Подставляя (17) в (15), после исключения Q_3 получим

$$D_2 \frac{d^4 u_3}{dx_1^4} + \frac{d^2}{dx_1^2}(M_{03}\theta_1) = 0, \quad D_1 \frac{d^2\theta_1}{dx_1^2} = M_{03}\frac{d^2 u_3}{dx_1^2}. \tag{18}$$

Уравнения (18) вместе с уравнениями начального состояния (16), определяющими момент $M_{03}(x_1)$, совпадают с известными уравнениями устойчивости плоской формы изгиба стержня с прямоугольным поперечным сечением при действии поперечной нагрузки неизменного направления. Таким образом, имеем, что в случае действия механической нагрузки неизменного направления и в случае следящей электромагнитной нагрузки рассматриваемого типа линейные уравнения устойчивости плоской формы изгиба являются идентичными. Уравнения устойчивости плоской формы изгиба в случае действия более общей следящей нагрузки приведены в работе [1].

Решение системы (18) приведем для случая консольного стержня [2]. Соотношение, определяющее критическое значение силы Ампера, для стержня с узким прямоугольным сечением имеет вид

$$(J_0 B_0)_* = \frac{1{,}51 bh^3 E}{L^3 \sqrt{1+\nu}} \quad (b \gg h),$$

где b — высота; h — ширина прямоугольного сечения; L — длина стержня.

В частности, для медного стержня с параметрами $b = 2$ см, $h = 0{,}2$ см, $E = 1{,}2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0{,}3$, $L = 60$ см при силе тока 60А (плотность тока $1{,}5 \cdot 10^6$ А/м^2) плоская форма изгиба токонесущего стержня является неустойчивой при значении индукции магнитного поля $B_0 \approx \approx 1{,}96$ Т.

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.—М.: Физматгиз, 1961.—339 с
2. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем.—М.: Наука, 1967.—984 с.
3. *Леонтович М. А., Шафранов В. Д.* Об устойчивости гибкого провода в магнитном поле.—Физика плазмы и пробл. управляемых термоядерных реакций, 1958, вып. 1, с. 172—179.
4. *Прудников В. В.* Магнитоупругие волны в токопроводящем стержне, находящемся в цилиндрической трубе. — Механика твердого тела, 1972, № 5, с. 123—129.
5. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей.—М.: Машиностроение, 1978.—222 с.
6. *Тимошенко С. П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек.—М.: Наука, 1971.—808 с.
7. *Chattopdhyay S., Moon F.* Magnetoelastic buckling and vibration of a rod carrying electrik current.—J. Appl. Mech., 1975, 42, N 4, p. 809--814.
8. *Love A.* A treatise on the mathematical theory of elasticity.—New Jork: Dover, 1944.—643 p.

Ин-т механики АН АрмССР,
Ереван

Получено 01.02.84.

УДК 539.377

Ю. А. Чернуха, В. И. Косарчин

ЛОКАЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЙ ПЛАСТИНЕ С КРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Задача о термонапряженном состоянии пластины с круговым включением рассматривалась в различных постановках [1, 3—5] и имеет важное техническое приложение [6]. Однако известные в литературе ее решения получены с использованием теорий пластин, которые не позволяют достаточно полно описать эффекты, связанные с трехмерным характером напряженного состояния в приконтактных зонах. Как следует из приводимого ниже решения, полученного на основании уточненного варианта теории пластин, указанные эффекты могут быть весьма существенными и игнорирование их может привести к неверным заключениям о прочности содержащих включения термонапряженных элементов конструкций и приборов.

Рассмотрим бесконечную пластину, содержащую круговое включение радиуса R; толщины пластины и включения одинаковы и равны $2h$; предполагается, что на цилиндрической поверхности $r=R$ выполняются условия идеального механического контакта, а вся внешняя поверхность рассматриваемой системы свободна от напряжений; пластина и включение нагреты до постоянных температур t^+ и t^- соответственно.

Согласно уточненному варианту теории пластин [7], определение напряженно-деформированного состояния описанной системы сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dr}\left[(1-2a_2)\,\omega-\Delta\Phi+\alpha_1 t\right]=0, \tag{1}$$

$$\frac{4}{45}h^4 a_2\Delta^2\omega-(1-a_1)\,\Delta\Phi+(1+a_1)(\omega-\alpha_1 t)=0,$$

$$a_1=(1-2\nu)^{-1},\ a_2=\frac{1}{2}(1-\nu)^{-1},\ \alpha_1=(4a_2-1)\,\alpha_t$$

при следующих условиях сопряжения (при $r=R$):

$$G^-\left[2\,\frac{d^2\Phi^-}{dr^2}-\left(1-a_1^-\right)\left(\omega^-+\Delta\Phi^-\right)-\left(1+a_1^-\right)\alpha_1^-t^-\right]=$$

$$=G^+\left[2\,\frac{d^2\Phi^+}{dr^2}-\left(1-a_1^+\right)\left(\omega^++\Delta\Phi^+\right)-\left(1+a_1^+\right)\alpha_1^+t^+\right], \tag{2}$$

$$\frac{d\Phi^-}{dr}=\frac{d\Phi^+}{dr},$$

$$G^-\left[\frac{d^2\omega^-}{dr^2}-\left(1-2a_2^-\right)\Delta\omega^-\right]=G^+\left[\frac{d^2\omega^+}{dr^2}-\left(1-2a_2^+\right)\Delta\omega^+\right],$$

$$a_2^-G^-\frac{d}{dr}(\Delta\omega^-)=a_2^+G^+\frac{d}{dr}(\Delta\omega^+),\quad \frac{d\omega^-}{dr}=\frac{d\omega^+}{dr}, \tag{3}$$

$$\omega^-=\omega^+$$

и граничных условиях (при $r=\infty$):

$$\frac{d^2\Phi^+}{dr^2}-\left(1-a_1^+\right)\left(\omega^++\Delta\Phi^+\right)-\left(1+a_1^+\right)\alpha_1^+t^+=0, \tag{4}$$

$$\frac{d^2\omega^+}{dr^2}-\left(1-2a_2^+\right)\Delta\omega^+=0,\quad \frac{d}{dr}(\Delta\omega^+)=0. \tag{5}$$

Кроме того, при $r=0$ удовлетворяются условия осевой симметрии искомого напряженно-деформированного состояния, которые ввиду их очевидности здесь не выписываем.

Заметим, что для третьей из разрешающих функций задачи [7] в рассматриваемом случае получаем $\Psi=\mathrm{const}$, откуда следует, что окружное перемещение u_θ и касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ равны нулю:

$$u_\theta=\tau_{r\theta}=0. \tag{6}$$

В соотношениях (1) — (6) обозначено: G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; α_t — коэффициент линейного температурного расширения; Δ — оператор Лапласа; индекс «—» относит рассматриваемую величину к включению (область $r<R$), а индекс «+» — к пластине ($r>R$).

Второе из уравнений (1) содержит в качестве коэффициента при старшей производной малую величину h^4 (записанное в безразмерных координатах — малое отношение h^4R^{-4}), следовательно [2], искомое решение будет содержать как слабоизменяющиеся слагаемые (решение вырожденной задачи), так и слагаемые типа погранслоя.

Решение вырожденной задачи, т. е. решение уравнений (1) при $h=0$, удовлетворяющее граничным условиям (2), (4) и условию ограниченности в точке $r=0$, соответствует классической теории пластин. На основании этого решения и формул (7) работы [7], выражающих компоненты вектора перемещений и тензора напряжений через функции Φ и ω, получаем

$$\omega_c = \alpha_t^- t^- + 2(1-2a_2^-)G^+A_c,$$
$$u_r^{(c)}R^{-1} = (\alpha_t^- t^- + G^+A_c)\rho, \tag{7}$$
$$\sigma_r^{(c)} = -2(1-4a_2^-)G^+G^-A_c, \quad \sigma_\theta^{(c)} = \sigma_r^{(c)} \quad (r<R),$$

$$\omega_c = \alpha_t^+ t^+, \quad \sigma_\theta^{(c)} = -\sigma_r^{(c)}, \ \sigma_r^{(c)} = -2(1-4a_2^-)G^+G^-A_c\rho^{-2},$$
$$u_r^{(c)}R^{-1} = \alpha_t^+ t^+ + (1-4a_2^-)G^-A_c\rho^{-1} \quad (r \geqslant R), \tag{8}$$

$$\sigma_z^{(c)} = \tau_{rz}^{(c)} = 0 \quad (0 \leqslant r \leqslant \infty). \tag{9}$$

Здесь обозначено

$$A_c = [(1-4a_2^-)G^- - G^+]^{-1}(\alpha_t^- t^- - \alpha_t^+ t^+); \ \rho = rR^{-1}.$$

Перемещение в направлении нормали к срединной поверхности пластины u_z связано с величиной ω простой зависимостью [7]

$$u_z = \omega z,$$

поэтому выражения для него здесь и в дальнейшем не приводятся. Отметим, что классическое решение, как это следует из формул (7) и (8), не удовлетворяет на поверхности контакта условию непрерывности перемещений u_z.

Составляющие решения типа погранслоя определялись по методике, изложенной в работе [2], путем введения новой переменной η, где

$$\eta = \frac{1-\rho}{\varepsilon}, \quad \varepsilon^4 = \frac{4}{45}\frac{h^4}{R^4} \tag{10}$$

и последующего расщепления дифференциальных операторов задачи с использованием малости параметра ε. Обусловленные погранслоем нулевого порядка слагаемые перемещений и напряжений для включения и пластины имеют соответственно вид

$$\omega_0 = 2b_1A_0e^{-\eta}[(1+b_2)\cos\eta - (1-b_2)\sin\eta],$$
$$u_r^{(0)}R^{-1} = \varepsilon b_1A_0e^{-\eta}[2(1-2a_2^-)(b_2\cos\eta - \sin\eta - b_2) +$$
$$+ \sqrt{5}(1-3\zeta^2)(\cos\eta + b_2\sin\eta)], \tag{11}$$
$$\sigma_r^{(0)} = 4\sqrt{5}b_1A_0a_2^-G^-(1-3\zeta^2)e^{-\eta}[(1+b_2)\sin\eta + (1-b_2)\cos\eta],$$
$$\sigma_\theta^{(0)} = 4b_1A_0(1-2a_2^-)G^-e^{-\eta}\Big\{(1-b_2)\sin\eta - (1+b_2)\cos\eta -$$
$$- \frac{\sqrt{5}}{2}(1-3\zeta^2)[(1+b_2)\sin\eta + (1-b_2)\cos\eta]\Big\},$$
$$\sigma_z^{(0)} = 15b_1A_0a_2^-G^-(1-\zeta^2)^2e^{-\eta}[(1+b_2)\cos\eta - (1-b_2)\sin\eta],$$
$$\tau_{rz}^{(0)} = \frac{20\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}}b_1A_0a_2^-G^-\zeta(1-\zeta^2)e^{-\eta}(b_2\cos\eta - \sin\eta) \quad (r \leqslant R),$$

$$\omega^{(0)} = 2A_0e^{\eta}[(1-b_2)\sin\eta + (1-3b_2)\cos\eta],$$
$$u_r^{(0)}R^{-1} = \varepsilon\{B_0 + A_0e^{\eta}[2(1-2a_2^+)(b_2\cos\eta + b_1\sin\eta) +$$
$$+ \sqrt{5}(1-3\zeta^2)(b_1\cos\eta - b_2\sin\eta)]\},$$
$$\sigma_r^{(0)} = 4\sqrt{5}A_0a_2^+G^+(1-3\zeta^2)e^{\eta}[(1-b_2)\cos\eta - (1-3b_2)\sin\eta],$$
$$\sigma_\theta^{(0)} = 2A_0(1-2a_2^+)G^+e^{\eta}\{(1+3b_1)\cos\eta - (1-b_1)\sin\eta +$$
$$+ \sqrt{5}(1-3\zeta^2)[(1-3b_2)\sin\eta - (1-b_2)\cos\eta]\}, \tag{12}$$
$$\sigma_z^{(0)} = 15A_0a_2^+G^+(1-\zeta^2)^2e^{\eta}[(1-b_2)\sin\eta + (1-3b_2)\cos\eta],$$

$$\tau_{rz}^{(0)} = \frac{20\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}} A_0 a_2^+ G^+ \zeta \left(1 - 3\zeta^2\right) e^{\eta} (b_2 \cos\eta + b_1 \sin\eta) \quad (r \geqslant R),$$

где

$$\zeta = h^{-1} z;\ A_0 = \left(1 + 6b_1 + b_1^2\right)^{-1} \left(\omega_c^+ - \omega_c^-\right);$$

$$B_0 = 2\left[\left(1 - 2a_2^-\right) b_1 - \left(1 - 2a_2^+\right)\right] b_2 A_0;\ b_1 = \left(a_2^- G^-\right)^{-1} a_2^+ G^+;$$

$$2b_2 = 1 + b_1.$$

Для слагаемых, обусловленных погранслоем первого порядка, получены следующие выражения:

$$\omega^{(1)} = \varepsilon\left[e^{-\eta}(A_1 \cos\eta + A_3 \sin\eta) + \frac{1}{2}\eta\omega_0\right],$$

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{1}{2}\varepsilon\eta\sigma_r^{(0)} + 2\varepsilon G^- e^{-\eta}\left\{2b_1\left(1 - 2a_2^-\right)(\sin\eta - b_2\cos\eta) A_0 + \right.$$

$$\left. + \sqrt{5}\left(1 - 3\zeta^2\right)\left[a_2^-(A_1 \sin\eta - A_3\cos\eta) - b_1 A_0 (\cos\eta + b_2 \sin\eta)\right]\right\},$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = \frac{1}{2}\varepsilon\eta\sigma_\theta^{(0)} - 2\varepsilon G^- e^{-\eta}\left\{\left(1 - 2a_2^-\right)\left[2b_1 A_0(\sin\eta - b_2\cos\eta) + \right.\right.$$

$$+ A_1\cos\eta + A_3\sin\eta\Big] + \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1 - 3\zeta^2\right)\left[\left(1 - 2a_2^-\right)(A_1\sin\eta - A_3\cos\eta) - \right.$$

$$\left.\left. - 2b_1A_0(\cos\eta + b_2\sin\eta)\right]\right\}, \tag{13}$$

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{2}\varepsilon\left[\eta\sigma_z^{(0)} + 15a_2^- G^-\left(1 - \zeta^2\right)^2 e^{-\eta}(A_1\cos\eta + A_3\sin\eta)\right],$$

$$\tau_{rz}^{(1)} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}}\varepsilon a_2^- G^- \zeta\left(1 - \zeta^2\right) e^{-\eta}\left\{\left[A_1 + A_3 + (1 - b_2) b_1 A_0\right]\cos\eta + \right.$$

$$\left. + \left[A_3 - A_1 + (1 + b_2) b_1 A_0\right]\sin\eta\right\} + \frac{1}{2}\varepsilon\eta\tau_{rz}^{(0)} \quad (r \leqslant R),$$

$$\omega_1 = \varepsilon\left[e^{\eta}(A_1\cos\eta + A_2\sin\eta) + \frac{1}{2}\eta\omega_0,\right.$$

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\eta\sigma_r^{(0)} - 4G^+B_0\right) - 2\varepsilon G^+ e^{\eta}\left\{2A_0\left(1 - 2a_2^+\right)(b_2\cos\eta + \right.$$

$$+ b_1\sin\eta) + \sqrt{5}\left(1 - 3\zeta^2\right)\left[A_0(b_1\cos\eta - b_2\sin\eta) + \right.$$

$$\left.\left. + a_2^+(A_1\sin\eta - A_2\cos\eta)\right]\right\}, \tag{14}$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\eta\sigma_\theta^{(0)} + 4G^+B_0\right) - 2\varepsilon G^+ e^{\eta}\left\{\left(1 - 2a_2^+\right)\left[A_1\cos\eta + \right.\right.$$

$$+ A_2\sin\eta - 2A_0(b_1\sin\eta + b_2\cos\eta)\Big] + \frac{\sqrt{5}}{2}(1 - 3\zeta^2) \times$$

$$\left. \times \left[\left(1 - 2a_2^+\right)(A_2\cos\eta - A_1\sin\eta) + 2A_0(b_2\sin\eta - b_1\cos\eta)\right]\right\},$$

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{2}\varepsilon\left[\eta\sigma_z^{(0)} + 15a_2^+ G^+\left(1 - \zeta^2\right)^2 e^{\eta}(A_1\cos\eta + A_2\sin\eta)\right],$$

$$\tau_{rz}^{(1)} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}}\varepsilon a_2^+ G^+ \zeta\left(1 - \zeta^2\right) e^{\eta}\left\{\left[A_2 - A_1 + (1 - b_2) A_0\right]\cos\eta - \right.$$

$$\left. - \left[A_1 + A_2 + (1 - 3b_2) A_0\right]\sin\eta\right\} + \frac{1}{2}\varepsilon\eta\tau_{rz}^{(0)} \quad (r \geqslant R).$$

В соотношениях (13) и (14) обозначено

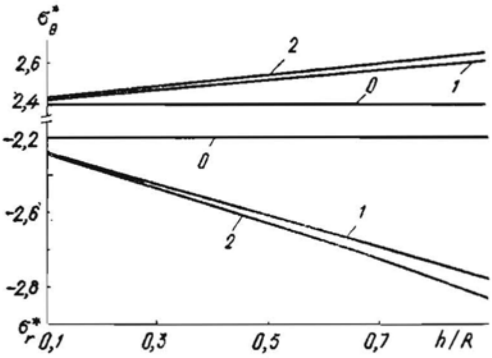
$$A_1 = \frac{1}{4} b_1 b_2^{-2}\left[\frac{1}{2}\left(\omega_c^+ - \omega_c^-\right) - \left(\frac{b_1}{a_2^+} - \frac{1}{a_2^-}\right)(1 - b_1) A_0\right];$$

$$A_2 = \frac{1}{4} b_2^{-2}\left[\frac{1}{2}\left(\omega_c^+ - \omega_c^-\right) + \left(\frac{b_1}{a_2^+} - \frac{1}{a_2^-}\right)(3 + b_1) b_1 A_0\right];$$

$$A_3 = \frac{1}{4} b_1 b_2^{-2} \left[\left(\frac{b_1}{a_2^+} - \frac{1}{a_2^-}\right)(1 + 3b_1) A_0 - \frac{1}{2} b_1 (\omega_c^+ - \omega_c^-)\right].$$

Формулы (6)—(14) определяют напряженно-деформированное состояние рассматриваемой системы с точностью до погранслоя первого порядка (выражения, полученные с учетом погранслоя второго порядка, из-за ограниченности объема статьи не приведены). Причем сумма соответствующих выражений (7), (9), (11) и (13) дает перемещения и напряжения во включении, а выражений (8), (9), (12) и (14) — в пластине.

Приводимый рисунок иллюстрирует зависимость от отношения h/R контактных значений ($r=R$) радиального σ_r и окружного σ_θ напряжений у внешних поверхностей пластины ($z=\pm h$), вычисленных для случая жесткого включения ($G^-=\infty$, $\alpha^-=0$) в различных приближениях; цифры указывают порядок погранслоя, с учетом которого вычислена соответствующая величина; по оси ординат откладывались $\overset{*}{\sigma}_r$ и $\overset{*}{\sigma}_\theta$ — отношения радиального и окружного напряжения к их значениям, определенным по классической теории пластин. Как видно из рисунка, в случае пластинчатых включений ($h/R \approx 0{,}1$) можно ограничиваться погранслоем нулевого порядка; для включений меньшего диаметра необходимо учитывать погранслой первого порядка.



Отметим следующие три частных случая полученного решения: 1) равномерно нагретая пластина с круговым инородным включением (при $t^-=t^+$); 2) равномерно нагретая пластина, жестко защемленная по внутренней цилиндрической поверхности $r=R$ (при $G^-=\infty$, $\alpha^-=0$); 3) однородная пластина, температура которой кусочно-постоянная (при $G^-=G^+$, $\nu^-=\nu^+$, $\alpha^-=\alpha^+$). В каждом из этих случаев в зоне возмущения (приконтактная зона, зона у защемленного края, область резкого изменения температуры) напряженное состояние имеет ярко выраженный объемный характер — отличны от нуля все компоненты тензора напряжений, кроме $\tau_{r\theta}$ (которое равно нулю вследствие осевой симметрии задачи). Причем напряжения в этой зоне могут в несколько раз превышать (по модулю) значения, определяемые классической теорией пластин, а некоторые из них (например, σ_r, см. рисунок) по отношению к классическим меняют знак на внешних поверхностях пластины; последнее обстоятельство важно при оценке прочности стеклянных пластин [6], которые чувствительны к растягивающим напряжениям и разрушение которых обычно начинается с поверхности.

1. *Брюханова Е. Н.* Температурные напряжения в круглой пластинке с жестким круговым ядром. — Изв. вузов. Машиностроение, 1972, № 2, с. 5—8.
2. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. — Успехи мат. наук, 1957, 12, № 5, с. 3—122.
3. *Заболотный В. П.* Температурные поля и напряжения в тонкой изгибаемой пластинке с круговым включением. — В кн.: Качество, прочность, надежность и технологичность электровакуумных приборов. Киев : Наук. думка, 1976, с. 132—134.
4. *Зашкильняк И. М.* Влияние тепловыделяющих включений на напряженное состояние диска. — В кн.: Математические методы в термомеханике. Киев : Наук. думка, 1978, с. 152—160.
5. *Кулик А. Н., Приходская Е. И.* Температурные напряжения в пластине с инородным тепловыделяющем элементе.— В кн.: Обобщенные функции в термоупругости. Киев : Наук. думка, 1980, с. 58—64.

6. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М.* Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. — Киев : Наук. думка, 1981.—342 с.
7. *Чернуха Ю. А.* О задаче термоупругости для тонких пластин. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1985, вып. 21, с. 37—41.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов
Получено 15.02.84

УДК 536.12 : 539.377

В. М. Вигак

НОВАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

При оптимизации управления термонапряженным состоянием упругого тела с помощью внутренних источников тепла возникает потребность иметь непосредственные соотношения между заданными требуемыми термонапряжениями и функцией распределения внутренних источников тепла. В настоящей работе приведены основные соотношения между одномерным нестационарным температурным полем, функцией распределения внутренних источников тепла, квазистатическими упругими термонапряжениями и другими величинами, в том числе дифференциальное уравнение второго порядка параболического типа, граничные и начальное условия, которым должна удовлетворять основная составляющая термонапряженного состояния неограниченной пластины, полых цилиндра и шара.

Известно [2, 3], что в случае одномерной нестационарной задачи теплопроводности и конвективном теплообмене на границе тела (пластины, полых цилиндра и шара) температурное поле $T(x, \tau)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\Delta T(x, \tau) + u(x, \tau) = \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau}, \quad x \in (k, 1), \quad \tau \in (0, \infty), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial T(1, \tau)}{\partial x} + H_1[T(1, \tau) - t_1(\tau)] = 0, \quad \tau \in (0, \infty), \\ \frac{\partial T(k, \tau)}{\partial x} - H_2[T(k, \tau) - t_2(\tau)] = 0, \quad \tau \in (0, \infty), \end{gathered} \tag{2}$$

$$T(x, 0) = f(x), \quad x \in [k, 1], \tag{3}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{j}{x}\frac{\partial}{\partial x}$; $j = 0, 1, 2$ — соответственно для пластины, цилиндра и шара; $k = 0$ — для пластины и $k \in [0, 1)$ — для цилиндра и шара; $H_i (i = 1, 2)$ — безразмерные коэффициенты теплообмена; $u(x, \tau)$ — функция распределения внутренних источников тепла; $t_i(\tau)$ $(i = 1, 2)$ — температуры окружающих сред; $f(x)$ — начальное распределение температурного поля.

Из термоупругости [1, 2, 4] известны также соотношения между квазистатическими относительными температурными напряжениями и одномерным температурным полем тела:

$$\sigma_y(x, \tau) = \sigma_z(x, \tau) = \sigma(x, \tau) = \int_0^1 T(x, \tau)\,dx - T(x, \tau) \tag{4}$$

— для закрепленной по краям от углового поворота пластины;

$$\begin{gathered} \sigma_z(x, \tau) = \sigma(x, \tau) = \frac{2}{1-k^2}\int_k^1 xT(x, \tau)\,dx - T(x, \tau), \\ \sigma_0(x, \tau) = \frac{x^2+k^2}{(1-k^2)x^2}\int_k^1 xT(x, \tau)\,dx + \frac{1}{x^2}\int_k^x xT(x, \tau)\,dx - T(x, \tau), \end{gathered} \tag{5}$$