3. *Белоозеров В. Н.* Удержание сверхпроводящего шара системой круговых токов.— Журн. техн. физики, 1966, 36, вып. 5, с. 852—859.
4. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. — М. : Физматгиз, 1961.—339 с.
5. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. — М. : Высш. шк., 1970.—712 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М. : Гостехиздат, 1957.—532 с.
7. *Левин М. Л.* О решении одной задачи квазистационарной электродинамики методом изображений.— Журн. техн. физики, 1964, 34, вып. 3, с. 393—398.
8. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. — М. : Гостехиздат, 1948.—212 с.

Ин-т механики АН АрмССР,
Ереван

Получено 17.04.83

УДК 539.3

К. Б. Казарян

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ВЫПУЧИВАНИИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ ТОКОПРОВОДОВ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Задачи устойчивости токонесущих стержней рассматривались многими исследователями. В работе [3] впервые была установлена возможность потери упругой устойчивости стержня с током, обусловленная взаимодействием тока с собственным магнитным полем. Обзор работ по устойчивости токонесущих стержней приведен в [7]. Вопросу влияния внешнего магнитного поля на распространение упругих волн в стержне с поверхностным током посвящена работа [4].

В настоящей статье исследуется пространственная потеря устойчивости упругих стержней с током во внешнем магнитном поле неизменного направления. При этом исходим из общих нелинейных уравнений статики пространственно-криволинейных стержней с учетом следящих сил электромагнитного происхождения, обусловленных взаимодействием тока с внешним магнитным полем. Рассмотрим конкретные задачи устойчивости круглого кольца, а также плоской формы изгиба прямого стержня при определенных направлениях вектора индукции внешнего магнитного поля.

1. Рассмотрим тонкий упругий электропроводный неферромагнитный стержень, по которому течет постоянный электрический ток силы J_0, находящийся во внешнем однородном магнитном поле с вектором индукции $\vec{B}_0$ неизменного направления. Ток в стержне считается не сильным, что позволяет не учитывать собственное магнитное поле, индуцированное электромагнитное поле, а также возможные температурные эффекты, обусловленные джоулевым теплом.

Вследствие взаимодействия тока с внешним магнитным полем на стержень действует пондеромоторная сила Ампера $\vec{F} = \vec{J}_0 \times \vec{B}_0$, которая в конечном итоге может привести к потере упругой устойчивости стержня.

Для описания деформации стержня введем подвижную систему координат η_1, η_2, η_3 с ортами $\vec{e}_m$, жестко связанную с поперечными сечениями стержня. Начало координат поместим в центре тяжести площади поперечного сечения стержня, ось η_1 направим вдоль касательной к осевой линии стержня, оси η_2, η_3 — по главным центральным осям инерции [5, 8]. Все величины, меняющиеся вдоль осевой линии стержня, представим в виде функции от длины дуги l осевой линии.

Пусть $\vec{e}_{m0}$ — орты подвижной системы недеформированного состояния стержня, связанные с ортами $\vec{e}_m$ соотношениями

$$\vec{e}_m = \lambda_{mj}\vec{e}_{j0}, \quad \vec{e}_{m0} = \lambda_{jm}\vec{e}_m \quad (m,\ j = \overline{1,\ 3}), \tag{1}$$

где λ_{mj} — элементы матрицы поворота $\tilde{\lambda}$, зависящие от неизвестных углов θ_j [5], определяющих поворот координатных осей η вокруг ортов $\vec{e}_j$ (при $i \neq j$ $\theta_i = 0$). Для малых отклонений осей углы θ_j малы и элементы матрицы $\tilde{\lambda}$ имеют вид [5]

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 1, \quad \lambda_{12} = -\lambda_{21} = \theta_3, \quad \lambda_{13} = -\lambda_{31} = -\theta_2, \quad \lambda_{23} = -\lambda_{32} = \theta_1. \tag{2}$$

В процессе деформации вектор электрического тока стержня всегда направлен вдоль касательной к осевой линии стержня $\vec{J}_0 = J_0\vec{e}_1$. Следовательно, пондеромоторная сила $\vec{F} = J_0(\vec{e}_1 \times \vec{B}_0)$ представляет собой следящую силу, зависящую от вектора $\vec{e}_1$, положение которого определяется деформацией стержня.

Для получения уравнений устойчивости будем исходить из общих нелинейных уравнений статики криволинейных стержней [5] — [8], которые с учетом следящей силы Ампера в проекциях на связанные оси η_i имеют вид

$$\frac{dQ_j}{dl} + \epsilon_{jmi}\omega_m Q_i + J_0 B_{0i} \epsilon_{j1m}\lambda_{mi} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{dM_j}{dl} + \epsilon_{jmi}\omega_m M_i + \epsilon_{j1i} Q_i = 0, \tag{4}$$

$$M_j = D_j(\omega_j - \omega_{j0}), \quad j = \overline{1, 3}. \tag{5}$$

Здесь Q_j, M_j — проекции вектора внутренних усилий и вектора момента внутренних усилий; ω_j — проекции вектора кривизны осевой линии стержня на связанные оси; ω_{j0} — кривизна недеформированного стержня, которая считается неизвестной; B_{0i} — проекции вектора магнитной индукции соответственно на оси с ортами $\vec{e}_{i0}$; D_1 — жесткость стержня при кручении; D_2, D_3 — жесткости стержня при изгибе; ϵ_{imj} — символ Леви—Чивита.

Соотношения, связывающие компоненты вектора $\vec{\omega}$ с углами θ_i, имеют вид

$$\omega_i = \lambda_{ji}^{(0)} \frac{d\theta_i}{dl} + \lambda_{ji}\omega_{i0}, \tag{6}$$

а компоненты вектора перемещения $\vec{u}$ с этими же углами —

$$\frac{du_j}{dl} + \epsilon_{jmi}\omega_m u_i + \lambda_{j1} - \delta_{j1} = 0. \tag{7}$$

Здесь

$$\lambda_{11}^{(0)} = \lambda_{22}^{(0)} = \lambda_{33}^{(0)} = 1; \; \lambda_{12}^{(0)} = \lambda_{23}^{(0)} = \lambda_{32}^{(0)} = 0; \; \lambda_{31}^{(0)} = -\lambda_{13}^{(0)} = \theta_2; \; \lambda_{21}^{(0)} = -\theta_3.$$

Уравнения (3) — (7) представляют собой полную замкнутую систему относительно неизвестных векторов $\vec{Q}$, $\vec{M}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\theta}$, $\vec{u}$. При малых отклонениях стержня (при малых углах θ_i) после линеаризации этих уравнений получим систему линейных уравнений устойчивости, описывающих пространственное выпучивание токонесущего стержня под действием следящей силы Ампера.

2. Рассмотрим задачу устойчивости токонесущего кольца во внешнем магнитном поле. Вектор индукции внешнего магнитного поля имеет составляющие как по направлению, параллельному центральной оси недеформированного стержня, так и по направлению, перпендикулярному к плоскости оси недеформированного стержня. Пусть ось стержня в недеформированном состоянии является окружностью радиуса R. Ось η_2 направим к центру кольца. Вектор индукции внешнего поля имеет

вид $\vec{B}_0 = B_{01}\vec{e}_{10} - B_{03}\vec{e}_{30}$. Для вектора кривизны недеформированного стержня имеем $\omega_{10} = \omega_{20} = 0$, $\omega_{30} = 1/R$.

Сила Ампера в проекциях на связанные оси при малых углах поворота имеет вид

$$F_1 = 0,\ F_2 = -J_0(B_{01}\theta_2 - B_{03}),\ \ F_3 = -J_0(B_{01}\theta_3 + B_{03}\theta_1). \tag{8}$$

В начальном недеформированном состоянии $\vec{e}_i = \vec{e}_{i0}$ и имеется только отличное от нуля осевое сжимающее усилие $Q_{10} = -RB_{03}$. Отметим, что изменение направления поперечной составляющей вектора индукции (или тока) на противоположное приводит к растягивающему усилию. Линеаризуя (3) — (6) при малых углах поворота, после исключения моментов, усилий и компонент вектора кривизны получим следующую линейную систему уравнений устойчивости:

$$\begin{gathered} D_3\left(\theta_3^{IV} + \theta_3''\right) + J_0R^3\left(B_{03}\theta_3'' + B_{01}\theta_2'\right) = 0, \\ (D_1 + D_2)\,\theta_2' + D_2\theta_1 - D_1\theta_1'' = 0, \\ (D_1 + D_2)\,\theta_1'' + D_2\theta_2''' - D_1\theta_2' + J_0R^3\left(B_{03}\theta_2' - B_{01}\theta_3\right) = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по центральному углу α ($l = R\alpha$).

Приведем решение системы (9) для двух частных случаев.

Пусть $B_{01} \neq 0$, $B_{03} = 0$. Тогда начальное сжимающее усилие равно нулю. Кольцо теряет устойчивость под действием возмущенной силы Ампера.

Представим решения системы (9) для замкнутого кольца в виде $\theta_j = d_j \sin n\alpha$, где n — число полуволн; d_j — постоянные. Тогда для критической силы $(J_0B_{01})_*$ получим соотношение

$$(J_0B_{01})_* = \frac{n(n^2-1)}{R^3}\sqrt{\frac{(n^2-1)\,D_1D_2D_3}{D_2 + n^2D_1}} = \frac{6}{R^3}\sqrt{\frac{3D_1D_2D_3}{4D_1 + D_2}}\ \ (n = 2). \tag{10}$$

Из системы (9) при $B_{03} = 0$ можно получить соответствующие уравнения и для стержня с прямой осью. Переходя от координаты α к координате $x = R\alpha$ и затем устремляя $R \to \infty$, получим

$$D_3\frac{d^4\theta_3}{dx^4} + J_0B_{01}\frac{d\theta_2}{dx} = 0,\ \ D_2\frac{d^3\theta_2}{dx^3} - J_0B_{01}\theta_3 = 0.$$

Отметим, что для прямого стержня пространственное выпучивание не сопровождается кручением оси.

Рассмотрим теперь случай $B_{01} = 0$, $B_{03} \neq 0$. Как видно из рассмотрения системы (9) при $B_{01} = 0$, первое уравнение отделяется от двух остальных и соответствует плоской деформации кольца (ось стержня остается плоской кривой). Два остальных уравнения соответствуют пространственной деформации, когда ось стержня становится кривой двоякой кривизны.

Подставляя в (9) $\theta_j = d_j \sin n\alpha$, получим в случае плоской деформации следующее значение критической силы Ампера:

$$(J_0B_{03})_* = \frac{D_3\left(n^2-1\right)}{R^3} = \frac{3D_3}{R^3}\ \ (n = 2), \tag{11}$$

совпадающее с известным соотношением для задачи устойчивости кольца, находящегося под действием радиальной следящей нагрузки [6].

Для пространственной деформации кольца имеем соотношение

$$(J_0B_{03})_* = \frac{D_1D_2\left(n^2-1\right)^2}{R^3\left(D_2 + n^2D_1\right)} = \frac{9D_1D_2}{R^3\left(4D_1 + D_2\right)}\ \ (n = 2). \tag{12}$$

аналогичное соотношению для задачи устойчивости плоской формы изгиба кольца, нагруженного радиальной «мертвой» нагрузкой [6].

Таким образом, рассматриваемая нами электромагнитная нагрузка ведет себя как следящая нагрузка в случае плоской деформации, а в случае пространственной деформации — как нагрузка неизменного направления.

Сравнивая формулы (10) и (12), видим, что для стержня с круговым поперечным сечением при одинаковых значениях силы тока отношение критических значений индукции поперечного и продольного магнитных полей, при которых имеет место пространственная потеря устойчивости, запишется в виде

$$\frac{(B_{03})_*}{(B_{01})_*} = \sqrt{\frac{3}{4(5+\nu)}} \approx 0{,}376 \text{ при } \nu = 0{,}3,$$

где ν — коэффициент Пуассона.

В частности, для медного стержня кругового поперечного сечения ($r = 0{,}1$ см; $R = 20$ см; $E = 1{,}2\cdot 10^{11}$ Па) при силе тока 20А (плотность тока $6{,}3\cdot 10^6$ А/м^2) критические значения индукции внешнего магнитного поля, при которых имеет место пространственная потеря устойчивости, равны $(B_{01})_* = 2{,}65$ Тл, $(B_{03})_* = 0{,}98$ Тл.

3. Рассмотрим теперь задачу устойчивости плоской формы изгиба прямого стержня прямоугольного сечения вытянутой формы. Примем, что жесткость на изгиб в плоскости (x_1, x_2) намного больше жесткости на изгиб в плоскости (x_1, x_3), т. е. $D_3 \gg D_2$. В недеформированном состоянии стержня ось x_1 совпадает с осью стержня. Внешнее магнитное поле направлено вдоль оси x_3, т. е. $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_{30}$. В начальном недеформированном состоянии на стержень действует пондеромоторная сила Ампера $\vec{F}_0 = -J_0B_0\vec{e}_{20}$, которая определяет основной изгиб в плоскости (x_1, x_2). Задача состоит в определении критической силы Ампера, при которой стержень отгибается из плоскости (x_1, x_2), испытывая одновременно кручение.

В проекциях на связанные оси вектор силы Ампера имеет вид

$$F_1 = 0, \quad F_2 = -J_0B_0\lambda_{33}, \quad F_3 = J_0B_0\lambda_{23}. \tag{13}$$

Нелинейные уравнения (3), (4) после исключения с помощью (5) моментов M_j примут вид

$$\frac{dQ_1}{dl} + \omega_2 Q_3 = \omega_3 Q_2, \quad D_1\frac{d\omega_1}{dl} + \omega_2\omega_3(D_3 - D_2) = 0,$$

$$\frac{dQ_2}{dl} + \omega_3 Q_1 - \omega_1 Q_3 = J_0B_0\lambda_{33}, \quad D_2\frac{d\omega_2}{dl} + \omega_1\omega_3(D_1 - D_3) = 0,$$

$$\frac{dQ_3}{dl} + \omega_1 Q_2 - \omega_2 Q_1 = -J_0B_0\lambda_{23}, \quad D_3\frac{d\omega_3}{dl} + \omega_1\omega_2(D_2 - D_1) = 0. \tag{14}$$

Учитывая, что $D_3 \gg D_2$, $D_3 \gg D_1$, и произведя линеаризацию в предположении малости углов поворота, получим

$$D_1\frac{d\omega_1}{dx_1} = -D_3\omega_3^{(0)}\omega_2, \; D_2\frac{d\omega_2}{dx_1} - D_3\omega_3^{(0)}\omega_1 = Q_3, \; \frac{dQ_3}{dx_1} + \omega_1 Q_{20} = -J_0B_0\theta_1, \tag{15}$$

$$D_3\frac{d\omega_3^{(0)}}{dx_1} = -Q_{20}, \; \frac{dQ_{20}}{dx_1} = J_0B_0, \; D_3\omega_3^{(0)} = M_{30} \quad (l \approx x_1). \tag{16}$$

Уравнения (16) определяют основной изгиб в плоскости (x_1, x_3) и являются уравнениями начального моментного состояния. Уравнения (15) являются уравнениями устойчивости возмущенного состояния.

Согласно (6), (7) при малых углах поворота без учета начальных деформаций имеем

$$\omega_1 = \frac{d\theta_1}{dx_1}, \quad \omega_2 = -\frac{d^2u_3}{dx_1^2}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (15), после исключения Q_3 получим

$$D_2 \frac{d^4 u_3}{dx_1^4} + \frac{d^2}{dx_1^2}(M_{03}\theta_1) = 0, \quad D_1 \frac{d^2\theta_1}{dx_1^2} = M_{03}\frac{d^2 u_3}{dx_1^2}. \tag{18}$$

Уравнения (18) вместе с уравнениями начального состояния (16), определяющими момент $M_{03}(x_1)$, совпадают с известными уравнениями устойчивости плоской формы изгиба стержня с прямоугольным поперечным сечением при действии поперечной нагрузки неизменного направления. Таким образом, имеем, что в случае действия механической нагрузки неизменного направления и в случае следящей электромагнитной нагрузки рассматриваемого типа линейные уравнения устойчивости плоской формы изгиба являются идентичными. Уравнения устойчивости плоской формы изгиба в случае действия более общей следящей нагрузки приведены в работе [1].

Решение системы (18) приведем для случая консольного стержня [2]. Соотношение, определяющее критическое значение силы Ампера, для стержня с узким прямоугольным сечением имеет вид

$$(J_0 B_0)_* = \frac{1{,}51 b h^3 E}{L^3 \sqrt{1+\nu}} \quad (b \gg h),$$

где b — высота; h — ширина прямоугольного сечения; L — длина стержня.

В частности, для медного стержня с параметрами $b = 2$ см, $h = 0{,}2$ см, $E = 1{,}2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0{,}3$, $L = 60$ см при силе тока 60А (плотность тока $1{,}5 \cdot 10^6$ А/м^2) плоская форма изгиба токонесущего стержня является неустойчивой при значении индукции магнитного поля $B_0 \approx 1{,}96$ Т.

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.—М.: Физматгиз, 1961.—339 с.
2. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем.—М.: Наука, 1967.—984 с.
3. *Леонтович М. А., Шафранов В. Д.* Об устойчивости гибкого провода в магнитном поле.—Физика плазмы и пробл. управляемых термоядерных реакций, 1958, вып. 1, с. 172—179.
4. *Прудников В. В.* Магнитоупругие волны в токопроводящем стержне, находящемся в цилиндрической трубе. — Механика твердого тела, 1972, № 5, с. 123—129.
5. *Светлицкий В. А.* Механика гибких стержней и нитей.—М.: Машиностроение, 1978.—222 с.
6. *Тимошенко С. П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек.—М.: Наука, 1971.—808 с.
7. *Chattopdhyay S., Moon F.* Magnetoelastic buckling and vibration of a rod carrying electrik current.—J. Appl. Mech., 1975, 42, N 4, p. 809—814.
8. *Love A.* A treatise on the mathematical theory of elasticity.—New Jork: Dover, 1944.—643 p.

Ин-т механики АН АрмССР,
Ереван

Получено 01.02.84.

УДК 539.377

Ю. А. Чернуха, В. И. Косарчин

ЛОКАЛЬНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЙ ПЛАСТИНЕ С КРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Задача о термонапряженном состоянии пластины с круговым включением рассматривалась в различных постановках [1, 3—5] и имеет важное техническое приложение [6]. Однако известные в литературе ее решения получены с использованием теорий пластин, которые не позволяют достаточно полно описать эффекты, связанные с трехмерным характером напряженного состояния в приконтактных зонах. Как следует из приводимого ниже решения, полученного на основании уточненного варианта теории пластин, указанные эффекты могут быть весьма существенными