) + y_{m,l} (3x_{m,l}^2 + 2x_{m,l} x_{m,l+1} + x_{m,l+1}^2));$$

$$p_{m5} = \frac{1}{24} \sum_{l=1}^3 (x_{m,l+1} - x_{m,l}) (y_{m,l+1}^2 (x_{m,l} + 3x_{m,l+1}) + 2y_{m,l} y_{m,l+1} (x_{m,l} + x_{m,l+1}) + y_{m,l}^2 (3x_{m,l} + x_{m,l+1}));$$

$$p_{m6} = \frac{1}{12} \sum_{l=1}^3 (x_{m,l+1} - x_{m,l}) (y_{m,l}^3 + y_{m,l}^2 y_{m,l+1} + y_{m,l} y_{m,l+1}^2 + y_{m,l+1}^3),$$

причем для  $l+1=4$  следует принять  $l+1=1$ .

Образуем 6-мерные вектор-строку и вектор-столбец

$$\vec{A}_m = (A_{m1}, \dots, A_{m6}), \quad \vec{A}_{m*} = (A_{m1}, \dots, A_{m6})'. \quad (23)$$

Продифференцировав выражение (19) по  $\vec{A}_m$ , с учетом (20) имеем

$$\vec{\varphi}_{m*} = \frac{dF_m}{d\vec{A}_m} = \vec{T}_{m*} + \sum_{i=1}^6 \frac{d\vec{B}_{ni}}{d\vec{A}_m} \vec{H}_{mj} = \vec{T}_{m*} + \sum_{i=1}^6 \left( \frac{dB_{xmi}}{d\vec{A}_m} H_{xmi} - \frac{dB_{ymi}}{d\vec{A}_m} H_{ymi} \right)_{q_{mj}}, \quad (24)$$

где  $\vec{T}_{m*} = (q_{m1}J_{m1}, \dots, q_{m6}J_{m6})_{*}$ . (25)

Представим выражение (18) для потенциала в виде

$$A = \vec{A}_m k_m^{-1} \vec{k}_* [x, y], \quad (26)$$

где  $k_m^{-1}$ ,  $\vec{k}_* [x, y]$  — матрица и вектор-столбец, полученные транспонированием  $k_m^{-1}$  и  $\vec{k} [x, y]$  соответственно. Тогда

$$B_{xmi} = \partial A / \partial y = \vec{A}_m k_m^{-1} \vec{k}_{*mi}^{(y)}, \quad B_{ymi} = -\partial A / \partial x = -\vec{A}_m k_m^{-1} \vec{k}_{*mi}^{(x)}, \quad (27)$$

где  $\vec{k}_{*mi}^{(x)} = \partial \vec{k} [x, y] / \partial x = (0, i, 0, 2x_{mj}, y_{mj}, 0)_{*}$ ; (28)

$$\vec{k}_{*mi}^{(y)} = \partial \vec{k} [x, y] / \partial y = (0, 0, 1, 0, x_{mj}, 2y_{mj})_{*}.$$

С учетом (27) выражение (24) принимает вид

$$\vec{\varphi}_{m*} = (q_{m1}J_{m1}, \dots, q_{m6}J_{m6})_{*} + \sum_{i=1}^6 (\vec{K}_{*mi}^{(y)} q_{mj} H_{xmi} - \vec{K}_{*mi}^{(x)} q_{mj} H_{ymi}), \quad (29)$$

где  $\vec{K}_{*mi}^{(x)} = k_m^{-1} \vec{k}_{*mi}^{(x)}$ ;  $\vec{K}_{*mi}^{(y)} = k_m^{-1} \vec{k}_{*mi}^{(y)}$ . (30)

Вектор-столбец  $\vec{\varphi}_{m*}$  определяет вклад  $m$ -го КЭ в вектор  $\vec{\varphi}_*$  невязок.

Продифференцировав выражение (29) по вектору  $\vec{A}_{m*}$ , приходим к матрице размерности  $6 \times 6$ :

$$\Phi_m = \frac{d\vec{\varphi}_{m*}}{d\vec{A}_{m*}} = - \sum_{i=1}^6 \left( \vec{K}_{*mi}^{(y)} q_{mj} \frac{dH_{xmi}}{d\vec{A}_{m*}} - \vec{K}_{*mi}^{(x)} q_{mj} \frac{dH_{ymi}}{d\vec{A}_{m*}} \right).$$

С учетом магнитной характеристики среды, описываемой функциями

$$H_x = H_x [B_x, B_y]; \quad H_y = H_y [B_x, B_y], \quad (31)$$

имеем 
$$\Phi_m = - \sum_{i=1}^6 \left( \vec{K}_{*mi}^{(y)} q_{mj} \left( \nu_{xxmi} \frac{dB_{xmi}}{d\vec{A}_{m*}} + \nu_{xymi} \frac{dB_{ymi}}{d\vec{A}_{m*}} \right) - \vec{K}_{*mi}^{(x)} q_{mj} \left( \nu_{yxmi} \frac{dB_{xmi}}{d\vec{A}_{m*}} + \nu_{yymi} \frac{dB_{ymi}}{d\vec{A}_{m*}} \right) \right),$$

где  $\nu_{xxmi}$ ,  $\nu_{xymi}$ ,  $\nu_{yxmi}$ ,  $\nu_{yymi}$  — элементы тензора дифференциального удельного магнитного сопротивления среды

$$\nu = \frac{d\vec{H}}{d\vec{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial B_x} & \frac{\partial H_x}{\partial B_y} \\ \frac{\partial H_y}{\partial B_x} & \frac{\partial H_y}{\partial B_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{xx} & \nu_{xy} \\ \nu_{yx} & \nu_{yy} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

вычисляемого при  $B_x = B_{xmi}$ ;  $B_y = B_{ymi}$ . Для безгистерезисной среды  $\nu_{xy} = \nu_{yx}$  [2]. Используя (18), получаем равенства

$$B_{xmi} = \frac{\partial A}{\partial y} = \vec{k}_{*mi}^{(y)} k_m^{-1} \vec{A}_{m*}, \quad B_{ymi} = -\frac{\partial A}{\partial x} = -\vec{k}_{*mi}^{(x)} k_m^{-1} \vec{A}_{m*} \quad (33)$$

и, следовательно,

$$\frac{dB_{xmi}}{d\vec{A}_{m*}} = \vec{k}_{*mi}^{(y)} k_m^{-1}; \quad \frac{dB_{ymi}}{d\vec{A}_{m*}} = -\vec{k}_{*mi}^{(x)} k_m^{-1}. \quad (34)$$

$$\text{Поэтому} \quad \Phi_m = - \sum_{j=1}^6 (\vec{K}_{*mj}^{(y)} \vec{K}_{mj}^{(y)} \nu_{xxmj} q_{mj} + \vec{K}_{*mj}^{(x)} \vec{K}_{mj}^{(x)} \nu_{yymj} q_{mj} - (\vec{K}_{*mj}^{(y)} \vec{K}_{mj}^{(x)} + \vec{K}_{*mj}^{(x)} \vec{K}_{mj}^{(y)}) \nu_{xymj} q_{mj}), \quad (35)$$

где  $\vec{K}_{mj}^{(x)}$ ,  $\vec{K}_{mj}^{(y)}$  — векторы, транспонированные по отношению к векторам (30). Матрица  $\Phi_m$  определяет вклад  $m$ -го КЭ в матрицу  $\Phi$  коэффициентов системы (7).

Перейдем к описанию алгоритма решения на ЭВМ краевой задачи расчета поля на основе приведенных выше соотношений.

Входными данными для решения задачи являются:

1) матрица  $V$  координат узлов сетки, имеющая размерность  $(R + P) \cdot 2$  и составляемая по правилу:  $r$ -я строка матрицы  $V$  содержит координаты  $x_r$ ,  $y_r$   $r$ -го по порядку узла в сетевой нумерации (вначале нумеруются внутренние, а потом — граничные узлы);

2) матрица  $L$  соответствия узлов в локальной и сетевой нумерациях, имеющая размерность  $(R + P) \times 6$  и составляемая по правилу:  $r$ -я строка матрицы  $L$  содержит сетевые номера узлов с локальными номерами  $m_1, \dots, m_6$ ;

3) магнитная характеристика (31) среды.

На базе входных данных рассчитываются постоянные (т. е. не зависящие от номера итерации) матрицы  $Q$  (размерности  $M \times 6$ ),  $K^{(x)}$  (размерности  $6 \times 6M$ ) и  $K^{(y)}$  (размерности  $6 \times 6M$ ) по следующим правилам:

1)  $m$ -я строка матрицы  $Q$  есть вектор-строка  $\vec{q}_m$ , вычисляемый по формулам (22), (21);

2) матрица  $K^{(x)}$  содержит  $M$  расположенных в строку матриц размерности  $6 \times 6$ , составленных из векторов-столбцов  $\vec{K}_{*mj}^x$  ( $j = \overline{1,6}$ ) по формулам (16), (28), (30); матрица  $K^{(y)}$  формируется аналогично.

Решение системы  $R$  алгебраических уравнений вида (6) итерационным методом Ньютона требует на  $(i + 1)$ -й итерации последовательного выполнения следующих операций:

1) для  $m$ -го КЭ: а) в соответствии с матрицей  $L$  по известному из  $i$ -й итерации вектору  $\vec{A}_m$  формируется вектор  $\vec{A}_{mj}$ ; б) в соответствии с матрицами  $K^{(x)}$  и  $K^{(y)}$  по формулам (27) вычисляются значения  $B_{xmj}$ ,  $B_{ymj}$  ( $j = \overline{1,6}$ ); в) по магнитной характеристике (31) среды вычисляются значения  $H_{xmj}$ ,  $H_{ymj}$  ( $j = \overline{1,6}$ ); г) в соответствии с матрицами  $Q$ ,  $K^{(x)}$ ,  $K^{(y)}$  по формуле (29) вычисляется вектор  $\vec{\varphi}_{m*}$ ; д) векторы  $\vec{\varphi}_{m*}$  используются для формирования вектора невязок  $\vec{\varphi}_*$  системы (7) следующим образом:  $i$ -й по порядку элемент  $\varphi_{mj}$  ( $j = \overline{1,6}$ ) вектора  $\vec{\varphi}_{m*}$  суммируется с  $r$ -м элементом вектора  $\vec{\varphi}_*$ , где  $r$  — сетевой номер, соответствующий локальному номеру  $m_j$ ; е) по формулам (32) с учетом магнитной характеристики (31) вычисляются значения  $\nu_{xxmj}$ ,  $\nu_{xymj}$ ,  $\nu_{xyjm}$ ,  $\nu_{yyjm}$ ; ж) в соответствии с матрицами  $Q$ ,  $K^{(x)}$ ,  $K^{(y)}$  по формуле (35) вычисляется матрица  $\Phi_m$ ; з) матрица  $\Phi_m$  используется для формирования матрицы  $\Phi$  системы (7) следующим образом:  $jk$ -й элемент матрицы  $\Phi_{mjk}$  ( $j, k = \overline{1,6}$ ) матрицы  $\Phi_m$  суммируется с  $rs$ -м элементом матрицы  $\Phi$ , где  $r$  и  $s$  — сетевые номера, соответствующие локальным номерам  $m_j$  и  $m_k$  (операции по п. а) — з) выполняются последовательно для всех  $M$  конечных элементов);

2) система (7) решается относительно вектора  $\vec{A}_{*j+1}$ , принимаемого в качестве исходного для выполнения последующей итерации.

1. Фильц Р. В. Определение магнитных свойств шихтованного ферромагнетика. — Изв. вузов. Электромеханика, 1970, № 3, с. 257—261.
2. Silvester P., Cabayan H. S., Browne B. T. Efficient techniques for finite element analysis of electric machines. — IEEE Trans. PAS, 1973, 92, № 4, p. 1274—1281.

Ин-т прикладных проблем механики  
и математики АН УССР, Львов

Получено 09.11.83