

**ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПОЛОГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ С ПРОДОЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ
С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ**

Для вязких материалов пластические деформации, развивающиеся в окрестности трещин, могут занимать области значительных размеров, соизмеримые, например, с размерами трещин. В таких случаях для определения полей напряжений и смещений необходимо решать упруго-пластическую задачу. Поскольку рассмотрение упруго-пластических задач для тел с трещинами в строгой классической постановке, когда совместно решаются две системы уравнений — одна в упругой области, а другая — в пластической, — при неизвестном контуре, разделяющем данные области, встречает значительные трудности, заслуживают внимания упрощенные модели, согласующиеся с экспериментальными данными. Для тонкостенных элементов конструкций достаточно эффективно использование δ_k -модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [1, 2, 4].

В настоящей работе на основе аналога δ_k модели исследуется напряженно-деформированное состояние пологой цилиндрической оболочки из идеального упруго-пластического материала с продольной сквозной трещиной длины $2l_0$. Ограничимся рассмотрением случая, когда напряженное состояние оболочки симметрично относительно середины трещины $X=0$. Возникающие в процессе нагружения оболочки пластические зоны впереди трещины заменим в соответствии с δ_k -моделью линиями разрыва упругих смещений и углов поворота, на которых нормальное окружное усилие N и изгибающий момент M должны удовлетворять условию пластичности. Здесь в качестве такого условия принято условие Треска, которое для оболочки записывается в виде [6]

$$\frac{N}{2h\sigma_T} + \frac{3M}{2h^2\sigma_T} = 1, \quad (1)$$

где σ_T — предел текучести; $2h$ — толщина оболочки.

Таким образом, в рамках принятой модели на берегах новой трещины длины $2l$, увеличенной по сравнению с исходной на величину пластической зоны, должны удовлетворяться условия

$$N_2(X, 0) = \begin{cases} -N_2^0, & |X| < l_0, \\ N - N_2^0, & l_0 \leq |X| \leq l, \end{cases} \quad (2)$$

$$M_2(X, 0) = \begin{cases} -M_2^0, & |X| < l_0, \\ M - M_2^0, & l_0 \leq |X| \leq l. \end{cases}$$

Здесь $l - l_0$ — длина пластической зоны; N, M — неизвестные усилие и момент, действующие в пластической области и стремящиеся закрыть трещину; N_2^0, M_2^0 — нормальное усилие и изгибающий момент в оболочке без трещины.

Задача об определении напряженного состояния рассматриваемой цилиндрической оболочки с трещиной длиной $2l$, на основании результатов работы [3], приведена к системе сингулярных интегральных уравнений

$$\sum_{j=1,3} \int_{-1}^1 \varphi_j(\xi) \left[\frac{a_{mj}}{\xi - x} + K_{mj}^0(x - \xi) \right] d\xi = f_m(x), \quad |x| < 1 \quad (m = 1, 3), \quad (3)$$

где

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} [v(\xi)]; \quad \varphi_2(\xi) = \frac{Rc_0}{l} \frac{d}{d\xi} [\theta_2(\xi)];$$

$$a_{11} = 1; \quad a_{13} = a_{31} = 0; \quad a_{33} = 3 - 2\nu - \nu^2;$$

$$f_1 = \frac{4\pi}{D_0} \begin{cases} -N_2^0; & |x| < b_0, \\ N - N_2^0; & b_0 \leq |x| \leq 1; \end{cases}$$

$$f_2 = \frac{4\pi}{D_0 R c_0} \begin{cases} -M_2^0; & |x| < b_0, \\ M - M_2^0; & b_0 \leq |x| \leq 1; \end{cases}$$

$$c_0^2 = \frac{h^2}{3R^2(1-\nu_2)}; \quad x = \frac{X}{l}; \quad b_0 = \frac{l_0}{l}; \quad D_0 = 2Eh;$$

E , ν и R — соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона и радиус срединной поверхности оболочки; $K_{mj}^0(x-\xi)$ — непрерывные функции для всего множества действительных значений x и ξ . Выражения для K_{mj}^0 приведены в работе [3]. Решение системы (2) должно удовлетворять условиям

$$\int_{-1}^1 \varphi_j(\xi) d\xi = 0 \quad (j = 1, 3). \quad (4)$$

Применяя к системе (3) формулу обращения интеграла типа Коши, получим систему интегральных уравнений Фредгольма II рода:

$$\varphi_j(x) = - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left\{ \frac{1}{a_{jj}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x} \left[f_j - \sum_{m=1,3}^1 \int_{-1}^1 \varphi_m(\tau) K_{mj}^0(\xi-\tau) d\tau \right] d\xi \right\}$$

$$(j = 1, 3). \quad (5)$$

Учитывая структуру ядер $K_{ij}^0(z)$, решение системы (5) будем строить в виде ряда

$$\varphi_j(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{jmn}(x) \lambda^m \ln^n \lambda \quad (j = 1, 3), \quad (6)$$

где

$$\lambda = \frac{l \sqrt{3(1-\nu^2)}}{2 \sqrt{Rh}}.$$

В случае, когда $N_2^0 = \text{const}$, $M_2^0 = 0$, $\varphi_j(x)$ получены при $m = 4$, $n = 2$.

На основании решения (6) с использованием известных формул [5] определяются коэффициенты интенсивности нормальных усилий K_1 и изгибающих моментов K_3 в окрестности вершины трещины длиной $2l$. Однако поскольку впереди реальной трещины существует пластическая зона, то усилия и моменты в конце этой зоны ограничены, а следовательно, коэффициенты интенсивности усилий и моментов должны обращаться в нуль, т. е.

$$K_1 = 0, \quad K_3 = 0. \quad (7)$$

Определив из уравнений (7) неизвестные усилие N и момент M , действующие в пластической зоне, и подставив полученные выражения в условие (1), получим нелинейное уравнение относительно b_0 :

$$-\frac{\pi N^* U_2}{U_1} + \left| \frac{9\pi a_3 N^* U_3}{\sqrt{3(1-\nu^2)} U_1} \right| = 1, \quad (8)$$

где

$$N^* = \frac{N_2^0}{2h\sigma_T}; \quad a_3 = a_{33};$$

$$U_1 = 2\pi F_3 k_2 - 3a_3 F_2 k_3; \quad U_2 = 2\pi F_3 k_1 - 3a_3 F_1 k_3;$$

$$U_3 = F_2 k_1 - F_1 k_2; \quad U_4 = 3[\omega_1(3 + 22b_0^2)(1 - b_0^2)^{3/2} +$$

$$+ 32b_0^5 \ln b_0]; \quad \omega_1 = \arcsin b_0; \quad \omega_2 = \arccos b_0;$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= 512a_3 + 160\pi a_3 \lambda^2 + \lambda^4 F_{01}; \\
F_2 &= -1024a_3 \omega_2 + 320\pi a_3 \lambda^2 b_1 + \lambda^4 F_{02}; \\
F_3 &= \frac{768a_3 \lambda^2}{\pi} b_1 f_2 + \lambda^4 F_{03}; \\
k_1 &= 384a_3 \lambda^2 f_2 + \lambda^4 k_{10}; \quad k_2 = 768a_3 \lambda^2 f_2 b_1 + \lambda^4 k_{20}; \\
k_3 &= -1536a_3 \omega_2 - 192\pi \lambda^2 \nu_1 b_1 + \lambda^4 k_{30}; \quad b_1 = b_2 - \omega_2; \\
b_2 &= b_0 \sqrt{1 - b_0^2}; \quad q_1 = 2 \ln 2 - \ln \lambda - C; \quad q_2 = q_1 - \ln 2; \\
f_1 &= \frac{\nu_0}{2} q_1 + \frac{1 - 7\nu}{12}; \quad f_2 = \frac{\nu_0}{2} (q_1 - 1) + \frac{1 - 7\nu}{12}; \quad \nu_0 = 5\nu + 1; \\
F_{01} &= a_3 (477 + 50\pi^2 - 756q_1) + 128f_2 \left[\frac{\nu_0}{2} \left(q_1 - \frac{3}{4} \right) + \frac{1 - 7\nu}{12} \right]; \\
F_{02} &= 16f_2 [16f_1 b_1 - 2\nu_0 (4b_2 - 3\omega_2)] + 42a_3 [3\pi (6 \ln 2 - \\
&- 7) - b_2 (28 \ln 2 - 9 + 2b_0^2 + 8b_0^2 \ln 2) - 8b_0^2 \omega_1 (3 + b_0^2) - \\
&- 3\omega_1 (12 \ln 2 - 13)] + 100\pi^2 a_3 b_1 + \frac{2}{9} \nu_4 [3\omega_1 (3 + 24b_0^2 + \\
&+ 8b_0^4) + 5b_2 (11 + 10b_0^2)] - \frac{4}{3} \nu_0^2 [8b_0^2 \omega_1 (3 + b_0^2) + 3\omega_1 + \\
&+ \frac{1}{3} b_2 (b_0^2 (24 \ln 2 + 26) - 60 \ln 2 + 115)] + \frac{32}{3} \nu_0 b_2 (5 - \\
&- 2b_0^2) \left(\frac{\nu_0}{2} q_2 + \frac{1 - 7\nu}{12} \right) + 6a_3 (-28q_2 - 15) [b_2 (7 + 2b_0^2) - 9\omega_2]; \\
F_{03} &= 48b_1 (5a_3 f_1 - 2\nu_1 f_2) + (13\nu - 3) [b_2 (7 + 2b_0^2) - 9\omega_2] a_3; \\
k_{10} &= 48\pi (7 - 6\nu - 5\nu^2) f_1 - 12a_3 (5\pi + 6) \nu_0 + \frac{63}{2} \pi a_3 (9\nu + 1); \\
k_{20} &= 240\pi a_3 b_1 f_2 - 48\pi \nu_1 f_1 b_1 + a_3 [b_2 (7 + 2b_0^2) - \\
&- 9\omega_2] [7\pi (9\nu + 1) - 16\nu_0]; \quad k_{30} = -192\nu_0 b_1 \left[\frac{\nu_0}{2} (q_1 - \right. \\
&- \ln^2 \lambda) + \left. \frac{1 - 7\nu}{12} \right] + 384b_1 f_2 \left[\frac{\nu_0}{2} (q_1 + \ln \lambda) + \frac{1 - 7\nu}{12} \right] - \\
&- 192\nu_0 b_2 f_2 + 144\nu_0 \omega_2 f_2 + 4(\nu_2 q_2 + \\
&+ \frac{11 + 46\nu + 135\nu^2}{4}) [b_2 (7 + 2b_0^2) - 9\omega_2] + \nu_2 \{6\omega_2 (7 - 6 \ln 2) + \omega_1 [3 + \\
&+ 8b_0^2 (3 + b_0^2)] + b_2 [28 \ln 2 - 9 + 2b_0^2 (1 + 4 \ln 2)]\} + \\
&+ 2\nu_0 \left\{ -\nu_0 [12b_0 (2b_0 \omega_1 + 3 \sqrt{1 - b_0^2}) + \omega_1 (3 + 8b_0^4) + \frac{1}{3} (b_0^2 (26 + \\
&+ 24 \ln 2) + 7 - 60 \ln 2) b_2] + 8b_2 (5 - 2b_0^2) \left(\frac{\nu_0}{2} q_2 + \frac{1 - 7\nu}{12} \right) \right\} + \\
&+ \frac{1}{3} \nu_3 [-5b_2 (11 + 10b_0^2) - 3\omega_1 (3 + 24b_0^2 + 8b_0^4)] - 96\pi \nu_1 b_1; \\
\nu_1 &= 5\nu^2 + 2\nu + 1; \quad \nu_2 = 3 + 14\nu + 63\nu^2; \quad C = 0,57721; \\
\nu_3 &= 13\nu^2 - 6\nu + 1; \quad \nu_4 = -13\nu^2 - 106\nu + 191.
\end{aligned}$$

Решение уравнения (8) строилось численно при следующих значениях параметров оболочки: $l_0 = 7$ мм, $\nu = 0,3$. На рис. 1. приведены графики изменения b_0 в зависимости от N^* и λ_0 ($\lambda_0 = \lambda b_0$). Кривые 1—3 соответствуют параметру $\lambda_0 = 0,2; 0,5; 0,6$. При этом сплошные линии соответствуют второму приближению ($n = 2, m = 4$), а штриховые — первому ($n = 1, m = 2$). Как видно из графиков, при малых значениях λ_0 и N^*

разница между b_0 , найденными с помощью первого и второго приближений, не превышает 1%. С увеличением λ_0 и N^* эта разница растет и в случае $\lambda_0 = 0,6$, $N^* = 0,5$ превышает 50%. Раскрытие трещины определяется через скачки перемещений и углов поворота по формуле

$$\delta(x) = 2 \{ [v(x)] + z [\theta_2(x)] \}. \quad (9)$$

Проинтегрировав решение системы интегральных уравнений (5) и подставив полученные выражения в (9), при $x = b_0$ получим

$$\delta = \frac{dN^*}{b_0} \left\{ \sqrt{1 - b_0^2} \left(4 + \frac{5\lambda^2\pi}{4} \right) + \frac{1}{2U_1} \left[U_2 (16A_1 - 5\lambda^2\pi b_1 \sqrt{1 - b_0^2}) + \right. \right. \\ \left. \left. + 4U_3\lambda^2 A_2 \right] + \frac{\lambda^4 U}{5760a_3} + \frac{\sqrt{3(1 - \nu^2)}}{h} z \left[\frac{1}{3a_3} \left\{ \lambda^2 \sqrt{1 - b_0^2} (6f_1 - \nu_0 (2 + b_0^2)) - \right. \right. \right.$$

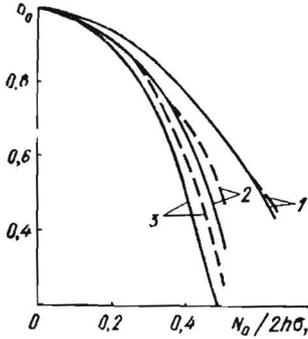


Рис. 1.

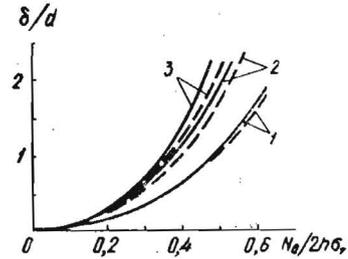


Рис. 2.

$$- \frac{1}{U_1} \left(9U_3 (8a_3 A_1 + \pi b_1 \lambda^2 \sqrt{1 - b_0^2 \nu_1}) + 2U_2 \lambda^2 A_2 \right) \left. \right\} + \frac{\lambda^4 W}{2880a_3^2} \left. \right\},$$

где

$$d = \frac{l_0 \sigma_T}{E}; \quad A_1 = b_0 \ln b_0 + w_2 \sqrt{1 - b_0^2};$$

$$A_2 = \sqrt{1 - b_0^2} [6b_1 f_1 - \nu_0 (3b_2 - w_2 (2 + b_0^2))] + 2b_0 \nu_0 (1 - b_0^2 + 2b_0^2 \ln b_0); \quad U = 3 \sqrt{1 - b_0^2} [15F_{01} + 4(1 - b_0^2) z_1] + \\ + \frac{1}{U_1} \left\{ 90\pi \sqrt{1 - b_0^2} [F_{03} + 4(1 - b_0^2) Z_3] U_3 - \right.$$

$$- U_2 \left[3 \sqrt{1 - b_0^2} (15F_{02} + 4(1 - b_0^2) Z_2) + 8\nu_4 (-b_0 (1 - b_0^2) (51 - 3b_0^2) - U_4) \right]; \quad Z_1 = -45a_3 [-28(\ln 2 - C) - 15] + \\ + 420a_3 (3 \ln 2 - 4) - 63a_3 (3 + 2b_0^2 + 20 \ln 2) + 80\nu_0 f_1 - \\ - 2\nu_0^2 (13 + 2b_0^2); \quad Z_2 = -90a_3 [-28(\ln 2 - C) - 15] b_1 + \\ + 21\pi a_3 (89 + 6b_0^2 - 60 \ln 2) + 840a_3 [w_1 (3 \ln 2 - 4) + \\ + b_2 (3 \ln 2 - 1) + 3b_0^2 w_1 - 3 \ln \lambda b_1 + 160\nu_0 b_1 f_1] + \\ + 4\nu_0^2 [10(b_2 + w_2 (1 - 2b_0^2)) + \frac{\pi}{2} (22b_0^2 + 3)];$$

$$Z_3 = -b_1 [7a_3 (9\nu + 1) + 4\nu_0 \nu_1]; \quad W = 15 \sqrt{1 - b_0^2} [k_{10} + \\ + 2a_3 (1 - b_0^2) Z_{12}] + \frac{1}{U_1} \left[-15 \sqrt{1 - b_0^2} (k_{20} + 4\pi a_3 (1 - b_0^2) Z_{22}) U_2 + 3a_3 U_3 \left\{ \sqrt{1 - b_0^2} [15k_{30} + 4(1 - b_0^2) Z_{32}] + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 4\nu_3 (b_0 (1 - b_0^2) (-3b_0^2 + 51) + U_4)]; \quad Z_{12} = \pi (3 - 13\nu); \\
Z_{22} & = b_1 (3 - 13\nu); \quad Z_{32} = 6\nu_0^2 \left[-20b_1 (1 + \ln \lambda) + 30b_2 - \right. \\
& \left. - 10\omega_2 (1 + 2b_0^2) + 11\pi b_0^2 + \frac{3}{2}\pi \right] - \nu_2 \left[60b_1 q_1 + 20\omega_2 (4 - \right. \\
& \left. - 3b_0^2) - 20b_2 + 33\pi b_0^2 + \frac{9\pi}{2} \right] + 15b_1 \left(16\nu_0 \left[\frac{\nu_0}{2} (q_1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \ln \lambda) + \frac{1 - 7\nu}{12} \right] - 11 - 46\nu - 135\nu^2 \right).
\end{aligned}$$

Проведен численный анализ раскрытия вершины трещины для оболочки, находящейся под внутренним давлением. При этом δ определялось на внешней ($z=h$), внутренней ($z=-h$) и срединной поверхности оболочки. При рассматриваемой нагрузке результаты мало отличаются. На рис. 2 приведены графики изменения относительного раскрытия $\eta = \delta/d$ в зависимости от λ_0 и N^* при $z=0$. Кривые 1—3 (сплошные и штриховые линии) соответствуют тем же параметрам, что и на рис. 1. Раскрытие δ , вычисленное с помощью первого и второго приближений, имеет близкие значения только при малых λ_0 и N^* .

1. Брок Д. Основы механики разрушения. — М.: Высш. шк., 1980.—368 с.
2. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Розвиток найдрибніших тріщин в твердому тілі.— Прикл. механіка, 1959, 5, вип. 4, с. 391—401.
3. Осадчук В. А. Метод дисторсий в задачах об упругом равновесии оболочек с разрезами (трещинами).— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 10, с. 27—50.
4. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев: Наук. думка, 1968.—245 с.
5. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев: Наук. думка, 1976.—442 с.
6. Прагер В. Проблемы теории пластичности.— М.: Физматгиз, 1958.—136 с.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 16.11.83

УДК 539.3

Б. Д. Дробенко

О РАСЧЕТЕ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Исследование напряженного состояния оболочечных конструкций с использованием теории оболочек приводит к значительно завышенным значениям напряжений вблизи отверстий, в окрестности зон соединения оболочек и в других областях резкого изменения геометрии [3, 8], вследствие чего в последнее время появилась тенденция расчета оболочечных конструкций на основе уравнений трехмерной теории упругости [1, 2, 4, 6]. Однако непосредственное применение трехмерных конечных элементов (КЭ) для расчета оболочек оказывается не всегда эффективным. Так, при уменьшении толщины оболочки обнаруживается резкое замедление сходимости решений из-за больших коэффициентов жесткости для перемещений трехмерных КЭ по толщине оболочки [1, 6]. К тому же наличие трех степеней свободы в каждом узле приводит к неоправданному возрастанию времени решения задачи.

В данной работе предложена методика расчета оболочечных конструкций на базе уравнений трехмерной теории упругости с использованием в одной расчетной схеме как трехмерных КЭ, так и элементов, полученных из трехмерных путем учета частных допущений теории оболочек.

Рассмотрим оболочечную конструкцию, занимающую область W эвклидова пространства E^3 , отнесенного к декартовой системе координат