

$$\begin{aligned} & \times \left\{ K_0 \left(x \sqrt{4a_{i\pm 1}^2 + \xi^2} \right) - K_0(x\xi) + \int_0^{2a_{i\pm 1}} \left(\frac{\pi k}{a_{i\pm 1}} \sin \frac{\pi k \zeta}{a_{i\pm 1}} - h_i \cos \frac{\pi k \zeta}{a_{i\pm 1}} \right) \times \right. \\ & \times K_0 \left(x \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} \right) d\zeta \left. \right\} d\xi + (-1)^k \frac{t_c}{\pi} \int_0^{2a_{i\pm 1}} \left\{ \frac{h_{i\pm 1}}{a_{i\pm 1}} \cos \frac{\pi k \zeta}{a_{i\pm 1}} \int_0^{2a_i} K_0 \left(x \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} \right) d\xi - \right. \\ & \left. - \frac{h_i}{\pi k} \sin \frac{\pi k \zeta}{a_{i\pm 1}} \left[K_0 \left(x \sqrt{4a_i^2 + \zeta^2} \right) + K_0(x\zeta) \right] \right\} d\zeta \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Решая систему (12) и подставляя найденные коэффициенты $b_n^{(i)}$ в формулу (10), получим решение данной задачи. Приближенное решение системы (12) можно получить методом редукции [3].

1. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. — М.: Наука, 1977.—288 с.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1976.—280 с.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.—744 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1977.—832 с.
5. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. — Киев: Наук. думка, 1972.—308 с.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981.—800 с.

Львовский государственный
ун-т им. Ив. Франко

Получено 13.06.83

УДК 538.30+518 : 517.91/94

М. Т. Солодяк, Я. Н. Пелех

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛОЕ ИЗ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ СТАЛИ

Рассмотрим задачу об определении периодической составляющей напряженности магнитного поля в слое из электротехнической стали, на поверхности $z_* = 0$ которого поддерживается напряженность $\vec{H}^{(0)} = \{0, H_0 \sin 2\pi \nu t_*, 0\}$, где ν — частота; z_* — толщинная координата; t_* — время.

Будем исходить из уравнений Максвелла в пренебрежении токами смещения. Тогда для определения $H_z = H(z_*, t_*)$ получим уравнение [3]

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z_*^2} = \sigma \mu_* (H) \frac{\partial H}{\partial t_*}, \quad (1)$$

граничные условия

$$H(0, t_*) = H_0 \sin 2\pi \nu t_*, \quad H(l, t_*) = 0, \quad (2)$$

а также условие периодичности

$$H(z_*, t_* + T) = H(z_*, t_*). \quad (3)$$

Здесь $\mu_* (H) = \frac{dB(H)}{dH}$; $B = B(H)$ — индукция магнитного поля; $T = \frac{1}{\nu}$ — период колебаний электромагнитной волны; σ — коэффициент электропроводности; l — толщина слоя.

Зависимости $B = B(H)$ или $\mu_* = \mu_* (H)$ имеют нелинейный характер и для стали Э43 показаны соответственно сплошными линиями на рис. 1 и 2 [1,2].

В научно-технической литературе при решении задачи (1) — (3) обычно исходят из известной зависимости $B = B(H)$ [5]. Однако при этом не всегда достаточно точно отражается качественный характер изменения функции $\mu_* = \mu_* (H)$.

В данной работе предложена аппроксимация зависимости $\mu_* = \mu_*(H)$ дробно-рациональной функцией вида

$$\mu_*(H) = \mu_{\text{нач}}\mu_0 \frac{1 + A_1 H^2}{1 + A_2 H^2 + A_3 H^4}. \quad (4)$$

Постоянные $A_i (i = \overline{1, 3})$ в соотношении (4) определим из условий

$$\mu_*(H_m) = \mu_{\text{max}}\mu_0, \quad \frac{d\mu_*(H_m)}{dH} = 0, \quad \frac{d^2\mu_*(H_m)}{dH^2} < 0, \quad \lim_{H \rightarrow \infty} B(H) = B_S, \quad (5)$$

отражающих характерные особенности экспериментальных зависимостей $\mu_* = \mu_*(H)$ и $B = B(H)$.

При этом получим

$$A_1 = \frac{\sqrt{K^2 - \alpha^2 G} - K}{\alpha^2}, \quad A_2 = \frac{\mu_{\text{нач}}(A_1 H_m^2 + 2) - 2\mu_{\text{max}}}{\mu_{\text{max}} H_m^2}, \quad A_3 = \frac{\mu_{\text{max}} - \mu_{\text{нач}}}{\mu_{\text{max}} H_m^4}. \quad (6)$$

Здесь μ_0 — магнитная постоянная; $\mu_{\text{нач}}$ и μ_{max} — начальная и максимальная относительные магнитные проницаемости материала соответственно;

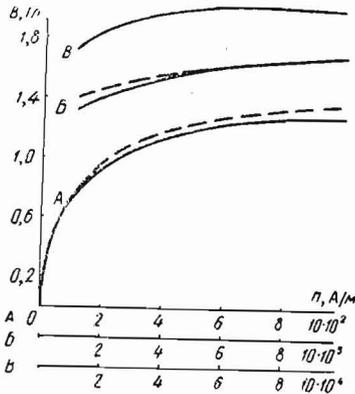


Рис. 1.

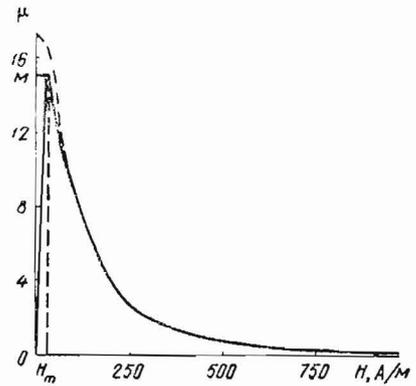


Рис. 2.

H_m — значение напряженности магнитного поля при максимальной магнитной проницаемости; B_S — индукция насыщения;

$$K = \alpha^2 \sqrt{A_3} - \frac{A_3}{2M}; \quad G = (\alpha^2 - 2\sqrt{A_3} + 2H_m^2 A_3) A_3; \quad \alpha = \frac{\pi \mu_{\text{нач}} \mu_0}{2B_S}.$$

Отметим, что в случае больших значений напряженностей магнитного поля аппроксимацию (4) можно приближенно записать в виде

$$\mu_*(H) = \frac{\mu_{\text{нач}} \mu_0}{1 + AH^2}. \quad (7)$$

Для этого случая зависимость индукции магнитного поля от напряженности будет известная в литературе зависимость Мюллера [2]

$$B = \beta \operatorname{arctg} \sqrt{AH}, \quad (8)$$

причем коэффициенты аппроксимации предстанут как

$$\beta = \mu_{\text{нач}} \mu_0 \sqrt{A}, \quad A = \frac{A_3}{A_2}, \quad \mu_{\text{нач}} = \frac{A_1}{A_2} \mu_{\text{нач}}.$$

Такая кривая для стали Э43, продленная на всю ось H , приведена на рис. 2 штриховой линией.

Перейдем в задаче (1) — (3) к безразмерным величинам:

$$t = \omega t_*, \quad z = \frac{z_*}{l}, \quad u = \frac{H}{H_0}, \quad b = \frac{B}{\mu_{\text{нач}} \mu_0 H_0}; \quad \mu(u) = \frac{\mu_*(H)}{\mu_{\text{нач}} \mu_0}.$$

Тогда исходное уравнение (1) будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2\gamma^2 \mu(u) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (9)$$

где

$$\mu(u) = \begin{cases} \frac{1 + a_1 \varepsilon u^2}{1 + a_2 \varepsilon u^2 + a_3 \varepsilon^2 u^4} & \text{для зависимости (4),} \\ \frac{a_1}{a_2 + a_3 \varepsilon u^2} & \text{для зависимости (7).} \end{cases} \quad (10)$$

Граничные условия и условия периодичности примут вид

$$u(0, t) = \sin t, \quad u(1, t) = 0, \quad (11)$$

$$u(z, t + 2\pi) = u(z, t). \quad (12)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{A_1}{a^2}; \quad a_2 = \frac{A_2}{a^2}; \quad a_3 = \frac{A_3}{a^4}; \quad \varepsilon = (\alpha H_0)^2; \quad \gamma^2 = \pi \sigma \mu_{\text{нач}} \mu_0 \nu l^2.$$

Для численного решения задачи (9) — (12) используем конечно-разностную схему [5], а также классический метод Рунге — Кутты и нелинейный метод типа Рунге — Кутта четвертого порядка точности [4] с целью сравнения эффективности этих методов.

Проведенные расчеты показали, что для данной задачи более эффективным оказался метод [4], так как он требовал машинного времени на 20 % меньше по сравнению с соответствующей конечно-разностной схемой. Отметим, что применение классического метода Рунге — Кутта четвертого порядка точности, несмотря на большие затраты машинного времени, не дало удовлетворительных результатов в случае сильной нелинейности.

Расчеты для напряженности магнитного поля проводились для электротехнической стали Э43, характеристики которой [1]

$$\mu_{\text{нач}} = 600, \quad \mu_{\text{max}} = 9000, \quad B_s = 2,07T, \quad H_m = 30 \frac{A}{m}.$$

Тогда $a_1 = 713610$; $a_2 = 41238,18$; $a_3 = 10752490$. Для данных a_i ($i = 1, 3$) функция $B = B(H)$, которая соответствует зависимости $\mu = \mu(H)$ по формуле (4), показана на рис. 1 штриховой линией. Из рис. 1 видно, что предложенная функция с достаточной для практики точностью аппроксимирует зависимость $B = B(H)$ для стали Э43.

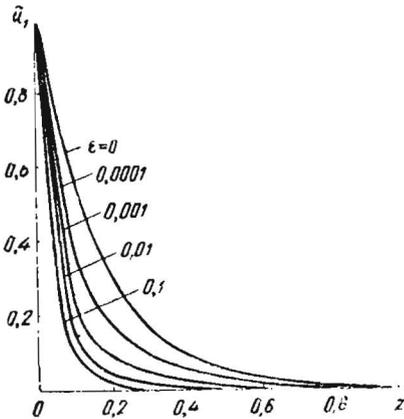


Рис. 3.

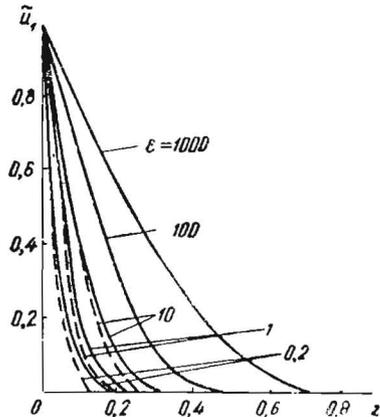


Рис. 4.

Приведем результаты исследований распределения амплитуд напряженности магнитного поля по толщине слоя при выбранных аппроксимациях (4), (7) для $\gamma = 6$.

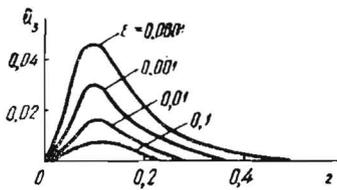


Рис. 5.

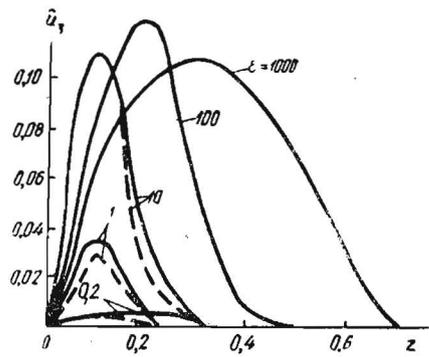


Рис. 6.

На рис. 3 и 4 сплошными линиями показано (в случае зависимости (4)) распределение амплитуды первой гармоники напряженности магнитного поля для $\epsilon=0; 0,0001; 0,001; 0,01; 0,1$ и $\epsilon=0,2; 1; 10; 100; 1000$ соответственно. Как видно, при изменении ϵ от 0 до 0,2 распределение поля имеет приповерхностный характер, причем наиболее это выражено при $\epsilon=0,2$. Для $\epsilon>0,2$ степень затухания магнитного поля уменьшается, т. к. распределение становится более линейным.

Аналогичные графики распределения амплитуд третьей гармоники напряженности магнитного поля для тех же значений параметров изображены сплошными линиями соответственно на рис. 5 и 6.

На рис. 4 и 6 для сравнения штриховыми линиями показаны распределения амплитуд первой и третьей гармоник напряженности магнитного поля для $\epsilon=0,2; 1; 10; 100; 1000$, найденных из зависимости (7). Отметим, что при $\epsilon=100; 1000$ эти графики совпадают.

Из анализа результатов видно, что разность решений уравнения (9) для зависимостей (4) и (7) с увеличением ϵ уменьшается. Так, для $\epsilon>0,1$ она становится меньше 3%, а для $\epsilon>100$ — меньше 1%. Это означает, что при определении электромагнитного поля в ферромагнитных телах для слабых полей нужно пользоваться аппроксимацией $\mu_* = \mu_*(H)$, определяемой формулой (4), а в случае сильных полей с достаточностью можно пользоваться уточненной аппроксимацией Мюллера (7) — (8).

1. Дружинин В. В., Векслер А. З., Куренных Л. К. Справочник по магнитным и электрическим свойствам горячекатанной электротехнической стали. — М.: Изд-во стандартов, 1971.—128 с.
2. Колесников П. М. Введение в нелинейную электродинамику. — Минск: Наука и техника, 1971.—384 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматгиз, 1959.—532 с.
4. Пелех Я. Н. Явный А-устойчивый метод четвертого порядка точности численного интегрирования дифференциальных уравнений. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, вып. 15, с. 19—23.
5. Пелех Я. Н. Решение квазилинейных уравнений параболического типа, используя ветвящиеся ценные дроби. — В кн.: Общая теория граничных задач. Киев: Наук. думка, 1983, с. 291—292.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 07.12.83

УДК 517.945

Р. В. Фильц, В. П. Карашецкий, Д. П. Гречин

РАСЧЕТ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В методе конечных элементов (МКЭ), использующем элементы первого порядка, распределение векторного магнитного потенциала А