

$$\begin{aligned}
& + 4\nu_3 (b_0 (1 - b_0^2) (-3b_0^2 + 51) + U_4)]; \quad Z_{12} = \pi (3 - 13\nu); \\
Z_{22} & = b_1 (3 - 13\nu); \quad Z_{32} = 6\nu_0^2 [-20b_1 (1 + \ln \lambda) + 30b_2 - \\
& - 10\omega_2 (1 + 2b_0^2) + 11\pi b_0^2 + \frac{3}{2}\pi] - \nu_2 [60b_1 q_1 + 20\omega_2 (4 - \\
& - 3b_0^2) - 20b_2 + 33\pi b_0^2 + \frac{9\pi}{2}] + 15b_1 \left(16\nu_0 \left[\frac{\nu_0}{2} (q_1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \ln \lambda) + \frac{1 - 7\nu}{12} \right] - 11 - 46\nu - 135\nu^2 \right).
\end{aligned}$$

Проведен численный анализ раскрытия вершины трещины для оболочки, находящейся под внутренним давлением. При этом δ определялось на внешней ($z=h$), внутренней ($z=-h$) и срединной поверхности оболочки. При рассматриваемой нагрузке результаты мало отличаются. На рис. 2 приведены графики изменения относительного раскрытия $\eta = \delta/d$ в зависимости от λ_0 и N^* при $z=0$. Кривые 1—3 (сплошные и штриховые линии) соответствуют тем же параметрам, что и на рис. 1. Раскрытие δ , вычисленное с помощью первого и второго приближений, имеет близкие значения только при малых λ_0 и N^* .

1. Брок Д. Основы механики разрушения. — М.: Высш. шк., 1980.—368 с.
2. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Розвиток найдрібніших тріщин в твердому тілі.— Прикл. механіка, 1959, 5, вип. 4, с. 391—401.
3. Осадчук В. А. Метод дисторсий в задачах об упругом равновесии оболочек с разрезами (трещинами).— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 10, с. 27—50.
4. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев: Наук. думка, 1968.—245 с.
5. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев: Наук. думка, 1976.—442 с.
6. Прагер В. Проблемы теории пластичности.— М.: Физматгиз, 1958.—136 с.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 16.11.83

УДК 539.3

Б. Д. Дробенко

О РАСЧЕТЕ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Исследование напряженного состояния оболочечных конструкций с использованием теории оболочек приводит к значительно завышенным значениям напряжений вблизи отверстий, в окрестности зон соединения оболочек и в других областях резкого изменения геометрии [3, 8], вследствие чего в последнее время появилась тенденция расчета оболочечных конструкций на основе уравнений трехмерной теории упругости [1, 2, 4, 6]. Однако непосредственное применение трехмерных конечных элементов (КЭ) для расчета оболочек оказывается не всегда эффективным. Так, при уменьшении толщины оболочки обнаруживается резкое замедление сходимости решений из-за больших коэффициентов жесткости для перемещений трехмерных КЭ по толщине оболочки [1, 6]. К тому же наличие трех степеней свободы в каждом узле приводит к неоправданному возрастанию времени решения задачи.

В данной работе предложена методика расчета оболочечных конструкций на базе уравнений трехмерной теории упругости с использованием в одной расчетной схеме как трехмерных КЭ, так и элементов, полученных из трехмерных путем учета частных допущений теории оболочек.

Рассмотрим оболочечную конструкцию, занимающую область W эвклидова пространства E^3 , отнесенного к декартовой системе координат

нат. Пусть конструкция, находящаяся в условиях силового стационарного нагружения, состоит из n оболочек $W^{(i)}$ переменной толщины и различной геометрической конфигурации. Состояние равновесия составной оболочки определим из условия минимума потенциальной энергии упругой деформации [5]

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_W (Au)^T D A u dV - \int_{S_s} u^T g_s dS \quad (1)$$

при удовлетворении заданных кинематических граничных условий

$$u|_{S_u} = u_0, \quad (2)$$

где $S = S_u \cup S_s$ — поверхность конструкции; A — линейный дифференциальный оператор геометрических соотношений теории упругости; D — квадратная матрица упругих постоянных; g_s — вектор внешнего поверхностного нагружения; u — вектор перемещения.

Для минимизации функционала Лагранжа (1) в расчетной схеме МКЭ воспользуемся элементами, построенными на базе уравнений трехмерной теории упругости. В окрестностях зон соединения используем трехмерный изопараметрический элемент, а в остальной части составной оболочки — суперпараметрический оболочечный элемент [1]. С этой целью выделим области соединения оболочек.

Пусть оболочка $W^{(i)}$ соединяется с m_i оболочками W^{i,i_k} по поверхностям S^{i,i_k} , $k = 1, m_i$. Обозначим

$$W_{d_k}^{i,i_k} = \{x \in E^3 : x \in \{V(y, d_k) \cap W^{(i)}\}, y \in S^{i,i_k}, \quad (3)$$

$$W^{(i)} = W^{(i)} \setminus \bigcup_{k=1}^{m_i} W^{i,i_k}.$$

Здесь

$$V(y, d_k) = \{x \in E^3 : \|x - y\| \leq d_k\}.$$

В случае декартовой системы координат удобно ввести «кубическую норму» [7]

$$\|x - y\| = \max_{1 \leq j \leq 3} |x_j - y_j|.$$

В результате введенных обозначений конструкция представляется в виде объединения окрестностей зон соединения $W_{d_k}^{i,i_k}$ и областей, удаленных от зон соединения, т. е.

$$W = \bigcup_{i=1}^n \left\{ W^{(i)} \bigcup_{k=1}^{m_i} W_{d_k}^{i,i_k} \right\}.$$

В соответствии с МКЭ произведем однослойную аппроксимацию каждой из областей $W^{(i)}$, $W_{d_k}^{i,i_k}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m_i}$, объемными КЭ, образованными в результате поперечного сечения плоскостями по толщине оболочек, используя нерегулярную сетку разбиения. Размеры КЭ возрастают в направлении от зоны соединения по закону арифметической прогрессии.

Суперпараметрический оболочечный элемент, который используется в областях $W^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, получен из трехмерного изопараметрического элемента путем введения статической гипотезы теории оболочек о равенстве нулю напряжений обжатия. Форма такого элемента описывается парами точек j_b и j_n (рис. 1), заданными их декартовыми координатами. Поле перемещений внутри элемента однозначно определяется тремя декартовыми компонентами узлового перемещения (u_j, v_j, w_j) срединной поверхности и двумя углами поворота (α_j, β_j) узлового вектора V_{3j} относительно двух взаимноортогональных, перпендикулярных к нему направлений согласно равенству (14.3) [1]:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum N_j \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} + \sum N_j \gamma \frac{1}{2} t_j [v_{1j}, -v_{2j}] \begin{Bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где $v_{1j} = (v_{1j}^{(1)}, v_{1j}^{(2)}, v_{1j}^{(3)})^T$, $v_{2j} = (v_{2j}^{(1)}, v_{2j}^{(2)}, v_{2j}^{(3)})^T$ — векторы единичной длины, задающие два ортогональных к V_{3j} направления; t_j — толщина оболочки в узловой точке; η — линейная координата по толщине оболочки; N_j — координатная функция, равная единице в j -узле и нулю в остальных.

После произведенной дискретизации полная потенциальная энергия составной оболочки может быть представлена в виде суммы ее частей, относящихся к элементам $\Pi(u) = \sum_e \Pi^{(e)}(u)$. Применение принципа минимума потенциальной энергии упругой деформации позволяет получить канонические уравнения МКЭ в варианте метода перемещений

$$Kb = f, \quad (5)$$

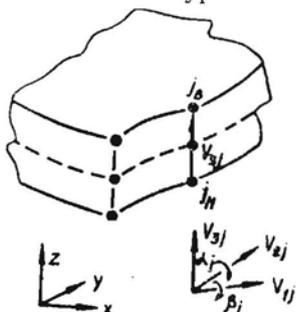


Рис. 1.

где b — вектор неизвестных узловых перемещений составной оболочки; K, f — ее общие матрица жесткости и вектор сил соответственно, получаемые путем суммирования матриц и векторов каждого КЭ. Алгоритмы получения основных матричных характеристик указанных элементов изложены в работе [1]. При удовлетворении кинематическим граничным условиям, которые должны исключать движение конструкции как жесткого целого, система линейных алгебраических

уравнений (5) имеет положительно определенную матрицу и является однозначно разрешимой [6].

Следует заметить, что при составлении канонических уравнений МКЭ с использованием различных типов КЭ узловые перемещения общих граней для трехмерных и суперпараметрических оболочечных элементов должны быть связаны добавочными соотношениями. Для осуществления этой связи поступим следующим образом. Допустим $\Delta_m \subset W_{d_k}^{i,k}$ — изопараметрический трехмерный, а $\tilde{\Delta}_e \subset \tilde{W}^{(i)}$ — суперпараметрический оболочечный элемент, имеющие общую грань $S_{m,e}$. Пусть q, \tilde{q} — вектора обобщенных узловых перемещений элементов Δ_m и $\tilde{\Delta}_e$ соответственно, компоненты которых разделим на две части:

$$q = (q_1, q_2)^T, \quad \tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)^T,$$

где q_1, \tilde{q}_1 — перемещения узлов, находящихся на общей грани $S_{m,e}$; q_2, \tilde{q}_2 — перемещения остальных узлов рассматриваемых элементов. Или, более подробно на примере квадратичных элементов (рис. 2):

$$q_1 = (\delta_{s1}, \delta_{s2}, \dots, \delta_{s8})^T, \quad \tilde{q}_1 = (\tilde{\delta}_p, \tilde{\delta}_q, \tilde{\delta}_r)^T.$$

Здесь

$$\delta_{st} = (u_{st}, v_{st}, w_{st})^T, \quad t = \overline{1, 8};$$

$$\tilde{\delta}_j = (u_j, v_j, w_j, \alpha_j, \beta_j)^T, \quad j = p, q, r.$$

Подставляя координаты st -узла в (4), получим выражение узловых перемещений δ_{st} трехмерного элемента Δ_m через узловые перемещения $\tilde{\delta}_j$ элемента $\tilde{\Delta}_e$. К примеру, для узла δ_{s1} :

$$\delta_{s1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} t_p v_{1p}^{(1)} & -\frac{1}{2} t_p v_{2p}^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} t_p v_{1p}^{(2)} & -\frac{1}{2} t_p v_{2p}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} t_p v_{1p}^{(3)} & -\frac{1}{2} t_p v_{2p}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \\ \alpha_p \\ \beta_p \end{pmatrix} = R_{s1} \tilde{\delta}_p.$$

Образовав вектор перемещений $q^{\Delta} = (\tilde{q}_1, q_2)$ и построив матрицу

$$R_m = \begin{pmatrix} R_{s1} & 0 & 0 & R_{s4} & 0 & R_{s6} & 0 & 0 \\ 0 & R_{s2} & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{s7} & 0 \\ 0 & 0 & R_{s3} & 0 & R_{s5} & 0 & 0 & R_{s8} \end{pmatrix},$$

получим

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_m & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = Qq^{\Delta},$$

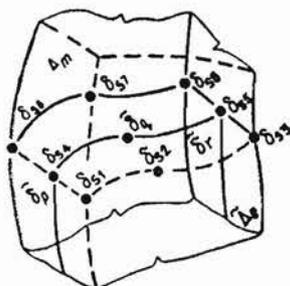


Рис. 2.

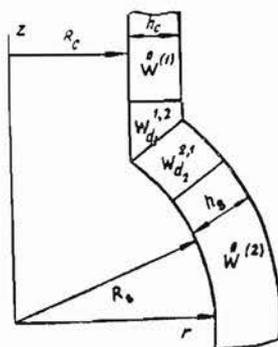


Рис. 3.

где $0, I$ — нулевая и единичная матрицы соответственно. Таким образом, матрица жесткости и вектор сил трехмерного элемента Δ_m , соседствующего с суперпараметрическим элементом $\tilde{\Delta}_e$, принимает вид

$$K_{\Delta} = \int_{\Delta_m} Q^T B^T D_i B Q dV, \quad f_{\Delta} = \int_{\Delta_m} Q^T G^T g_i dV,$$

где B — матрица, полученная путем умножения дифференциального оператора A на матрицу функции формы G [6] трехмерного КЭ; D_i — матрица упругих постоянных материала оболочки $W^{(i)}$.

Для апробации предложенной методики был рассмотрен расчет сферического сосуда высокого давления с радиальным цилиндрическим патрубком, верхний край которого закрыт заглушкой. Осуществив факторизацию конструкции (рис. 3):

$$W = \overset{0}{W}^{(1)} \cup W_{d_1}^{1,2} \cup W_{d_2}^{2,1} \cup \overset{0}{W}^{(2)}$$

и используя в областях $W_{d_1}^{1,2}$ и $W_{d_2}^{2,1}$ трехмерные изопараметрические КЭ, а в областях $\overset{0}{W}^{(1)}$, $\overset{0}{W}^{(2)}$ — суперпараметрические оболочечные элементы серендипова семейства, был произведен вычислительный эксперимент, в ходе которого были установлены характеристические размеры d_1 и d_2 областей $W_{d_1}^{1,2}$ и $W_{d_2}^{2,1}$ и ограничения на размеры КЭ, необходимые для достижения хорошей сходимости решений. Так, при использовании квадратичных элементов их длина l_{Δ} по отношению к толщине оболочки h должна удовлетворять неравенству $0,5h \leq l_{\Delta} \leq 12h$. Кубические элементы с достаточно хорошей точностью описывают напряженное состояние в областях, удаленных от зон соединения при размерах до $20h$. Однако в окрестности зоны соединения их размеры по длине должны быть приблизительно такими же, как и квадратичных.

Результаты расчетов сравнивались с известными в литературе. Решение МКЭ на основании предложенной методики при $d_1 = 2h_c$, $d_2 = 2h_s$ хорошо согласуется с аналитическим решением, полученным в работе [4], и экспериментальными данными работы [9]. В результате вычислений было установлено, что максимальными являются окружные

напряжения, возникающие на внешней поверхности составной оболочки. На рис. 4 приведены их графики, полученные при следующих значениях исходных данных:

$$R_s = 0,175 \text{ м}, R_c = 0,087 \text{ м}, h_s = 0,03 \text{ м}, h_c = 0,015 \text{ м}.$$

Сплошная линия — аналитическое решение [4], штриховая — результаты эксперимента [9], * — решение МКЭ на основании предложенной методики, l_s, l_c — расстояния на внешней поверхности сферической и цилиндрической оболочек соответственно в направлении от зоны соединения.

Следует заметить, что для улучшения сходимости решений, в соответствии с [1], применялось понижение порядка численного интегрирования по КЭ суперпараметрического типа. В окрестности зоны соединения, где использовались трехмерные КЭ, вычисления проводились без понижения порядка интегрирования, а в случае сильно искривленных КЭ для получения достаточно точных решений — даже с повышением точности интегрирования.

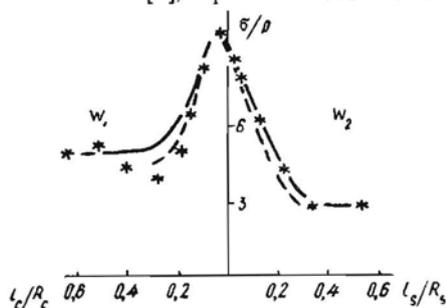


Рис. 4.

Попутно было получено решение поставленной задачи с использованием только трехмерных изопараметрических КЭ. Сравнительный анализ результатов показал совпадение этих решений с точностью до 4%. Причем при расчете конструкции на основании предложенной методики затраты машинного времени были на 35% меньшими, что особенно существенно при решении оптимизационных задач; когда на каждом шаге итерационной процедуры поиска оптимума необходимо определить напряженное состояние конструкции.

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.—М.: Мир, 1975.—539 с.
2. Киричевский В. В., Сахаров А. С. Исследование напряженно-деформированного состояния сферических оболочек с эксцентричным вырезом на основе пространственной задачи теории упругости методом конечных элементов.—Пробл. прочности, 1973, № 2, с. 91—94.
3. Китчинг Р., Гилл С., Бани-Ахмад М., Пэйн Р. Исследование напряженного состояния в сферическом сосуде высокого давления с подкрепляющей накладкой в окрестности радиального патрубка.—Расчет напряженного состояния сосудов: Механика. Новое в зарубежной науке, 1980, вып. 24, с. 56—72.
4. Редкоп Д. Трехмерный анализ напряженного состояния в зоне пересечения сферической и цилиндрической упругих оболочек.—Там же, с. 151—171.
5. Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем.—Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.—224 с.
6. Сахаров А. С., Альтенбах И. Метод конечных элементов в механике твердых тел.—К.: Вища шк., 1982.—479 с.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ.—М.: Наука, 1980.—490 с.
8. Roze R. T. New design method for pressure vessel nozzles.—The Engineer, 1962, 214, p. 90—93.
9. Taylor C. E., Lind N. C. Photoelastic study of the stresses near openings in pressure vessels.—WRC Bulletin, 1966, 113, p. 1—24.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 25.04.84.