6. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовик В. И., Лозбень В. Л.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. — Киев : Наук. думка, 1977.—160 с.

Львовский государственный
ун-т им. Ив. Франко Получено 11.01.84

УДК 539.377

И. И. Верба

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛАСТИНКИ С ВЫРЕЗОМ, НАГРЕВАЕМОЙ ПУТЕМ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Рассмотрим изотропную неограниченную пластинку толщины 2δ с прямоугольным вырезом $|x_i| \leqslant a_i$ $(i=1,\ 2)$. Через боковые поверхности пластинки $x_3=\pm\delta$ и прямоугольную границу пластинки осуществляется теплообмен с внешней средой в соответствии с законом Ньютона. Предположим, что температура среды, омывающей поверхности $x_3=\pm\delta$, равна нулю, а температура среды, омывающей прямоугольную границу пластинки, равна t_c.

Тогда для определения стационарного температурного поля в пластинке имеем такую граничную задачу [5]:

$$\Delta T - \varkappa^2 T = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} M(x_{i\pm1}) = \pm h_i (T - t_c) M(x_{i\pm1}) \text{ при } x_i = \pm a_i, \tag{2}$$

$$T\,|_{(x_1,\ x_2)\to\infty} = 0,\ \ \frac{\partial T}{\partial x_i}\Big|_{(x_1,\ x_2)\to\infty} = 0 \ \ (i = 1,\ 2), \tag{3}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа; $\varkappa^2 = \frac{\alpha}{\lambda\delta}$; $h_i = \frac{\alpha_{x_i}}{\lambda}$; λ — коэффициент теплопроводности; α и α_{x_i} — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей $x_3 = \pm\delta$ и $|x_i| < a_i$;$|x_{i\pm1}| = a_{i\pm1}$; $M(x_i) = S_+(x_i + a_i) - S_-(x_i - a_i)$;

$$S_\pm(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0{,}5 \mp 0{,}5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0; \end{cases} \quad i \pm 1 = \begin{cases} 1, & i = 2, \\ 2, & i = 1. \end{cases}$$

Для решения задачи (1) — (3) используем метод продолжения функций [2]. Для этого введем функцию

$$\Theta = TM(x_1,\ x_2), \tag{4}$$

где $M(x_1,\ x_2) = 1 - M(x_1)M(x_2)$.

Вычислим первую и вторую производные этой функции, учитывая граничные условия (2) и симметрию задачи относительно осей координат:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i} M(x_1,\ x_2) - T\,|_{x_i=a_i+0} M(x_{i\pm1})\,[\delta_+(x_i + a_i) - \delta_-(x_i - a_i)],$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} M(x_1,\ x_2) + h_i\left(T\,|_{x_i=a_i+0} - t_c\right) M(x_{i\pm1})\,[\delta_+(x_i + a_i) +$$

$$+ \delta_-(x_i - a_i)] - T\,|_{x_i=a_i+0} M(x_{i\pm1})\,[\delta'_+(x_i + a_i) - \delta'_-(x_i - a_i)]$$

$$(i = 1,\ 2), \tag{5}$$

где [4] $\delta_\pm(\zeta) = \frac{dS_\pm(\zeta)}{d\zeta}$; $\delta'_\pm(\zeta) = \frac{d\delta_\pm(\zeta)}{d\zeta}$.

Умножив каждый член уравнения (1) на функцию $M(x_1,\ x_2)$ и учитывая равенства (4) и (5), для функции $\Theta(x_1,\ x_2)$ получим такое уравнение с сингулярными коэффициентами:

$$\Delta\Theta - \varkappa^2\Theta = \sum_{i=1}^{2} \{h_i (T|_{x_i=a_i+0} - t_c) M(x_{i\pm1}) [\delta_+(x_i + a_i) +$$

$$+ \delta_-(x_i - a_i)] - T|_{x_i=a_i+0} M(x_{i\pm1}) [\delta'_+(x_i + a_i) - \delta'_-(x_i - a_i)]\}. \qquad (6)$$

Входящие в уравнение (6) значения функции $T(x_1, x_2)$ на прямоугольных границах пластинки разложим в ряды Фурье:

$$T|_{x_i=a_i+0} M(x_{i\pm1}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} \cos\frac{\pi n x_{i\pm1}}{a_{i\pm1}} M(x_{i\pm1}) \quad (i = 1, 2), \qquad (7)$$

где

$$b_0^{(i)} = \frac{1}{2a_{i\pm1}} \int_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} T|_{x_i=a_i+0}\, d\zeta;$$

$$b_n^{(i)} = \frac{1}{a_{i\pm1}} \int_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} T|_{x_i=a_i+0} \cos\frac{\pi n\zeta}{a_{i\pm1}}\, d\zeta \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (8)$$

Подставив разложение (7) в уравнение (6), получим

$$\Delta\Theta - \varkappa^2\Theta = \sum_{i=1}^{2} \left\{ h_i \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} \cos\frac{\pi n x_{i\pm1}}{a_{i\pm1}} - t_c \right] M(x_{i\pm1}) \times \right.$$

$$\times [\delta_+(x_i + a_i) + \delta_-(x_i - a_i)] - \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} \cos\frac{\pi n x_{i\pm1}}{a_{i\pm1}} M(x_{i\pm1}) \times$$

$$\left. \times [\delta'_+(x_i + a_i) - \delta'_-(x_i - a_i)] \right\}. \qquad (9)$$

Используя интегральное преобразование Фурье по x_i [1,6] и теорему о свертке для этого преобразования, решение уравнения (9) получим в виде

$$\Theta = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{2} \int_{x_i-a_i}^{x_i+a_i} \left\{ h_{i\pm1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i\pm1)} \cos\frac{\pi n(\xi - x_i)}{a_i} - t_c \right) \times \right.$$

$$\times [K_0(\varkappa \sqrt{(x_{i\pm1} + a_{i\pm1})^2 + \xi^2}) + K_0(\varkappa \sqrt{(x_{i\pm1} - a_{i\pm1})^2 + \xi^2})] +$$

$$+ \varkappa \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i\pm1)} \cos\frac{\pi n(\xi - x_i)}{a_i} \left[\frac{x_{i\pm1} + a_{i\pm1}}{\sqrt{(x_{i\pm1} + a_{i\pm1})^2 + \xi^2}} K_1(\varkappa \sqrt{(x_{i\pm1} + a_{i\pm1})^2 + \xi^2}) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{x_{i\pm1} - a_{i\pm1}}{\sqrt{(x_{i\pm1} - a_{i\pm1})^2 + \xi^2}} K_1(\varkappa \sqrt{(x_{i\pm1} - a_{i\pm1})^2 + \xi^2}) \right] \right\} d\xi, \qquad (10)$$

где $K_\nu(\zeta)$ — функции Макдональда порядка $\nu = 0, 1$.

Учитывая предел [5]

$$\lim_{x_i \to a_i+0} (x_i - a_i) \frac{K_1(\varkappa \sqrt{(x_i - a_i)^2 + \xi^2})}{\sqrt{(x_i - a_i)^2 + \xi^2}} = \pi\delta(\varkappa\xi),$$

вычислим значение функции $\Theta(x_1, x_2)$ при $x_i = a_i$:

$$\Theta|_{x_i=a_i} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2a_i} \left\{ h_{i\pm1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(i\pm1)} \cos\frac{\pi n\xi}{a_i} - t_c \right) \times \right.$$

$$\times [K_0(\varkappa) \sqrt{(x_{i\pm1} + a_{i\pm1})^2 + \xi^2}) + K_0(\varkappa \sqrt{(x_{i\pm1} - a_{i\pm1})^2 + \xi^2})] +$$

$$+ \varkappa \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n^{(i\pm1)} \cos\frac{\pi n\xi}{a_i} \left[\frac{x_{i\pm1} + a_{i\pm1}}{\sqrt{(x_{i\pm1} + a_{i\pm1})^2 + \xi^2}} K_1(\varkappa \sqrt{(x_{i\pm1} + a_{i\pm1})^2 + \xi^2}) - \right.$$

$$-\frac{x_{i\pm1}-a_{i\pm1}}{\sqrt{(x_{i\pm1}-a_{i\pm1})^2+\xi^2}}K_1\left(\varkappa\sqrt{(x_{i\pm1}-a_{i\pm1})^2+\xi^2}\right)\Bigg]\Bigg\}d\xi-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x_{i\pm1}-a_{i\pm1}}^{x_{i\pm1}+a_{i\pm1}}\left\{h_i\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(i)}\cos\frac{\pi n(\xi-x_{i\pm1})}{a_{i\pm1}}-t_c\right)\left[K_0\left(\varkappa\sqrt{4a_i^2+\xi^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_0(\varkappa|\xi|)\right]+2\varkappa a_i\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(i)}\cos\frac{\pi n(\xi-x_{i\pm1})}{a_{i\pm1}}\frac{K_1\left(\varkappa\sqrt{4a_i^2+\xi^2}\right)}{\sqrt{4a_i^2+\xi^2}}\right\}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(i)}\cos\frac{\pi n x_{i\pm1}}{a_{i\pm1}}M(x_{i\pm1})\quad(i=1,\ 2).\tag{11}$$

Из (4) следует, что $T|_{x_i=a_i+0}=\Theta|_{x_i=a_i+0}$. Подставляя (11) в (8), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $b_n^{(i)}$, входящих в решение (10), такого вида:

$$b_0^{(i)}=b_0^{(i)}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}\left[\frac{h_i}{2a_{i\pm1}}(2a_{i\pm1}-\zeta)\left[K_0\left(\varkappa\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}\right)+K_0(\varkappa\zeta)\right]+\right.\right.$$

$$\left.+2\varkappa a_i\frac{K_1\left(\varkappa\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}\right)}{\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}}\right]d\zeta-\frac{a_i}{\pi a_{i\pm1}}K_0\left(2\varkappa\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)+$$

$$\left.+\frac{a_i}{\pi a_{i\pm1}}K_0(2\varkappa a_i)\right\}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}b_n^{(i)}\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}\sin\frac{\pi n\zeta}{a_{i\pm1}}\left\{h_i\left[K_0\left(\varkappa\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_0(\varkappa\zeta)\right]+\varkappa a_i\frac{K_1\left(\varkappa\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}\right)}{\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}}\right\}d\zeta-\frac{1}{2\pi a_{i\pm1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n^{(i\pm1)}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2a_i}\cos\frac{\pi n\xi}{a_i}\left\{h_{i\pm1}\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}K_0\left(\varkappa\sqrt{\xi^2+\zeta^2}\right)d\zeta-K_0\left(\varkappa\sqrt{\xi^2+4a_{i\pm1}^2}\right)+\right.$$

$$\left.+K_0(\varkappa\xi)\right\}d\xi+\frac{t_c}{2\pi a_{i\pm1}}\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}\left\{h_{i\pm1}\int\limits_0^{2a_i}K_0\left(\varkappa\sqrt{\xi^2+\zeta^2}\right)d\xi+h_i(2a_{i\pm1}-\zeta)\times\right.$$

$$\left.\times\left[K_0\left(\varkappa\sqrt{4a_{i\pm1}^2+\zeta^2}\right)+K_0(\varkappa\zeta)\right]\right\}d\zeta,\tag{12}$$

$$b_k^{(i)}=b_k^{(i)}\left\{\frac{1}{2}-\frac{h_i}{2\pi a_{i\pm1}}\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}\left[(2a_{i\pm1}-\zeta)\cos\frac{\pi k\zeta}{a_{i\pm1}}-\frac{a_{i\pm1}}{\pi k}\sin\frac{\pi k\zeta}{a_{i\pm1}}\right)\times\right.$$

$$\times\left[K_0\left(\varkappa\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}\right)+K_0(\varkappa\zeta)\right]d\zeta-\frac{2\varkappa a_i}{\pi}\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}\left(\cos\frac{\pi k\zeta}{a_{i\pm1}}-\frac{1}{2\pi k}\sin\frac{\pi k\zeta}{a_{i\pm1}}\right)\times$$

$$\times\frac{K_1\left(\varkappa\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}\right)}{\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}}d\zeta-\frac{a_i}{\pi a_{i\pm1}}K_0\left(2\varkappa\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)+\frac{a_i}{\pi a_{i\pm1}}K_0(2\varkappa a_i)-$$

$$\left.-\frac{a_i k}{a_{i\pm1}^2}\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}\sin\frac{\pi k\zeta}{a_{i\pm1}}K_0\left(\varkappa\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}\right)d\zeta\right\}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n\neq k}\frac{(-1)^{n+k}}{n^2-k^2}b_n^{(i)}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}\left(n\sin\frac{\pi n\zeta}{a_{i\pm1}}-k\sin\frac{\pi k\zeta}{a_{i\pm1}}\right)\left\{h_i\left[K_0(\varkappa)\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}\right)+K_0(\varkappa\zeta)\right]+$$

$$\left.+2\varkappa a_i\frac{K_1\left(\varkappa\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}\right)}{\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}}d\zeta\right\}+\frac{1}{\pi a_{i\pm1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+k}b_n^{(i\pm1)}\int\limits_0^{2a_i}\cos\frac{\pi n\xi}{a_i}\times$$

$$\times\left\{K_0\left(\varkappa\sqrt{4a_{i\pm1}^2+\xi^2}\right)-K_0(\varkappa\xi)+\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}\left(\frac{\pi k}{a_{i\pm1}}\sin\frac{\pi k\zeta}{a_{i\pm1}}-h_i\cos\frac{\pi k\zeta}{a_{i\pm1}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times K_0\left(\varkappa\sqrt{\xi^2+\zeta^2}\right)d\zeta\right\}d\xi+(-1)^k\frac{t_c}{\pi}\int\limits_0^{2a_{i\pm1}}\left\{\frac{h_{i\pm1}}{a_{i\pm1}}\cos\frac{\pi k\zeta}{a_{i\pm1}}\int\limits_0^{2a_i}K_0\left(\varkappa\sqrt{\xi^2+\zeta^2}\right)d\xi-\right.$$

$$\left.-\frac{h_i}{\pi k}\sin\frac{\pi k\zeta}{a_{i\pm1}}\left[K_0\left(\varkappa\sqrt{4a_i^2+\zeta^2}\right)+K_0(\varkappa\zeta)\right]\right\}d\zeta\quad(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Решая систему (12) и подставляя найденные коэффициенты $b_n^{(i)}$ в формулу (10), получим решение данной задачи. Приближенное решение системы (12) можно получить методом редукции [3].

1. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. — М. : Наука, 1977.—288 с.
2. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1976.—280 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.—744 с.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М. : Наука, 1977.—832 с.
5. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. — Киев : Наук. думка, 1972.—308 с.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981.—800 с.

Львовский государственный
ун-т им. Ив. Франко

Получено 13.06.83

УДК 538.30+518 : 517.91/94

М. Т. Солодяк, Я. Н. Пелех

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛОЕ ИЗ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ СТАЛИ

Рассмотрим задачу об определении периодической составляющей напряженности магнитного поля в слое из электротехнической стали, на поверхности $z_*=0$ которого поддерживается напряженность $\vec{H}^{(0)}=\{0,\ H_0\sin 2\pi\nu t_*,\ 0\}$, где ν — частота; z_* — толщинная координата; t_* — время.

Будем исходить из уравнений Максвелла в пренебрежении токами смещения. Тогда для определения $H_z=H(z_*,\ t_*)$ получим уравнение [3]

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z_*^2}=\sigma\mu_*(H)\frac{\partial H}{\partial t_*},\tag{1}$$

граничные условия

$$H(0,\ t_*)=H_0\sin 2\pi\nu t_*,\quad H(l,\ t_*)=0,\tag{2}$$

а также условие периодичности

$$H(z_*,\ t_*+T)=H(z_*,\ t_*).\tag{3}$$

Здесь $\mu_*(H)=\frac{dB(H)}{dH}$; $B=B(H)$ — индукция магнитного поля; $T=\frac{1}{\nu}$ — период колебаний электромагнитной волны; σ — коэффициент электропроводности; l — толщина слоя.

Зависимости $B=B(H)$ или $\mu_*=\mu_*(H)$ имеют нелинейный характер и для стали Э43 показаны соответственно сплошными линиями на рис. 1 и 2 [1,2].

В научно-технической литературе при решении задачи (1) — (3) обычно исходят из известной зависимости $B=B(H)$ [5]. Однако при этом не всегда достаточно точно отражается качественный характер изменения функции $\mu_*=\mu_*(H)$.