6. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М.* Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. — Киев : Наук. думка, 1981.—342 с.
7. *Черниха Ю. А.* О задаче термоупругости для тонких пластин. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1985, вып. 21, с. 37—41.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов Получено 15.02.84

УДК 536.12 : 539.377

В. М. Вигак

НОВАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

При оптимизации управления термонапряженным состоянием упругого тела с помощью внутренних источников тепла возникает потребность иметь непосредственные соотношения между заданными требуемыми термонапряжениями и функцией распределения внутренних источников тепла. В настоящей работе приведены основные соотношения между одномерным нестационарным температурным полем, функцией распределения внутренних источников тепла, квазистатическими упругими термонапряжениями и другими величинами, в том числе дифференциальное уравнение второго порядка параболического типа, граничные и начальное условия, которым должна удовлетворять основная составляющая термонапряженного состояния неограниченной пластины, полых цилиндра и шара.

Известно [2, 3], что в случае одномерной нестационарной задачи теплопроводности и конвективном теплообмене на границе тела (пластины, полых цилиндра и шара) температурное поле $T(x, \tau)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\Delta T(x, \tau) + u(x, \tau) = \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau}, \quad x \in (k, 1), \quad \tau \in (0, \infty), \tag{1}$$

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial x} + H_1[T(1, \tau) - t_1(\tau)] = 0, \quad \tau \in (0, \infty),$$
$$\frac{\partial T(k, \tau)}{\partial x} - H_2[T(k, \tau) - t_2(\tau)] = 0, \quad \tau \in (0, \infty), \tag{2}$$

$$T(x, 0) = f(x), \quad x \in [k, 1], \tag{3}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{j}{x}\frac{\partial}{\partial x}$; $j = 0, 1, 2$ — соответственно для пластины, цилиндра и шара; $k = 0$ — для пластины и $k \in [0, 1)$ — для цилиндра и шара; H_i $(i = 1, 2)$ — безразмерные коэффициенты теплообмена; $u(x, \tau)$ — функция распределения внутренних источников тепла; $t_i(\tau)$ $(i = 1, 2)$ — температуры окружающих сред; $f(x)$ — начальное распределение температурного поля.

Из термоупругости [1, 2, 4] известны также соотношения между квазистатическими относительными температурными напряжениями и одномерным температурным полем тела:

$$\sigma_y(x, \tau) = \sigma_z(x, \tau) = \sigma(x, \tau) = \int_0^1 T(x, \tau)\,dx - T(x, \tau) \tag{4}$$

— для закрепленной по краям от углового поворота пластины;

$$\sigma_z(x, \tau) = \sigma(x, \tau) = \frac{2}{1-k^2}\int_k^1 xT(x, \tau)\,dx - T(x, \tau),$$

$$\sigma_0(x, \tau) = \frac{x^2+k^2}{(1-k^2)x^2}\int_k^1 xT(x, \tau)\,dx + \frac{1}{x^2}\int_k^x xT(x, \tau)\,dx - T(x, \tau), \tag{5}$$

$$\sigma_r(x, \tau) = \frac{x^2 - k^2}{(1 - k^2)\, x^2} \int_k^1 xT(x, \tau)\, dx - \frac{1}{x^2} \int_k^x xT(x, \tau)\, dx$$

— для длинного полого цилиндра со свободными концами;

$$\sigma_\theta(x, \tau) = \frac{2x^3 + k^3}{(1 - k^3)\, x^3} \int_k^1 x^2 T(x, \tau)\, dx + \frac{1}{x^3} \int_k^x x^2 T(x, \tau)\, dx - T(x, \tau),$$

$$\sigma_r(x, \tau) = \frac{2(x^3 - k^3)}{(1 - k^3)\, x^3} \int_k^1 x^2 T(x, \tau)\, dx - \frac{2}{x^3} \int_k^x x^2 T(x, \tau)\, dx \tag{6}$$

— для полого шара. Здесь

$$\sigma = \frac{(1 - \nu)\, \sigma_*}{\alpha_T E},$$

где σ_* — температурные напряжения; ν, α_T, E — соответственно коэффициенты Пуассона, линейного расширения и модуль упругости.

Для удобства в случае шара введем добавочно еще такую величину относительных напряжений:

$$\sigma(x, \tau) = \sigma_\theta(x, \tau) + \frac{1}{2} \sigma_r(x, \tau) = \frac{3}{1 - k^3} \int_k^1 x^2 T(x, \tau)\, dx - T(x, \tau). \tag{7}$$

Если поставлена прямая задача определения температурных напряжений в теле, вызванных температурным полем, удовлетворяющим задаче теплопроводности (1) — (3) при заданных внутренних и внешних источниках (стоках) тепла, то приведенные выше формулы (4), (5) либо (6) дают возможность определить их.

При оптимизации температурных режимов и термонапряженного состояния тела возникает обратная задача термоупругости: по заданным температурным напряжениям $\sigma(x, \tau)$ как следствию требуется определить причину — функцию распределения внутренних источников тепла $u(x, \tau)$. Для этого желательно иметь непосредственное соотношение между упомянутыми функциями.

В дальнейшем предполагаем, что заданы относительные термонапряжения в теле

$$\sigma(x, \tau) = \frac{1 + j}{1 - k^{1+j}} \int_k^1 x^j T(x, \tau)\, dx - T(x, \tau), \quad j = 0, 1, 2. \tag{8}$$

Очевидно выполнение условия

$$\int_k^1 x^j \sigma(x, \tau)\, dx \equiv 0, \quad j = 0, 1, 2. \tag{9}$$

При этом в случае цилиндра ($j = 1$) и шара ($j = 2$) другие компоненты напряжений выражаются через величину $\sigma(x, \tau)$ следующими соотношениями:

$$\sigma_\theta(x, \tau) = \sigma(x, \tau) - x^{-(1+j)} \int_k^x \xi^j \sigma(\xi, \tau)\, d\xi, \quad j = 1, 2,$$

$$\sigma_r(x, \tau) = j x^{-(1+j)} \int_k^x \xi^j \sigma(\xi, \tau)\, d\xi, \quad j = 1, 2. \tag{10}$$

Последние формулы нетрудно найти на основании соотношений (5) — (7) и уравнений равновесия.

Из соотношения (8) и задачи теплопроводности (1) — (3) следует, что напряжения $\sigma(x, \tau)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\Delta\sigma(x, \tau) + \frac{1 + j}{1 - k^{1+j}} \frac{d}{d\tau} \int_k^1 x^j T(x, \tau)\, dx = \frac{\partial\sigma(x, \tau)}{\partial\tau} + u(x, \tau), \tag{11}$$

$$j = 0, 1, 2, \quad x \in (k, 1), \quad \tau \in (0, \infty),$$

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial\sigma(1,\tau)}{\partial x}+\sigma(1,\tau)=\frac{1+j}{1-k^{1+j}}\int\limits_k^1 x^jT(x,\tau)\,dx-t_1(\tau), \tag{12}$$
$$j=0,\ 1,\ 2,\ \tau\in(0,\ \infty),$$
$$\frac{1}{H_2}\frac{\partial\sigma(k,\tau)}{\partial x}-\sigma(k,\tau)=-\frac{1+j}{1-k^{1+j}}\int\limits_k^1 x^jT(x,\tau)\,dx+t_2(\tau), \tag{13}$$
$$j=0,\ 1,\ 2,\ \tau\in(0,\ \infty),$$
$$\sigma(x,0)=\frac{1+j}{1-k^{1+j}}\int\limits_k^1 x^jf(x)\,dx-f(x),\ j=0,\ 1,\ 2,\ x\in[k,\ 1]. \tag{14}$$

Проинтегрировав умноженное на x^j уравнение (11) и использовав тождество (9), найдем

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_k^1 x^jT(x,\tau)\,dx=\int\limits_k^1 x^ju(x,\tau)\,dx-\frac{\partial\sigma(1,\tau)}{\partial x}+k^j\frac{\partial\sigma(k,\tau)}{\partial x}, \tag{15}$$

откуда

$$\int\limits_k^1 x^jT(x,\tau)\,dx=\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_k^1 x^ju(x,\eta)\,dx-\frac{\partial\sigma(1,\eta)}{\partial x}+k^j\frac{\partial\sigma(k,\eta)}{\partial x}\right)d\eta+$$
$$+\int\limits_k^1 x^jf(x)\,dx. \tag{16}$$

Теперь, использовав соотношения (15) и (16), систему уравнений (11) — (14) можно записать в виде

$$\Delta\sigma(x,\tau)+\frac{1+j}{1-k^{1+j}}\int\limits_k^1 x^ju(x,\tau)\,dx=\frac{\partial\sigma(x,\tau)}{\partial\tau}+\frac{1+j}{1-k^{1+j}}\left[\frac{\partial\sigma(1,\tau)}{\partial x}-\right.$$
$$\left.-k^j\frac{\partial\sigma(k,\tau)}{\partial x}\right]+u(x,\tau),\ j=0,\ 1,\ 2,\ x\in(k,\ 1),\ \tau\in(0,\ \infty), \tag{17}$$

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial\sigma(1,\tau)}{\partial x}+\sigma(1,\tau)+\frac{1+j}{1-k^{1+j}}\int\limits_0^\tau\left(\frac{\partial\sigma(1,\eta)}{\partial x}-k^j\frac{\partial\sigma(k,\eta)}{\partial x}\right)d\eta=\frac{1+j}{1-k^{1+j}}\times$$
$$\times\int\limits_0^\tau\int\limits_k^1 x^ju(x,\eta)\,dx\,d\eta+\frac{1+j}{1-k^{1+j}}\int\limits_k^1 x^jf(x)\,dx-t_1(\tau),\ j=0,\ 1,\ 2,\ \tau\in(0,\ \infty), \tag{18}$$

$$\frac{1}{H_2}\frac{\partial\sigma(k,\tau)}{\partial x}-\sigma(k,\tau)-\frac{1+j}{1-k^{1+j}}\int\limits_0^\tau\left(\frac{\partial\sigma(1,\eta)}{\partial x}-k^j\frac{\partial\sigma(k,\eta)}{\partial x}\right)d\eta=-\frac{1+j}{1-k^{1+j}}\times$$
$$\times\int\limits_0^\tau\int\limits_k^1 x^ju(x,\eta)\,dx\,d\eta-\frac{1+j}{1-k^{1+j}}\int\limits_k^1 x^jf(x)\,dx+t_2(\tau),\ j=0,\ 1,\ 2,\ \tau\in(0,\ \infty), \tag{19}$$

$$\sigma(x,0)=\frac{1+j}{1-k^{1+j}}\int\limits_k^1 x^jf(x)\,dx-f(x),\ j=0,\ 1,\ 2,\ x\in[k,\ 1]. \tag{20}$$

Очевидно, что определение термонапряжений по формулам (4) — (6) с предварительным решением задачи теплопроводности (1) — (3) равносильно решению дифференциального уравнения (17) при краевых условиях (18) — (20) и определению в дальнейшем в случаях цилиндра и шара компонент напряжений по формулам (10). Правда, следует отметить, что решение неклассической краевой задачи (17) — (20) намного труднее решения задачи теплопроводности (1) — (3).

При решении прямой задачи термоупругости (1) — (6) функции $u(x,\tau)$, $t_i(\tau)$ $(i=1,\ 2)$, $f(x)$ предполагаются заданными — требуется найти температурное поле и компоненты термонапряжений. Если поставлена обратная задача — определение функций u (x,τ) и $t_i(\tau)$ $(i=1,\ 2)$ по заданным термонапряжениям $\sigma(x, \tau)$,— то на основании соотношений (1)—(6) решение такой задачи можно свести к решению системы интегральных уравнений типа Вольтера и Фредгольма первого рода. Наличие соотношений (8), (16) (либо (15)), (17)—(20) дает возможность, за исключением граничных условий теплообмена второго рода, обойти нелегкий вопрос определения, например, функции распределения внутренних источников тепла $u(x, \tau)$ из интегрального уравнения следующего типа:

$$\int_0^\tau \int_k^1 u(\xi, \eta) G(x, \xi; \tau, \eta) d\xi d\eta = Q(x, \tau),$$

где ядро G — непрерывная функция своих аргументов.

Пять соотношений (8), (16) — (20) связывают между собой семь величин $T(x, \tau)$, $\frac{1+i}{1-k^{1+i}} \int_k^1 x^i T(x, \tau) dx$, $\sigma(x, \tau)$, $u(x, \tau)$, $\int_k^1 x^i u(x, \tau) dx$, $t_i(\tau)$ ($i = 1, 2$). Начальное распределение температурного поля $f(x)$, как и раньше, предполагается заданным. Поэтому с помощью этих соотношений могут быть определены только пять величин, остальные две должны быть заданы. Если задано, например, температурное поле $T(x, \tau)$, то известна и среднеинтегральная температура $\frac{1+i}{1-k^{1+i}} \int_k^1 x^i T(x, \tau) dx$, все остальные величины определяются из соотношений (8), (16) — (20). Если же заданы термонапряжения $\sigma(x, \tau)$, то для определения остальных величин необходимо задать еще одну из них. Пусть известной величиной будет еще температура $t_1(\tau)$. Тогда из граничного условия (18) легко найти мощность внутренних источников тепла $\int_k^1 x^i u(x, \tau) dx$, из уравнения (17) — функцию распределения внутренних источников $u(x, \tau)$, а дальше шаг за шагом и остальные величины, в том числе и температурное поле $T(x, \tau)$.

Однако без решения интегральных уравнений обойтись, по-видимому, невозможно в случае граничного условия теплообмена второго рода, когда вместо температуры $t_1(\tau)$ задан тепловой поток $q(\tau)$, поскольку в этом случае граничное условие второго рода не связывает мощность источников тепла с тепловым потоком. Они связаны тогда только условием (15), которое по существу является условием теплового баланса.

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. — М. : Мир, 1964.— 517 с.
2. *Вигак В. М.* Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. — Киев : Наук. думка, 1979.—360 с.
3. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности — М. : Высш. шк., 1967.—600 с.
4. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. — М. : Наука, 1975.—575 с.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 20.06.83

УДК 539.377

Б. В. Гера, Л. Ю. Кисиль

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ НАГРЕВ ПЛАСТИНЫ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ТЕМПЕРАТУРУ НАГРЕВА И ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим тонкую неограниченную пластину постоянной толщины $2h$. Поверхности пластины $z = \pm h$ находятся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой, температура $t_c(\tau)$ которой изменяется во времени и не зависит от координат. В начальный момент времени температура пластины равна нулю.