

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. — М.: Мир, 1964.— 517 с.
2. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.— 400 с.
3. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.— 520 с.
4. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. — Киев: Наук. думка, 1978.— 343 с.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов.

Получено 23.06.83

УДК 531.011+62-50

В. Е. Бербюк, А. И. Дидух

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УПРУГИМ МАНИПУЛЯТОРОМ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПО НОРМЕ УСКОРЕНИЯМИ

Снижение затрат времени на выполнение транспортных операций, ограниченность динамических перегрузок и гашение колебаний, возникающих в упругих звеньях манипуляторов, является эффективным способом повышения производительности роботов и качества их систем управления. В настоящей работе, являющейся продолжением и развитием [5, 6], исследуется задача управления о приведении манипулятора из начального фазового состояния в конечное за минимальное время. При этом в отличие от [1—3, 5, 6, 8, 9], помимо гашения упругих колебаний стрелы манипулятора, требуется ограниченность по норме ускорений транспортных движителей системы.

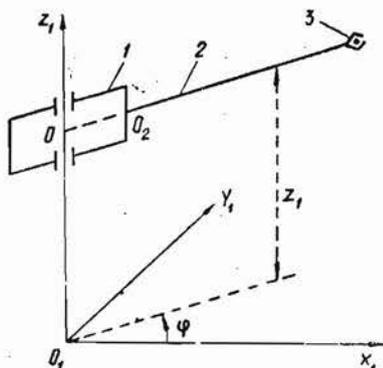


Рис. 1.

С помощью метода моментов [7] построен алгоритм решения поставленной задачи управления с гашением произвольного числа мод упругих колебаний манипулятора.

1. Кинематическая схема рассматриваемой механической системы представлена на рис. 1. Манипулятор состоит из абсолютно твердого цилиндра 1 массы m_1 и жестко связанного с ним тонкого нерастяжимого упругого стержня 2 длины l и массы m_2 (стрела манипулятора). На правом конце стержня — твердое тело 3 массы m_3 , линейными размерами которого будем пренебрегать. Под действием управляющего момента M манипулятор вращается вокруг оси O_1Z_1 , а под действием силы F — перемещается вдоль этой же оси инерциального пространства $O_1X_1Y_1Z_1$.

Движение рассматриваемой механической системы определяется решением следующих уравнений с граничными и начальными условиями [6]:

$$(I_1 + m_3h^2)\varphi'' + m_3hv_1'' + \int_0^l \rho S [v'' + (a+x)\varphi''] (a+x) dx = M, \quad (1)$$

$$m(z_1'' + g) + m_3w_1'' + \int_0^l \rho S w'' dx = F, \quad (2)$$

$$(EI_z v'''' + \rho S v'' - [\rho S v + (bv')']\varphi'^2 = -\rho S (a+x)\varphi'', \quad (3)$$

$$(EI_y w'''' + \rho S w'' - (bw')'\varphi'^2 = -\rho S (z_1'' + g), \quad (4)$$

$$v(0, t) = v'(0, t) = w(0, t) = w'(0, t) = 0, \quad (5)$$

$$v_1'' = 0, \quad (EI_z v_1')' = m_3 [v_1'' + hv_1'' + (hv_1' - v_1)\varphi'^2], \quad (6)$$

$$w_1'' = 0, \quad (EI_y w_1')' = m_3 (z_1'' + w_1'' + h\varphi'^2 w_1' + g), \quad (7)$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0, \quad v(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{v}(x, 0) = g_1(x), \quad (8)$$

$$z_1(0) = z_0, \quad \dot{z}_1(0) = \dot{z}_0, \quad \omega(x, 0) = f_2(x),$$

$$\dot{\omega}(x, 0) = g_2(x) \quad (f_k(0) = \dot{f}_k(0) = 0, \quad k = 1, 2). \quad (9)$$

В формулах (1) — (9) приняты обозначения: φ — угол поворота манипулятора относительно оси O_1Z_1 ; z_1 — высота подъема; $v(x, t)$, $\omega(x, t)$ — тангенциальные и аксиальные (вдоль оси O_1Z_1) упругие отклонения в момент времени t произвольной точки стержня 2, отстоящей на расстоянии x от точки O_2 в недеформированном состоянии стержня; I_1 — момент инерции тела I относительно оси O_1Z_1 ; $\rho(x)$ — объемная плотность; E — модуль Юнга; $S(x)$, $I_y(x)$, $I_z(x)$ — площадь и осевые моменты инерции поперечного сечения стержня; g — ускорение силы тяжести;

$$a = OO_2; \quad h = a + l; \quad \omega_1 = \omega(l, t); \quad v_1 = v(l, t); \quad m = m_1 + m_2 + m_3;$$

$$b = m_3 h + \int_x^l (a + \xi) \rho(\xi) S(\xi) d\xi.$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени t , а штрихом — по координате x .

Управления M и F будем считать допустимыми, если соответствующие им функции $\varphi''(t)$, $z_1''(t)$ интегрируемы по модулю со степенью q на отрезке $0 \leq t \leq T$, т. е. принадлежат функциональному пространству $L_q[0, T]$ ($1 \leq q < \infty$, $0 \leq T < \infty$).

Сформулируем следующие задачи.

Задача 1. Определить допустимые управления M и F , перемещающие систему за заданное время T в силу уравнений (1) — (4) и граничных условий (5) — (7) из начального состояния (8), (9) в конечное с гашением упругих отклонений стрелы для всех $0 \leq x \leq l$:

$$\begin{aligned} \varphi(T) = \varphi_T, \quad \dot{\varphi}(T) = 0, \quad v(x, T) = \dot{v}(x, T) \equiv 0, \\ z_1(T) = z_T, \quad \dot{z}_1(T) = 0, \quad \omega(x, T) = \dot{\omega}(x, T) \equiv 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом искомые управления должны обеспечивать минимальное значение нормы ускорений, т. е. выполнение условий

$$\left(\int_0^T |\varphi''(t)|^q dt \right)^{1/q} \rightarrow \min, \quad \left(\int_0^T |z_1''(t)|^q dt \right)^{1/q} \rightarrow \min. \quad (11)$$

Задача 2. Определить допустимые управления M и F , перемещающие систему за минимальное время T_* в силу соотношений (1) — (7) из состояния (8), (9) в (10) с ограниченными по норме ускорениями транспортных движений, т. е. при соблюдении условий

$$\left(\int_0^T |\varphi''(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq L_{11}, \quad \left(\int_0^T |z_1''(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq L_{21}, \quad (12)$$

где $0 < L_{11}$; $L_{21} < \infty$.

2. Будем исследовать задачи управления движением упругого манипулятора обратным способом [1, 4, 6]. Сначала определим функции φ , $\dot{\varphi}$, φ'' , z_1 , \dot{z}_1 , z_1'' , удовлетворяющие условиям (8) — (12). Далее из уравнений (1), (2) вычислим искомые управляющие воздействия M и F с учетом упругих колебаний стержня.

В случае, когда ρ , $S = \text{const}$ и угловая скорость манипулятора мала по сравнению с низшими частотами системы, упругие отклонения стрелы определяются из соотношений [6]

$$\begin{aligned} Q(x, t) = Q_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \left[A_n \cos k_n t + \frac{B_n}{k_n} \sin k_n t - \right. \\ \left. - \frac{C_n}{k_n} \int_0^t \rho(\xi) \sin k_n(t - \xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$Q_0(x) = \beta x^2 [(x - 3l)/6\alpha + (4lx - x^2 - 6l^2)/24a_0^2].$$

Здесь k_n , $X_n(x)$ — собственные частоты и собственные функции системы; A_n , B_n , C_n — коэффициенты разложения функций $\Phi(x) = Q_0(x)$, $G(x)$, $C(x)$ в ряды по $X_n(x)$. При этом, если принять $C(x) = 1$, $\Phi(x) = f_2(x)$, $G(x) = g_2(x)$, $p(t) = z_1''(t)$, $a_0^2 = EI_y/\rho S$, $\alpha = EI_y/m_3$, $\beta = g$, то соотношения (13) определяют аксиальные отклонения $w(x, t) = Q(x, t)$. В случае, когда $C(x) = a + x$, $\Phi(x) = f_1(x)$, $G(x) = g_1(x)$, $p(t) = \varphi''(t)$, $a_0^2 = EI_z/\rho S$, $\alpha = EI_z/m_3$, $\beta = 0$, по формулам (13) можно найти тангенциальные отклонения упругого манипулятора.

Потребуем, чтобы для упругих отклонений выполнялись условия гашения (10). Тогда с учетом (13) получим

$$\int_0^T p(t) R_{2n-1}(t) dt = r_{2n-1}, \quad \int_0^T p(t) R_{2n}(t) dt = r_{2n}, \quad (14)$$

$$R_{2n-1} = \cos k_n t, \quad r_{2n-1} = [k_n Q_n R_{2n}(T) + B_n]/C_n,$$

$$R_{2n} = \sin k_n(t), \quad r_{2n} = -k_n [Q_n R_{2n-1}(T) + A_n]/C_n,$$

$$Q_n = m_3 X_n(t) Q_0(t) + \rho S \int_0^l Q_0(x) X_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из условий (8) — (10) на искомую функцию $p(t)$ имеем еще два моментных соотношения:

$$\int_0^T p(t) dt = p_*^*, \quad \int_0^T t p(t) dt = T p_*^* - p_*, \quad (15)$$

где

$$p_*^* = -z_0^* ; \quad p_* = z_T - z_0 - T z_0^* \quad \text{при } p(t) \equiv z_1''(t) \text{ и } p_*^* = -\varphi_0^* ;$$

$$p_* = \varphi_T - \varphi_0 - T \varphi_0^* \quad \text{при } p(t) \equiv \varphi''(t).$$

Условия (11), (12) в данном случае примут вид

$$\left(\int_0^T |p(t)|^q dt \right)^{1/q} \rightarrow \min, \quad (16)$$

$$\left(\int_0^T |p(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq L, \quad L = \{L_{11}, L_{21}\}. \quad (17)$$

Таким образом, сформулированные в п. 1 задачи управления упругим манипулятором сведены к бесконечномерной проблеме моментов, состоящей в нахождении функции $p(t) \in L_q[0, T]$, удовлетворяющей соотношениям (14), (15) и одному из условий (16), (17).

Отметим, что в [6] решение соответствующей проблемы моментов в задаче управления движением упругого манипулятора осуществлялось прямыми методами, а в [2] строилось разложениями по степеням малого параметра.

Пусть требуется погасить произвольную совокупность N форм колебаний упругого манипулятора. Для этого необходимо в (14) принять $n=1, N$ и рассмотреть $2N+2$ -мерную проблему моментов (14), (15). Можно убедиться, что решение проблемы моментов (14) — (16) существует, единственно и имеет вид [7]

$$p(t, T) = \lambda^{q'}(T) \left| \sum_{n=1}^{2N+2} \xi_n R_n(t) \right|^{q'-1} \text{sign} \sum_{n=1}^{2N+2} \xi_n R_n(t), \quad (18)$$

где $\lambda(T)$, ξ_1, \dots, ξ_{2N+2} определяются соотношениями

$$\frac{1}{\lambda(T)} = \min_{\xi_1, \dots, \xi_{2N+2}} \left(\int_0^T \left| \sum_{n=1}^{2N+2} \xi_n R_n(t) \right|^{q'} dt \right)^{1/q'} \quad (19)$$

при условии

$$\sum_{n=1}^{2N+2} \xi_n r_n = 1. \quad (20)$$

Здесь $q' > 1$ и выбирается из соотношения $1/q + 1/q' = 1$; $R_{2N+1} = 1$; $R_{2N+2} = l$; $r_{2N+1} = p_*$; $r_{2N+2} = T p_* - p_*$. При этом минимальное значение нормы $\|p(t)\|$ равно $\lambda(T)$.

Решение оптимальной по быстродействию $2N + 2$ -мерной L -проблемы моментов (14), (15), (17) определяется формулами (18) — (20), где $T = T_*$, а время быстродействия T_* является наименьшим положительным корнем неравенства

$$\lambda(T_*) \leq L. \quad (21)$$

Зная функцию $p(t)$ и вычислив упругие отклонения по формулам (13), можем определить в силу уравнений (1), (2) искомые управления M и F .

3. В качестве примера рассмотрим случай $N = 1$. Положим $q = q' = 2$, что соответствует, в частности, системе с ограниченной энергией устройства управления [10]. Тогда функция $p(t)$, необходимая для получения решения задачи 1, в силу (18) — (20) имеет вид

$$p(t) = \lambda^2(T) (\xi_1 \cos k_1 t + \xi_2 \sin k_1 t + \xi_3 + \xi_4 t), \quad (22)$$

где

$$\xi_i = \Delta_i / \Delta, \quad \xi_4 = (1 - \xi_1 r_1 - \xi_2 r_2 - \xi_3 r_3) / r_4, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\lambda(T) = \left[\int_0^T (\xi_1 \cos k_1 t + \xi_2 \sin k_1 t + \xi_3 + \xi_4 t)^2 dt \right]^{-1/2}.$$

Здесь $\Delta = \det(a_{im})$; Δ_i — определитель квадратной матрицы, получаемой заменой m -го столбца матрицы (a_{im}) величинами b_1, b_2, b_3 . Элементы a_{im}, b_m определяются формулами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{T}{2} + \frac{\sin 2k_1 T}{4k_1}, \quad a_{12} = \frac{\sin^2 k_1 T}{2k_1}, \quad a_{13} = \frac{\sin k_1 T}{k_1}, \\ a_{21} &= a_{12}, \quad a_{22} = T - a_{11}, \quad a_{23} = (1 - \cos k_1 T) / k_1, \\ a_{31} &= a_{13}, \quad a_{32} = a_{23}, \quad a_{33} = T, \quad b_3 = T^2 / 2\pi, \\ b_1 &= -\frac{T a_{13}}{\pi} - \frac{a_{23}}{\pi k_1}, \quad b_2 = (a_{13} - T \cos k_1 T) / \pi k_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Для получения функции $p(t)$, дающей решение задачи оптимального по быстродействию управления, необходимо в формулах (22), (23) принять $T = T_*$, где T_* — наименьший положительный корень неравенства (21).

Эффективность построенных алгоритмов подтвердили расчеты на ЭВМ оптимального по быстродействию управления вращательными движениями упругого манипулятора. Параметры объекта были следующими: $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 0,684$ кг, $m_3 = 3$ кг, $l = 1$ м, $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7850$ кг/м³. Внешний и внутренний диаметры кольцевого сечения стержня 2 выбирались равными 0,02 м и 0,017 м. Ограничение на норму ускорений (см. (17)) полагалось равным $L = 9$ с^{-3/2}. Начальное и конечное состояния системы определялись соотношениями $\varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_T = 0$, $\varphi_T = \pi$, $f_1(x) = g_1(x) = v(x, T) = v'(x, T) = 0$.

Как показали числовые расчеты, для данного примера время оптимального быстродействия $T_* = 1,146$ с. На рис. 2 представлены характеристики оптимального по быстродействию вращательного движения упругого манипулятора, рассчитанные по формулам, получаемым поочередным интегрированием функции $p(t)$ ($\varphi = \varphi(t)$ — кривая 1, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$ — 2). Как видно, для найденного режима управления характерно отсутствие нежелательных возвратных движений манипулятора. Графики тангенциальных отклонений груза и их скоростей изображены на рис. 3 ($v(l, t)$ — кривая 1, $v'(l, t)$ — 2). Упругие колебания груза низкочастотны с частотой порядка 6 Гц. В момент $t = T_*$ выполнены условия гашения. Максимальное отклонение груза от равновесного состояния — 0,031 м. Управляющее воздействие, решающее задачу оптимального по быстродействию

управления вращением упругого манипулятора с гашением первой моды относительных отклонений и ограниченным по норме угловым ускорением, представлено на рис. 4 ($M=M(t)$). Оптимальное управление — осциллирующая функция с одной точкой переключения $t=T_*/2$; которая является центром симметрии приведенной кривой.

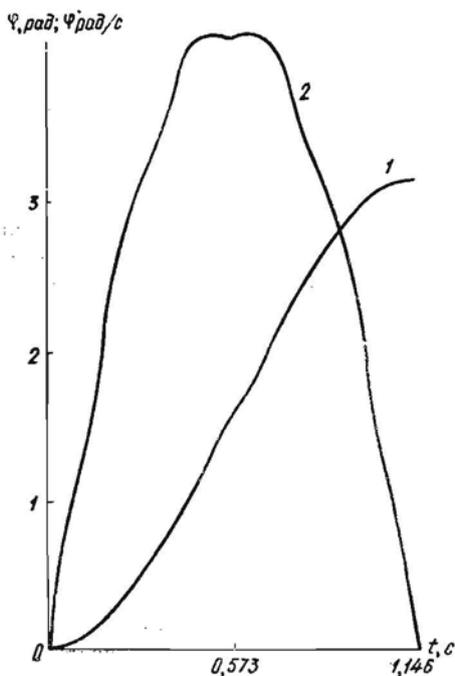


Рис. 2.

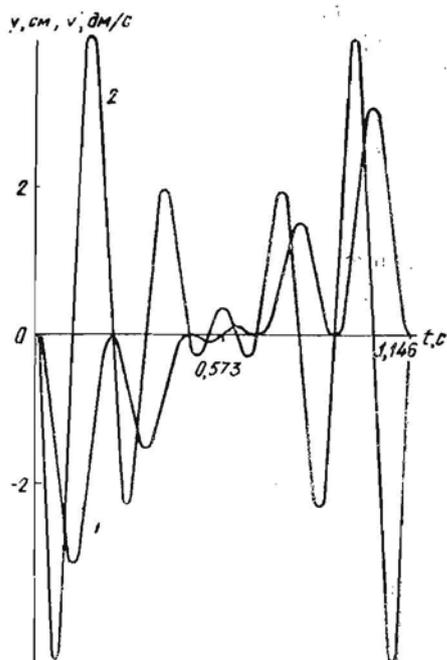


Рис. 3.

В рамках принятых предположений время быстрогодействия зависит только от собственной частоты и ограничения на норму углового ускорения, т. е. $T_* = T_*(k_1, L)$.

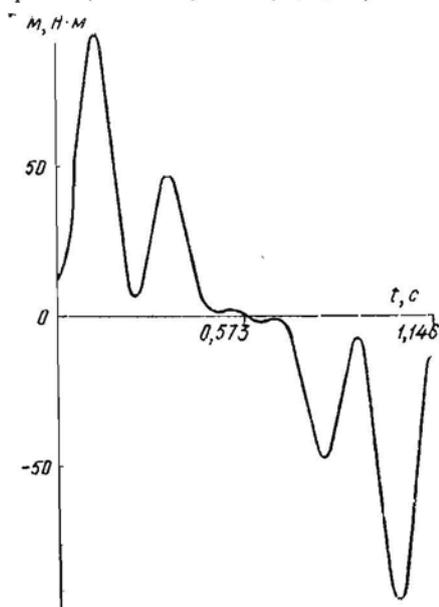


Рис. 4.

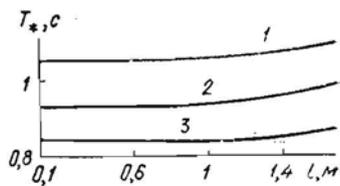


Рис. 5.

Как показали численные расчеты, зависимость T_* от k_1 достаточно слабая. Значит, следует ожидать слабой зависимости T_* и от параметров, функцией которых является собственная частота, т. е. от l, E, I_2, ρ, S . Для примера, на рис. 5 изображены кривые изменения времени оптимального быстрогодействия в зависимости от длины стрелы манипулятора (кривые 1—3 соответствуют значениям $L=10; 12; 14^{-3/2}$). Видно (кривая 2), что при удлинении стрелы в 17 раз время быстрогодействия увеличивается всего на 6%.

1. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Об управляемом вращении упругого стержня. — Прикл. математика и механика, 1982, 46, вып. 4, с. 587—595.
2. Акуленко Л. Д., Гукасян А. А. Управление плоскими движениями упругого звена манипулятора. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1983, № 5, с. 33—41.
3. Бербюк В. Е. Об управляемом вращении системы двух твердых тел с упругими элементами. — Прикл. математика и механика, 1984, 48, вып. 2, с. 238—246.
4. Бербюк В. Е. Программный уровень системы управления шагающего аппарата при движении с заданной скоростью. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1982, № 5, с. 45—50.
5. Бербюк В. Е. Математическая модель упругого манипулятора с распределенными параметрами. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1984, вып. 20, с. 88—93.
6. Бербюк В. Е., Демидюк М. В. Об управляемом движении упругого манипулятора с распределенными параметрами. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1984, № 2, с. 59—67.
7. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975.—568 с.
8. Лакота Н. А., Рахманов Е. В., Шведов В. Н. Управление упругим манипулятором на траектории. — Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 2, с. 53—59.
9. Черноусько Ф. Л. Динамика управляемых движений упругого манипулятора. — Там же, 1981, № 5, с. 142—152.
10. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. — М.: Наука, 1980.—384 с.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 19.03.84

УДК 534.26 : 539.3

А. П. Поддубняк

**КВАЗИОПТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ
ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В ТВЕРДОМ
НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ТЕЛЕ**

В рамках теории «эффектов второго порядка» вектор упругого перемещения представляется в виде: $u = v + w$, где v и w удовлетворяют соответственно однородному и неоднородному уравнениям Ламе:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}) - \rho_0 \mathbf{v}'' &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{w}) - \rho_0 \mathbf{w}'' &= \rho_0 \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (1)$$

причем

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{T}_1(\mathbf{v}), \\ \mathbf{T}_1(\mathbf{v}) &= -\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}) - \mathbf{T}_0(\mathbf{v}), \\ \mathbf{T}_0(\mathbf{v}) &= \mathbf{I} \left\{ \lambda \left[\omega^2 + \frac{1}{2} I_1(\boldsymbol{\varepsilon}^2) \right] - \left(m - \frac{n}{2} \right) [\vartheta^2 - I_1(\boldsymbol{\varepsilon}^2)] + l \vartheta^2 \right\} + \quad (2) \\ &+ n \boldsymbol{\varepsilon}^2 + (2m - n) \boldsymbol{\varepsilon} \vartheta + \mu \nabla \mathbf{v}^T \cdot \nabla \mathbf{v}, \\ \vartheta &= I_1 \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T). \end{aligned}$$

В формулах (1), (2) ρ_0 — плотность материала; \mathbf{T} — линейный тензор напряжений Коши над \mathbf{v} или \mathbf{w} ; I_1 — линейный инвариант тензора; λ, μ — постоянные Ламе второго рода; l, m, n — постоянные Мурнагана [2]; \mathbf{I} — единичный аффинор. Переменные выбраны в отсчетной (лагранжевой) конфигурации. Точками обозначены производные по времени t , символ (T) отвечает операции транспонирования тензора.

Представим первичные высокочастотные волны в виде бигармонических сигналов:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{A=L, T} \mathbf{1}_{A3} \cdot \mathbf{F}_A^\beta(\mathbf{x}) e^{-i\omega \rho \tau A} + \text{к. с.},$$