

заданным термонапряжениям $\sigma(x, \tau)$, — то на основании соотношений (1) — (6) решение такой задачи можно свести к решению системы интегральных уравнений типа Вольтера и Фредгольма первого рода. Наличие соотношений (8), (16) (либо (15)), (17) — (20) дает возможность, за исключением граничных условий теплообмена второго рода, обойти нелегкий вопрос определения, например, функции распределения внутренних источников тепла $u(x, \tau)$ из интегрального уравнения следующего типа:

$$\int_0^{\tau} \int_k^1 u(\xi, \eta) G(x, \xi; \tau, \eta) d\xi d\eta = Q(x, \tau),$$

где ядро G — непрерывная функция своих аргументов.

Пять соотношений (8), (16) — (20) связывают между собой семь величин $T(x, \tau)$, $\frac{1+j}{1-k^{1+j}} \int_k^1 x^j T(x, \tau) dx$, $\sigma(x, \tau)$, $u(x, \tau)$, $\int_k^1 x^j u(x, \tau) dx$, $t_i(\tau)$ ($i = 1, 2$). Начальное распределение температурного поля $f(x)$, как и раньше, предполагается заданным. Поэтому с помощью этих соотношений могут быть определены только пять величин, остальные две должны быть заданы. Если задано, например, температурное поле $T(x, \tau)$, то известна и среднеинтегральная температура $\frac{1+j}{1-k^{1+j}} \int_k^1 x^j T(x, \tau) dx$, все остальные величины определяются из соотношений (8), (16) — (20). Если же заданы термонапряжения $\sigma(x, \tau)$, то для определения остальных величин необходимо задать еще одну из них. Пусть известной величиной будет еще температура $t_1(\tau)$. Тогда из граничного условия (18) легко найти мощность внутренних источников тепла $\int_k^1 x^j u(x, \tau) dx$, из уравнения (17) — функцию распределения внутренних источников $u(x, \tau)$, а дальше шаг за шагом и остальные величины, в том числе и температурное поле $T(x, \tau)$.

Однако без решения интегральных уравнений обойтись, по-видимому, невозможно в случае граничного условия теплообмена второго рода, когда вместо температуры $t_1(\tau)$ задан тепловой поток $q(\tau)$, поскольку в этом случае граничное условие второго рода не связывает мощность источников тепла с тепловым потоком. Они связаны тогда только условием (15), которое по существу является условием теплового баланса.

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. — М.: Мир, 1964.— 517 с.
2. Вигак В. М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. — Киев: Наук. думка, 1979.—360 с.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности — М.: Высш. шк., 1967.—600 с.
4. Тимошенко С. П., Гудвер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975.—575 с.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 20.06.83

УДК 539.377

Б. В. Гера, Л. Ю. Кисиль

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ НАГРЕВ ПЛАСТИНЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ТЕМПЕРАТУРУ НАГРЕВА И ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим тонкую неограниченную пластину постоянной толщины $2h$. Поверхности пластины $z = \pm h$ находятся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой, температура $t_c(\tau)$ которой изменяется во времени и не зависит от координат. В начальный момент времени температура пластины равна нулю.

С использованием операторного метода [4] распределение температуры по толщине пластины можно записать в виде

$$t(\gamma, \tau) = \frac{\rho \cos p\gamma}{\sin p} T_1 + \frac{1}{3} \frac{\rho^2 \sin p\gamma}{\sin p - \rho \cos p} T_2, \quad (1)$$

где

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t d\gamma; \quad T_2 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \gamma t d\gamma;$$

$\rho^2 = -\frac{\partial}{\partial \tau}$ — дифференциальный оператор; $\gamma = \frac{z}{h}$; $\tau = \frac{a}{h^2} \tau'$; τ' — время, a — коэффициент температуропроводности.

Разлагая правую часть выражения (1) по степеням ρ и ограничиваясь слагаемыми до $2(n-1)$ порядка, получаем аппроксимацию распределения температуры по толщине в виде многочлена $2n-1$ порядка относительно γ . Из граничных условий на поверхностях $\gamma = \pm 1$ с учетом (1) получаем для определения T_1 и T_2 следующую систему уравнений:

$$T_i = \sum_{j=1}^{2n} a_{ij} T_j + b_i t_c, \quad i = \overline{1, 2n}. \quad (2)$$

Здесь a_{ij} , b_i — некоторые константы; точкой обозначено дифференцирование по τ ;

$$T_{2i-1} = \frac{d^{i-1} T_1}{d\tau^{i-1}}, \quad T_{2i} = \frac{d^{i-1} T_2}{d\tau^{i-1}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Система (2) рассматривается при нулевых начальных условиях:

$$T_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, 2n}. \quad (4)$$

Для жестко зашпемленной по краям пластины температурные напряжения определяются по формуле [1]

$$\sigma(\gamma, \tau) = \frac{\alpha_t E}{1-\nu} (T_1 - t), \quad (5)$$

где α_t — линейный коэффициент температурного расширения; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Задача оптимизации нагрева состоит в определении такого непрерывного изменения во времени температуры внешней среды $t_c(\tau)$, при котором обеспечивается прогрев пластины до заданной температуры t^* за минимально короткий промежуток времени τ_* . При этом температура внешней среды $t_c(\tau)$, скорость ее изменения и температурные напряжения $\sigma(\gamma, \tau)$ должны удовлетворять условиям

$$0 \leq t_c(\tau) \leq t_c^*, \quad |t_c(\tau)| \leq A^*, \quad (6)$$

$$t_c(0) = 0, \quad t_c(\tau_*) = t^*, \quad |\sigma(\gamma, \tau)| \leq \sigma_{\text{доп}}. \quad (7)$$

Если обозначить

$$\sigma^*(\tau) = \max_{|\gamma| \leq 1} |\sigma(\gamma, \tau)|, \quad (8)$$

то ограничения на температурные напряжения можно представить в виде

$$\sigma^*(\tau) \leq \sigma_{\text{доп}}. \quad (9)$$

Здесь t_c^* , t^* — заданные константы, удовлетворяющие условию $t_c^* > t^* > 0$. Условия на температурное поле при $\tau = \tau_*$ имеют вид

$$T_1(\tau_*) = t^*, \quad T_i(\tau_*) = 0, \quad i = \overline{2, 2n}. \quad (10)$$

Используя метод штрафных функций [2], сформулируем задачу опти-

мизации: найти оптимальное управление $t_c(\tau)$, которое является пределом последовательности функций $t_c^{(k)}(\tau)$ ($k = 1, 2, \dots$), определяемых из условий минимума функционалов

$$I_k = \int_0^{\tau_*^{(k)}} \left(\frac{1}{2} + M_k \Phi(t_c^{(k)}(\tau)) \right) d\tau + \frac{\tau_*^{(k)}}{2} + M_k \Phi_0 \quad (11)$$

в некоторой области, включающей область допустимых функций управления. Здесь $\tau_*^{(k)}$ — неизвестные моменты времени, подлежащие определению; M_k — штрафные коэффициенты, стремящиеся к бесконечности с ростом k ; Φ и Φ_0 — неотрицательные функции равные нулю только в случае одновременного выполнения условий (6), (7) и (9).

Необходимые условия минимума функционала (11) запишем исходя из принципа максимума Понтрягина [3]. Функция Гамильтона — Понтрягина имеет вид

$$H(T^{(k)}(\tau), t_c^{(k)}(\tau), \psi^{(k)}(\tau), \tau) = -\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{2n} \psi_i^{(k)}(\tau) \sum_{i=1}^{2n} a_{ij} T_i^{(k)} - M_k \Phi(t_c^{(k)}(\tau)) + t_c^{(k)}(\tau) \sum_{i=1}^{2n} b_i \psi_i^{(k)}(\tau). \quad (12)$$

Если $\tau_*^{(k)}$, $t_c^{(k)}(\tau)$, $T^{(k)}(\tau) = (T_1^{(k)}(\tau), \dots, T_{2n}^{(k)}(\tau))$ является решением задачи минимизации (11), тогда существует непрерывная функция $\psi^{(k)}(\tau) = (\psi_1^{(k)}(\tau), \dots, \psi_{2n}^{(k)}(\tau))$, такая, что для всякого $\tau \in [0, \tau_*^{(k)}]$ выполняются соотношения

$$\psi^{(k)} = -\frac{\partial H}{\partial T^{(k)}}, \quad (13)$$

$$\sup_{t_c^{(k)}} H(T^{(k)}(\tau), t_c^{(k)}, \psi^{(k)}(\tau), \tau) = H(T^{(k)}(\tau), t_c^{(k)}(\tau), \psi^{(k)}(\tau), \tau) \quad (14)$$

и удовлетворяются условия трансверсальности при $\tau = \tau_*^{(k)}$:

$$H(T^{(k)}(\tau_*^{(k)}), t_c^{(k)}(\tau_*^{(k)}), \psi^{(k)}(\tau_*^{(k)}), \tau_*^{(k)}) + \frac{1}{2} M_k \tau_*^{(k)} = 0, \\ T_i^{(k)}(\tau_*^{(k)}) = t^*, \quad T_i^{(k)}(\tau_*^{(k)}) = 0, \quad i = \overline{2, 2n}.$$

Необходимые условия минимума I_k , рассматриваемые совместно с (2) и (4), вполне определяют функции $t_c^{(k)}(\tau)$, которые с ростом k стремятся к искомой функции $t_c(\tau)$ и при этом последовательность I_k остается ограниченной [2]. Поскольку с ростом k коэффициенты M_k стремятся к бесконечности, то для ограниченности I_k при $k \rightarrow \infty$ функция $t_c(\tau)$, являющаяся пределом $t_c^{(k)}(\tau)$, должна принадлежать множеству

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \in C[0, \tau_*] \mid \Phi(\omega(\tau)) = 0, \Phi_0 = 0, \omega(\tau_i) = a_i, i = \overline{1, 2n-1}\}. \quad (15)$$

Здесь τ_i — корни уравнения

$$\langle b, \psi \rangle \equiv \sum_{i=1}^{2n} b_i \psi_i(\tau) = 0. \quad (16)$$

Если в каждый момент времени $\tau = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \tau_*$) определить промежутки $[\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)]$ как область значений функций $\omega \in \Omega$ при $\tau = \theta$, то, переходя в формуле (14) к пределу, с учетом обозначений (12) получим, что

$$t_c(\tau) = \begin{cases} \varphi_2(\tau) & \text{при } \langle b, \psi \rangle \geq 0, \\ \varphi_1(\tau) & \text{при } \langle b, \psi \rangle < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Исходя из условий (13), (15), (17), можно показать, что оптимальное управление $t_c(\tau)$ будет таким, что в каждый момент времени τ одно из условий (6), (9) будет выполняться как строгое равенство, т. е. оптимальное управление будет принадлежать границе ограничений (6), (9).

В качестве примера получим решение задачи для случая $n=1$, т. е. для линейного распределения температуры по толщине пластины:

$$t = T_1 + \gamma T_2. \quad (18)$$

Уравнения (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= -\mu_1 T_1 - \mu_2 T_2 + (\mu_1 + \mu_2) t_c, \\ \dot{T}_2 &= -3\mu_2 T_1 - 3(1 + \mu_1) T_2 + 3(\mu_1 + \mu_2) t_c, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\mu_{1,2} = \frac{1}{2}(\mu^+ \pm \mu^-)$, μ^\pm — относительные коэффициенты теплообмена на границах $\gamma = \pm 1$ соответственно.

Функции T_1 и T_2 должны удовлетворять начальным условиям

$$T_1(0) = 0, \quad T_2(0) = 0 \quad (20)$$

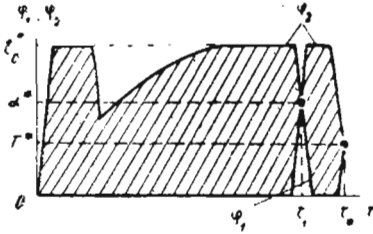


Рис. 1.

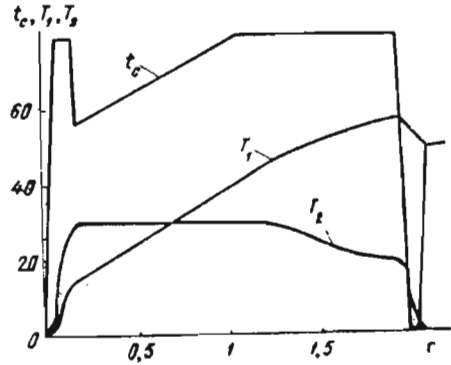


Рис. 2.

и условиям равномерного нагрева при $\tau = \tau_*$:

$$T_1(\tau_*) = t^*, \quad T_2(\tau_*) = 0, \quad (21)$$

а функция управления $t_c(\tau)$ — условиям (6), (7).

С учетом формулы (18) ограничения на напряжения (9) можно преобразовать к виду

$$|T_2| \leq \frac{1-\nu}{\alpha_l E} \sigma_{\text{доп}}. \quad (22)$$

Кусочно-гладкие функции, обеспечивающие выполнение ограничений (6), (22) и условий (7), (20), (21), составляют множество допустимых функций управлений. Эти функции в каждый момент времени θ ($0 \leq \theta \leq \tau_*$) принимают значения в промежутке $[\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)]$. Кривые $\varphi_1 = \varphi_1(\theta)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(\theta)$, ограничивающие область изменения допустимых функций управления (заштрихованная область на рис. 1), состоят из отрезков, на которых выполняется одно из условий: $\dot{t}_c = \pm A^*$, $t_c = t_c^*$, $t_c = 0$, $\sigma = \sigma_{\text{доп}}$.

Согласно (17) функция управления состоит из участков, совпадающих с $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$, т. е.

$$t_c(\tau) = \begin{cases} \varphi_2(\tau) & \text{при } \varphi_1 + 3\varphi_2 \geq 0, \\ \varphi_1(\tau) & \text{при } \varphi_1 + 3\varphi_2 \leq 0. \end{cases} \quad (23)$$

Имея вид функции управления (23), можно проинтегрировать уравнения (19) и определить из условий (21) и условия непрерывности самой функции $t_c(\tau)$ моменты переключения управления.

Численные исследования выполнены для стальной пластинки с параметрами $a = 0,422 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\alpha_l = 0,17 \cdot 10^{-4}$ 1/град, $h = 0,01$ м, $E = 0,192 \cdot 10^{12}$ Н/м²; $\nu = 0,283$.

На рис. 2 для случая $\mu^+ \rightarrow \infty$, $\mu^- = 0$ показано изменение оптимального режима нагрева t_c , а также соответствующих ему температурных характеристик T_1 и T_2 при $t^* = 50^\circ\text{C}$, $t_c^* = 80^\circ\text{C}$, $\sigma_{\text{доп}} = 14$ кг/мм², $A^* = 60$ град/с.

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. — М.: Мир, 1964.— 517 с.
2. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.— 400 с.
3. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.— 520 с.
4. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. — Киев: Наук. думка, 1978.— 343 с.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов.

Получено 23.06.83

УДК 531.011+62-50

В. Е. Бербюк, А. И. Дидух

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УПРУГИМ МАНИПУЛЯТОРОМ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПО НОРМЕ УСКОРЕНИЯМИ

Снижение затрат времени на выполнение транспортных операций, ограни-

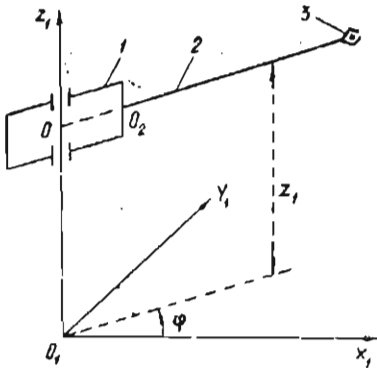


Рис. 1.

ченность динамических перегрузок и гашение колебаний, возникающих в упругих звеньях манипуляторов, является эффективным способом повышения производительности роботов и качества их систем управления. В настоящей работе, являющейся продолжением и развитием [5, 6], исследуется задача управления о приведении манипулятора из начального фазового состояния в конечное за минимальное время. При этом в отличие от [1—3, 5, 6, 8, 9], помимо гашения упругих колебаний стрелы манипулятора, требуется ограниченность по норме ускорений транспортных движений системы. С помощью метода моментов [7] построен алгоритм решения поставленной задачи управления с гашением произвольного числа мод упругих колебаний манипулятора.

1. Кинематическая схема рассматриваемой механической системы представлена на рис. 1. Манипулятор состоит из абсолютно твердого цилиндра 1 массы m_1 и жестко связанного с ним тонкого нерастяжимого упругого стержня 2 длины l и массы m_2 (стрела манипулятора). На правом конце стержня — твердое тело 3 массы m_3 , линейными размерами которого будем пренебрегать. Под действием управляющего момента M манипулятор вращается вокруг оси O_1Z_1 , а под действием силы F — перемещается вдоль этой же оси инерциального пространства $O_1X_1Y_1Z_1$.

Движение рассматриваемой механической системы определяется решением следующих уравнений с граничными и начальными условиями [6]:

$$(I_1 + m_3h^2)\varphi'' + m_3hv_1'' + \int_0^l \rho S [v'' + (a+x)\varphi''] (a+x) dx = M, \quad (1)$$

$$m(z_1'' + g) + m_3w_1'' + \int_0^l \rho S w'' dx = F, \quad (2)$$

$$(EI_2 v'''' + \rho S v'' - [\rho S v + (bv')']\varphi'^2 = -\rho S (a+x)\varphi'', \quad (3)$$

$$(EI_2 w'''' + \rho S w'' - (bw')'\varphi'^2 = -\rho S (z_1'' + g), \quad (4)$$

$$v(0, t) = v'(0, t) = w(0, t) = w'(0, t) = 0, \quad (5)$$

$$v_1'' = 0, \quad (EI_2 v_1'')' = m_3 [v_1'' + hv_1'' + (hv_1' - v_1)\varphi'^2], \quad (6)$$

$$w_1'' = 0, \quad (EI_2 w_1'')' = m_3 (z_1'' + w_1'' + hz_1'' w_1' + g). \quad (7)$$