1. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об управляемом вращении упругого стержня. — Прикл. математика и механика, 1982, 46, вып. 4, с. 587—595.
2. *Акуленко Л. Д., Гукасян А. А.* Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1983, № 5, с. 33—41.
3. *Бербюк В. Е.* Об управляемом вращении системы двух твердых тел с упругими элементами. — Прикл. математика и механика, 1984, 48, вып. 2, с. 238—246.
4. *Бербюк В. Е.* Программный уровень системы управления шагающего аппарата при движении с заданной скоростью. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1982, № 5, с. 45—50.
5. *Бербюк В. Е.* Математическая модель упругого манипулятора с распределенными параметрами. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1984, вып. 20, с. 88—93.
6. *Бербюк В. Е., Демидюк М. В.* Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1984, № 2, с. 59—67.
7. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1975.—568 с.
8. *Лакота Н. А., Рахманов Е. В., Шведов В. Н.* Управление упругим манипулятором на траектории. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 2, с. 53—59.
9. *Черноусько Ф. Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора. — Там же, 1981, № 5, с. 142—152.
10. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями.— М. : Наука, 1980.—384 с.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов
Получено 19.03.84

УДК 534.26 : 539.3

А. П. Поддубняк

КВАЗИОПТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В ТВЕРДОМ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ТЕЛЕ

В рамках теории «эффектов второго порядка» вектор упругого перемещения $\mathbf{u}$ представляется в виде: $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$, где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ удовлетворяют соответственно однородному и неоднородному уравнениям Ламе:

$$\nabla\cdot\mathbf{T}(\mathbf{v})-\rho_0\ddot{\mathbf{v}}=0,$$
$$\nabla\cdot\mathbf{T}(\mathbf{w})-\rho_0\ddot{\mathbf{w}}=\rho_0\mathbf{f}, \tag{1}$$

причем

$$\mathbf{f}=\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\mathbf{T}_1(\mathbf{v}),$$
$$\mathbf{T}_1(\mathbf{v})=-\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}(\mathbf{v})-\mathbf{T}_0(\mathbf{v}),$$
$$\mathbf{T}_0(\mathbf{v})=\mathbf{1}\left\{\lambda\left[\omega^2+\frac{1}{2}I_1(\varepsilon^2)\right]-\left(m-\frac{n}{2}\right)[\vartheta^2-I_1(\varepsilon^2)]+l\vartheta^2\right\}+ \tag{2}$$
$$+n\varepsilon^2+(2m-n)\varepsilon\vartheta+\mu\nabla\mathbf{v}^T\cdot\nabla\mathbf{v},$$
$$\vartheta=I_1\varepsilon,\quad \omega=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v},\ \varepsilon=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}+\nabla\mathbf{v}^T).$$

В формулах (1), (2) ρ_0 — плотность материала; $\mathbf{T}$ — линейный тензор напряжений Коши над $\mathbf{v}$ или $\mathbf{w}$; I_1 — линейный инвариант тензора; λ, μ — постоянные Ламе второго рода; l, m, n — постоянные Мурнагана [2]; $\mathbf{1}$ — единичный аффинор. Переменные выбраны в отсчетной (лагранжевой) конфигурации. Точками обозначены производные по времени t, символ (T) отвечает операции транспонирования тензора.

Представим первичные высокочастотные волны в виде бигармонических сигналов:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}\sum_{A=L,T}\mathbf{1}_{A3}\cdot\mathbf{F}_A^{\beta}(\mathbf{x})e^{-i\omega_{\beta}\tau_A}+\text{к. с.},$$

$$\mathbf{1}_{L3}=\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3,\quad \mathbf{1}_{T\alpha}=\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\alpha,\quad \tau_A=t-\frac{x_3}{c_A},\tag{3}$$
$$\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3),\ c_L^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0},\ c_T^2=\frac{\mu}{\rho_0}.$$

Здесь и далее к. с. — комплексно-сопряженное слагаемое; ω_1, ω_2 — несущие частоты. Явный вид комплексных амплитуд F^β_{L3}, $F^\beta_{T\alpha}$ $(\alpha,\ \beta=1,\ 2)$ определяется путем решения задачи формирования остронаправленных волновых пучков в линейном приближении. Предполагается также, что лагранжевы координаты x_1, x_2, x_3 до деформации совпадают с декартовыми и плоскость излучателя первичных волн совмещена с плоскостью $x_3=0$.

«Массовая сила» $\mathbf{f}$ уравнения движения упругой среды на основании формулы (3) представится в виде

$$\mathbf{f}=\sum_{A=L,T}\mathbf{1}_{A3}\cdot\mathbf{f}_Ae^{-i\Omega\tau_A}+\text{к. с.},\tag{4}$$
$$\Omega=|\omega_1-\omega_2|,\quad \varkappa_1=\frac{3}{2}(\lambda+2\mu)+2m+l,\quad \varkappa_2=\frac{1}{2}(\lambda+2\mu+m),$$
$$f_{L3}=-\frac{i\Omega\omega_1\omega_2}{2\rho_0}\left[\frac{\varkappa_1}{c_L^3}F^1_{L3}(\mathbf{x})F^{2*}_{L3}(\mathbf{x})+\frac{\varkappa_2}{c_T^3}F^1_{T\alpha}(\mathbf{x})F^{2*}_{T\alpha}(\mathbf{x})e^{-i\Omega x_3\left(\frac{1}{c_L}-\frac{1}{c_T}\right)}\right],$$
$$f_{T\alpha}=-\frac{i\varkappa_2}{2\rho_0c_Lc_T}\left\{\left(\frac{1}{c_L}-\frac{1}{c_T}\right)\omega_\gamma^3F^\gamma_{L3}(\mathbf{x})F^{\gamma*}_{T\alpha}(\mathbf{x})\times\right.$$
$$\times e^{i\omega_\gamma x_3\left(\frac{1}{c_L}-\frac{1}{c_T}\right)}+\omega_1\omega_2\left[\left(\frac{\omega_1}{c_L}-\frac{\omega_2}{c_T}\right)F^1_{L3}(\mathbf{x})F^{2*}_{T\alpha}(\mathbf{x})\times\right.$$
$$\left.\left.\times e^{i\omega_1x_3\left(\frac{1}{c_L}-\frac{1}{c_T}\right)}+\left(\frac{\omega_1}{c_T}-\frac{\omega_2}{c_L}\right)F^1_{T\alpha}(\mathbf{x})F^{2*}_{L3}(\mathbf{x})e^{i\omega_2x_3\left(\frac{1}{c_T}-\frac{1}{c_L}\right)}\right]\right\},\quad \alpha=1,\ 2.$$

Воспользовавшись методом квазиоптического приближения [1], второе из уравнений (1) можно привести к виду

$$\sum_{A=L,T}c_A\mathbf{1}_{A3}\cdot\left(\nabla^2_\perp-\frac{2}{c_A}\partial_{x_3}\partial_{\tau_A}\right)\mathbf{w}=\mathbf{f},\tag{5}$$

где $\nabla^2_\perp$ — поперечный лапласиан. Если использовать комплексное представление

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},\ t)=\frac{1}{2}\left\{W_{L3}(\mathbf{x})e^{-i\Omega\tau_L}\mathbf{i}_3+\left[\overset{\circ}{W}_{T\beta}(\mathbf{x})+W_{T\beta}(\mathbf{x})e^{-i\Omega\tau_T}\right]\mathbf{i}_\beta\right\}+\text{к. с.},\tag{6}$$

то, разделяя уравнение (5) покомпонентно, применяя фурье-преобразования по τ_A и решая неоднородные уравнения диффузии для полупространства $x_3\geqslant0$ при нулевых граничных условиях на $x_3=0$, получим следующий результат:

$$W_{L3}(\mathbf{x})=\varkappa_1\mathcal{J}^{12}_{33}(\mathbf{x})+\varkappa_2\mathcal{J}^{12}_{\alpha\alpha}(\mathbf{x}),\tag{7}$$
$$\overset{\circ}{W}_{T\beta}(\mathbf{x})=2\varkappa_2\mathcal{J}^{\gamma\gamma}_{3\beta}(\mathbf{x}),\ \beta=1,\ 2,\tag{8}$$
$$W_{T\beta}(\mathbf{x})=2\varkappa_2\left[\mathcal{J}^{12}_{3\beta}(\mathbf{x})+\mathcal{J}^{12*}_{\beta3}(\mathbf{x})\right],\ \beta=1,\ 2,\tag{9}$$

где

$$\mathcal{J}^{12}_{33}(\mathbf{x})=\frac{i\Omega\omega_1\omega_2}{4\pi c_L^5\rho_0}\int\limits_0^{x_3}\frac{dx_3'}{x_3-x_3'}\int F^1_{L3}(\mathbf{x}')F^{2*}_{L3}(\mathbf{x}')\exp\left[\frac{i\Omega|\xi-\xi'|^2}{2c_L(x_3-x_3')}\right]d\xi';$$
$$\mathcal{J}^{12}_{\alpha\alpha}(\mathbf{x})=\frac{i\Omega\omega_1\omega_2}{4\pi c_L^2c_T^3\rho_0}\int\limits_0^{x_3}e^{-i\Omega x_3'\left(\frac{1}{c_L}-\frac{1}{c_T}\right)}\frac{dx_3'}{x_3-x_3'}\times\tag{10}$$

$$\times \int F^1_{T\alpha}(\mathbf{x}') F^{2*}_{T\alpha}(\mathbf{x}') \exp\left[\frac{i\Omega\,|\,\xi - \xi'\,|^2}{2c_L\,(x_3 - x_3')}\right] d\xi';$$

$$\mathcal{J}^{\gamma\gamma}_{3\beta}(\mathbf{x}) = -\frac{i\omega_\gamma^3}{4\pi c_L c_T^3 \rho_0}\left(\frac{1}{c_T} - \frac{1}{c_L}\right)\int\limits_0^{x_3} e^{i\omega_\gamma x_3'\left(\frac{1}{c_L} - \frac{1}{c_T}\right)}\frac{dx_3'}{x_3 - x_3'} \times$$

$$\times \int F^{\gamma}_{L3}(\mathbf{x}') F^{\gamma*}_{T\beta}(\mathbf{x}')\, d\xi';$$

$$\mathcal{J}^{12}_{3\beta}(\mathbf{x}) = \frac{i\omega_1\omega_2}{4\pi c_L c_T^3 \rho_0}\left(\frac{\omega_1}{c_L} - \frac{\omega_2}{c_T}\right)\int\limits_0^{x_3} e^{i\omega_1 x_3'\left(\frac{1}{c_L} - \frac{1}{c_T}\right)}\frac{dx_3'}{x_3 - x_3'} \times$$

$$\times \int F^1_{L3}(\mathbf{x}') F^{2*}_{T\beta}(\mathbf{x}') \exp\left[\frac{i\Omega\,|\,\xi - \xi'\,|^2}{2c_T\,(x_3 - x_3')}\right] d\xi';$$

$$\mathcal{J}^{12*}_{\beta 3}(\mathbf{x}) = \{\mathcal{J}^{12}_{3\beta};\ 1 \rightleftarrows 2\}^*;\ \mathbf{x} = \{\xi = (x_1,\ x_2),\ x_3\} \in R^+.$$

Здесь и выше звездочкой отмечены комплексно сопряженные величины.

Из формул (6)—(10) следует, что при возбуждении первичных чисто продольных или чисто поперечных высокочастотных пучков образуется один пучок продольных нелинейных волн на низкой частоте Ω. Генерация низкочастотных пучков сдвиговых волн описывается параболическим уравнением в том случае, если распределение волнового поля перемещения на излучателе первичных волн неоднородно, т. е. наряду с продольными компонентами присутствуют также поперечные и наоборот. При этом в упругой среде, кроме периодического во времени поля поперечных перемещений, возникают статические перемещения (8), наличие которых, вероятно, существенно лишь при исследовании ближнего поля.

Особенностью формирования нелинейных волновых пучков в упругой твердой среде, не имеющей аналогии для случая жидкой среды, является то, что возбуждение пучков линейных монохроматических высокочастотных продольно-поперечных волн с близкими частотами ω_1 и ω_2

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},\ t) = \frac{1}{2}\left[F^1_{L3}(\mathbf{x})\, e^{-i\omega_1\tau_L}\mathbf{i}_3 + F^2_{T\beta}(\mathbf{x})\, e^{-i\omega_2\tau_T}\mathbf{i}_\beta\right] + \text{к. с.}$$

приводит к результату

$$W_{L3}(\mathbf{x}) = 0,\ \ W^0_{T\beta}(\mathbf{x}) = 0,\ \ W_{T\beta}(\mathbf{x}) = 2\varkappa_2\mathcal{J}^{12}_{\beta\beta}(\mathbf{x}).$$

Следует также отметить, что образование низкочастотных волн накачкой чисто продольного типа соответствует условиям параметрического излучения звука в жидкой (газообразной) среде [3]. Сдвиговые свойства упругого твердого материала усложняют формирование некоторых компонентов остронаправленных волн разностной частоты, что следует из рассмотрения функций $\mathcal{J}^{12}_{33}$ и $\mathcal{J}^{12}_{\alpha\alpha}$, $\mathcal{J}^{12}_{3\alpha}$, $\mathcal{J}^{12*}_{\alpha 3}$.

Анализ входящих в эти функции интегралов (10) в общем случае возможен лишь численными методами при конкретно заданных характеристиках первичных пучков. Для гауссовых пучков удается получить некоторые результаты и в явном виде.

1. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1979.—383 с.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980.—512 с.
3. *Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И.* Нелинейная гидроакустика. — Л.: Судостроение, 1981.—264 с.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 08.02.84