УДК 517.95

В. В. Бабенко

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При решении задач оптимального управления нагревом тел часто приходится отыскивать решения уравнения теплопроводности, которые удовлетворяли бы некоторым начальным и неклассическим граничным условиям. Примерами такого типа задач могут служить задачи оптимального по быстродействию управления нагревом тела при ограничениях на среднюю температуру тела либо на температурные напряжения [1]. Если при этом учесть конечную скорость распространения тепла [6], то математическая постановка указанных задач будет следующей.

В области $\Pi = \{0 < x < l, \quad t > 0\}$ найти классическое решение уравнения

$$c_q^{-2} u_{tt} + b^2 u_t + cu - u_{xx} = f(x, t), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным

$$u(x, 0) = 0, \tag{2}$$

$$u_t(x, 0) = 0 \tag{3}$$

и граничным

$$\gamma_i u(l(i-1), t) + a_i \int_0^l u(x, t)\, dx = h_i(t), \quad i = 1, 2, \tag{4}$$

условиям. Если скорость распространения тепла $c_q = \infty$, вместо задачи (1)—(4) следует рассматривать задачу (1), (2), (4).

Пусть $\mathscr{E}_{c_q}(x, t)$ — фундаментальное решение однородного уравнения (1), тогда, как известно [2], замена

$$u = v + \int_0^t d\tau \int_0^x \mathscr{E}_{c_q}(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi$$

приведет к решению задачи для однородного уравнения с теми же начальными и такого же вида граничными условиями. Поэтому без ограничения общности в (1) можем считать $f(x, t) \equiv 0$.

Вопросы существования и единственности решений такого вида задач при условии достаточной гладкости функций h_i и выполнении естественных условий согласования начальных и граничных условий в угловых точках (0, 0) и (l, 0) области Π были рассмотрены соответственно в работах [5] и [3]. В настоящей работе будет указан способ аналитического построения решений этих задач и исследована непрерывная их зависимость от исходных данных.

Применяя преобразование Лапласа по переменной t к задаче (1)—(4), получим

$$k^2 \tilde{u} - \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} = 0, \quad \gamma_i \tilde{u}(l(i-1), p) + a_i \int_0^l \tilde{u}(x, p)\, dx = \tilde{h}_i(p),$$

где

$$\tilde{u}(x, p) \risingdotseq u(x, t); \quad \tilde{h}_i(p) \risingdotseq h_i(t); \quad k^2 = c_q^{-2} p^2 + b^2 p + c.$$

Отсюда находим $\tilde{u}(x, p) = \sum\limits_{i=1}^{2} \tilde{h}_i(p)\, \tilde{u}_i(x, p)\, \Delta^{-1}(p)$,

где

$$\tilde{u}_i(x, p) = (-1)^{i-1} \left[a_{3-i} \frac{\operatorname{ch} k(l-x) - \operatorname{ch} kx}{k^2} + \gamma_{3-i} \frac{\operatorname{sh} k(x - l(2-i))}{k} \right];$$

$$\Delta(p) = \frac{-\gamma_1\gamma_2 \operatorname{sh} kl}{k} + (\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2)\frac{1-\operatorname{ch} kl}{k^2}.$$

Выполнив обратное преобразование Лапласса, получим

$$u(x,\ t) = \sum_{i=1}^{2}\int_0^t U_i(x,\ \tau)\, h_i(t-\tau)\, d\tau,$$

где $\tilde{u}_i(x,\ p)\,\Delta^{-1}(p) \doteqdot U_i(x,\ t)$. Поскольку $\tilde{u}_i(x,\ p)\,\Delta^{-1}(p)$ — мероморфная функция, регулярная на бесконечности, то для нахождения U_i можно воспользоваться теоремой разложения [4]. Для этого найдем все корни уравнения

$$\Delta(p) = 0. \tag{5}$$

В случае $\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2 = 0$ (в частности, классическая задача) уравнение (5) примет вид $k^{-1}\operatorname{sh} kl = 0$. Тогда

$$U_i(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_{ni}^{+}(x,\ t) + \varphi_{ni}^{-}(x,\ t)\right], \tag{6}$$

где

$$\varphi_{ni}^{\pm}(x,\ t) = \operatorname{res}\left[\frac{\tilde{u}_i e^{pt}}{\Delta},\ -\frac{b^2c_q^2}{2} \pm \frac{c_q}{2l}\sqrt{b^4l^2c_q^2 - 4(cl^2 + \pi^2 n^2)}\right].$$

В остальных случаях, сделав замену $kl = 2ig$, $i = \sqrt{-1}$, приходим к совокупности уравнений

$$g^{-1}\operatorname{tg} g = 0, \tag{7}$$

$$2\gamma_1\gamma_2 + l(\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2)\, g^{-1}\operatorname{tg} g = 0, \tag{8}$$

первое из которых имеет корни

$$g_n^{\pm} = \pm\pi n,\ n \in N, \tag{9}$$

а второе —

$$g_1^{\pm} = \pm\lambda_1 i,\ g_n^{\pm} = \pm\lambda_n,\ n = 2,\ 3,\ \ldots, \tag{10}$$

при

$$-\frac{1}{2} < \frac{\gamma_1\gamma_2}{l(\gamma_1 a_2 + \gamma_2 a_1)} < 0; \tag{10а}$$

$$g_1 = 0,\quad g_n^{\pm} = \pm\lambda_n,\ n = 2,\ 3,\ \ldots,$$

при

$$2\gamma_1\gamma_2 l^{-1}(\gamma_1 a_2 + \gamma_2 a_1)^{-1} = -1$$

или

$$g_n^{\pm} = \pm\lambda_n,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{10б}$$

в остальных случаях.

Величины λ_n, $n = 2,\ 3,\ \ldots$, в (10), (10а) и λ_n, $n \in N$, в (10б) суть положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} g = -2\gamma_1\gamma_2 l^{-1}(\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2)^{-1} g,$$

а λ_1 в (10) — положительный корень уравнения

$$\operatorname{th} g = -2\gamma_1\gamma_2 l^{-1}(\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2)^{-1} q.$$

Замечание. Уравнение (8) не может иметь никаких корней, кроме действительных или чисто мнимых. Действительно, полагая $g = x + iy$, умножив (8) на g и отделив действительную часть от мнимой, после очевидных преобразований получим

$$\frac{\sin 2x}{x} = \frac{\operatorname{sh} 2y}{y},$$

что невозможно при $xy \neq 0$.

Функции $U_i(x, t)$ в перечисленных случаях будут иметь вид

$$U_i(x, t) = U_{1i}(x, t) + U_{2i}(x, t), \tag{11}$$

где

$$U_{1i}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\psi_{ni}^{+}(x, t) + \psi_{ni}^{-}(x, t)];$$

$$\psi_{ni}^{\pm}(x, t) = \operatorname{res}\left[\frac{\tilde{u}_i e^{pt}}{\Delta}, \ -\frac{b^2 c_q^2}{2} \pm \frac{c_q}{2l}\sqrt{b^4 l^2 c_q^2 - 4(cl^2 + 4\pi^2 n^2)}\right]; \tag{12}$$

функции U_{2i} в зависимости от распределения корней имеют соответственно следующий вид:

$$U_{2i}(x, t) = \operatorname{res}\left[\frac{\tilde{u}_i e^{pt}}{\Delta}, \ -\frac{b^2 c_q^2}{2} + \frac{c_q}{2l}\sqrt{b^4 l^2 c_q^2 - 4(cl^2 - \lambda_1^2)}\right] +$$
$$+ \operatorname{res}\left[\frac{\tilde{u}_i e^{pt}}{\Delta}, \ -\frac{b^2 c_q^2}{2} - \frac{c_q}{2l}\sqrt{b^4 l^2 c_q^2 - 4(cl^2 - \lambda_1^2)}\right] +$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\left(\varkappa_{ni}^{+}(x, t) + \varkappa_{ni}^{-}(x, t)\right), \tag{13}$$

$$U_{2i}(x, t) = \operatorname{res}\left[\frac{\tilde{u}_i e^{pt}}{\Delta}, \ -\frac{b^2 c_q^2}{2} + \frac{c_q}{2l}\sqrt{b^4 l^2 c_q^2 - 4cl^2}\right] +$$
$$+ \operatorname{res}\left[\frac{\tilde{u}_i e^{pt}}{\Delta}, \ -\frac{b^2 c_q^2}{2} - \frac{c_q}{2l}\sqrt{b^4 l^2 c_q^2 - 4cl^2}\right] +$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\left(\varkappa_{ni}^{+}(x, t) + \varkappa_{ni}^{-}(x, t)\right), \tag{13а}$$

$$U_{2i}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varkappa_{ni}^{+}(x, t) + \varkappa_{ni}^{-}(x, t)\right), \tag{13б}$$

где

$$\varkappa_{ni}^{\pm}(x, t) = \operatorname{res}\left[\frac{\tilde{u}_i e^{pt}}{\Delta}, \ -\frac{b^2 c_q^2}{2} \pm \frac{c_q}{2l}\sqrt{b^4 l^2 c_q^2 - 4(cl^2 + \lambda_1^2)}\right].$$

В случае $c_q = \infty$ вместо формул (6), (12), (13), (13а), (13б) для определения U_i служат формулы

$$U_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+i-1}}{\gamma_1\gamma_2 l^2 b^2}\left[a_{3-i} l\left(\cos\frac{\pi n x}{l} - \cos\frac{\pi n(l-x)}{l}\right) +\right.$$
$$\left. + \pi\gamma_{3-i} n \sin\frac{\pi n(x - (2-i)l)}{l}\right]\exp\left(-\frac{l^2 c + \pi^2 n^2}{b^2 l^2} t\right), \tag{14}$$

$$U_{1i}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{i-1}}{\gamma_1\gamma_2 b^2 l^2}\left[a_{3-i} l\left(\cos\frac{2\pi n(l-x)}{l} - \cos\frac{2\pi n x}{l}\right) -\right.$$
$$\left. - 2\pi\gamma_{3-i} n \sin\frac{2\pi n(x - (2-i)l)}{l}\right]\exp\left(-\frac{l^2 c + 4\pi^2 n^2}{b^2 l^2} t\right), \tag{15}$$

$$U_{2i}(x, t) = \frac{(-1)^{i-1}\cdot 4\lambda_1^2}{b^2 l^2} \times$$

$$\times \frac{a_{3-i} l\left(\operatorname{ch} 2\lambda_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \operatorname{ch}\frac{2\lambda_1 x}{l}\right) + 2\lambda_1\gamma_{3-i}\operatorname{sh} 2\lambda_1\left(\frac{x}{l} - 2 + i\right)}{\lambda_1\gamma_1\gamma_2(\operatorname{sh} 2\lambda_1 - 2\lambda_1\operatorname{ch} 2\lambda_1) + (\gamma_2 a_1 + \gamma_1 a_2)\, l\,(1 - \operatorname{ch} 2\lambda_1 + \lambda_1\operatorname{sh} 2\lambda_1)} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{cl^2 - 4\lambda_1^2}{b^2l^2}t\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}\cdot 4\lambda_n^2}{b^2l^2} \varkappa_{ni}(x) e^{-\frac{cl^2+4\lambda_n^2}{b^2l^2}t}, \quad (16)$$

$$U_{2i}(x,\ t) = \frac{12\cdot(-1)^{i-1}}{\gamma_1\gamma_2 b^2l^2}\left[a_{3-i}(l-2x) + \gamma_{3-i}\left(\frac{x}{l} - 2 + i\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{c}{b^2}t\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}\cdot 4\lambda_n^2}{b^2l^2} \varkappa_{ni}(x) e^{-\frac{cl^2+4\lambda_n^2}{b^2l^2}t}, \quad (16а)$$

$$U_{2i}(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}\cdot 4\lambda_n^2}{b^2l^2} \varkappa_{ni}(x) e^{-\frac{cl^2+4\lambda_n^2}{b^2l^2}t}, \quad (16б)$$

где

$$\varkappa_{ni}(x) = \frac{a_{3-i}l\left(\cos 2\lambda_n\frac{x}{l} - \cos 2\lambda_n\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) + 2\lambda_n\gamma_{3-i}\sin 2\lambda_n\left(\frac{x}{l} - 2 + i\right)}{\lambda_n\gamma_1\gamma_2(2\lambda_n\cos 2\lambda_n - \sin 2\lambda_n) + (\gamma_1a_2 + \gamma_2a_1)(\lambda_n\sin 2\lambda_n + \cos 2\lambda_n - 1)l}.$$

Легко видеть, что как в классическом случае, так и в случае интегральных ограничений непрерывная зависимость решения задачи от исходных данных определяется значением коэффициента c. В случае $cl^2 < -\pi^2n^2$ либо $cl^2 < -\lambda_n^2$ для некоторого значения $n \in N$ решение указанных задач не будет непрерывно зависимым от исходных данных. Кроме того, следует отметить специфическое влияние неклассических граничных условий (4). Как видно из (13) или (16), при некотором выборе параметров γ_i и a_i выполнено условие $cl^2 < \lambda_1^2$, что приводит к нарушению непрерывной зависимости решения задачи (1)—(4) (либо (1), (2), (4)) от исходных данных, тогда как соответствующая классическая задача является поставленной вполне корректно.

1. *Вигак В. М.* Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. — Киев : Наук. думка, 1979.—360 с.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1981.—512 с.
3. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. — Дифференц. уравнения, 1977, 13, № 2, с. 294—304.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М. : Физматгиз, 1958.—678 с.
5. *Мельник З. О.* Задача с интегральными ограничениями для гиперболического уравнения второго порядка. — В кн.: Общая теория граничных задач : Сб. науч. тр. Киев : Наук. думка, 1983, с. 281—282.
6. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. — Киев : Наук. думка, 1976.—312 с.

Львовский государственный
ун-т им. Ив. Франко

Получено 25.04.84

УДК 536.12

А. Н. Горечко

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПРИ ПЕРЕМЕННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООТДАЧИ

Инженерная практика предъявляет повышенный интерес к расчету температурных напряжений и полей в упругих элементах конструкций при переменных коэффициентах теплоотдачи. В работе [6] рассмотрены задачи теплопроводности и термоупругости для тонкостенных элементов конструкций. Задачи теплопроводности для массивных тел при коэф-