

Г. Е. Багдасарян, П. А. Мкртчян

**МАГНИТОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ  
СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,  
БЕСКОНТАКТНО УДЕРЖИВАЕМОЙ НЕОДНОРОДНЫМ  
МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ**

Пусть изотропная замкнутая сферическая оболочка постоянной толщины  $2h$  и радиуса срединной поверхности  $R$  находится в стационарном неоднородном магнитном поле  $\vec{H}_0$ . Считается, что оболочка изготовлена из упругого изотропного материала и покрыта слоем сверхпроводящего сплава. Упругие свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и плотностью  $\rho$ . Электромагнитные свойства среды, окружающей оболочку, эквивалентны свойствам вакуума.

Ортогональная система координат  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  выбирается так, что срединная поверхность оболочки отнесена к сферическим координатам  $\alpha_1, \alpha_2$  ( $\alpha_1$  — полярный угол,  $\alpha_2$  — азимутальный), а  $\alpha_3$  направлена по нормали к срединной поверхности.

Известно, что при помещении сверхпроводящего тела в магнитное поле в его тонком поверхностном слое появляются экранирующие токи, препятствующие проникновению магнитного поля внутрь тела. Выталкивание магнитного поля приводит к изменению напряженности магнитного поля в области вне тела. Это изменение является результатом наложения на начальное поле  $\vec{H}_0$  магнитного поля  $\vec{H}^0$ , создаваемого экранирующими токами. Поэтому невозмущенное магнитное поле  $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}^0$  определяется из решения следующей задачи магнитостатики во внешней области [6]:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \vec{n}_0 \vec{H}|_S = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{H}^0 = 0, \quad (1)$$

где  $\vec{n}_0$  — единичный вектор внешней нормали к недеформированной поверхности  $S$  тела;  $\vec{r}$  — радиус-вектор рассматриваемой точки.

Вследствие того что магнитное поле не проникает в область, занимаемую оболочкой, на поверхности оболочки компоненты тензора напряжений Максвелла претерпевают разрыв. Этим разрывом обусловлено появление магнитного давления  $\vec{P}_0$ , определяемого формулой [6]

$$\vec{P}_0 = -\frac{1}{8\pi} H^2 \vec{n}_0. \quad (2)$$

Под действием нагрузки  $\vec{P}_0$  в оболочке устанавливается невозмущенное состояние, характеризующееся вектором перемещения  $\vec{u}_0$  и тензором упругих напряжений  $\hat{\sigma}_0$ . Исходное состояние оболочки, как обычно, определяется из линейных уравнений теории упругости при поверхностных условиях, написанных без учета деформации поверхности, ограничивающей оболочку. Тогда характеристики невозмущенного состояния будут определяться из следующих уравнений равновесия и граничных условий на поверхности оболочки.

$$\operatorname{div} \hat{\sigma}_0 = 0, \quad (3)$$

$$\vec{n}_0 \cdot \hat{\sigma}_0 = \begin{cases} \vec{P}_0 & \text{при } \alpha_3 = h, \\ 0 & \text{при } \alpha_3 = -h. \end{cases} \quad (4)$$

Характеристики возмущенного состояния  $(\vec{u}_0 + \vec{u}, \hat{\sigma}_0 + \hat{\sigma}, \vec{P}_0 + \vec{P}, \vec{H}_0 + \vec{h})$  должны удовлетворять нелинейным уравнениям и краевым ус-

ловиям на деформированной поверхности оболочки. Принимая возмущения малыми, эти уравнения и граничные условия, аналогично работам [1, 4, 8], линеаризуются. В результате получаются следующие линейные уравнения возмущенного состояния [2]: в области, занимаемой оболочкой,

$$\operatorname{div} [\hat{\sigma} + \hat{\sigma}_0 (\nabla \vec{u})^*] = 0, \quad (5)$$

в области  $\alpha_3 > h$ , вне тела оболочки,

$$\operatorname{rot} \vec{h} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0. \quad (6)$$

Решения уравнений (5) и (6) связаны следующими линеаризованными условиями на поверхностях  $\alpha_3 = \pm h$  оболочки:

$$\hat{\sigma} \cdot \vec{n}_0 = \begin{cases} \vec{P} & \text{при } \alpha_3 = h, \\ 0 & \text{при } \alpha_3 = -h, \end{cases} \quad (7)$$

$$\vec{n}_0 \cdot [\vec{h} + \vec{H} (\nabla \vec{u})^* + \vec{u} (\nabla \vec{H})] = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$\hat{\sigma} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{2\nu \hat{E}}{1-2\nu} \operatorname{div} \vec{u} + \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^* \right]; \quad (9)$$

$$\vec{P} = \vec{n}_0 \cdot \hat{T}; \quad T_{ik} = \frac{1}{4\pi} (H_k h_i + H_i h_k - \delta_{ik} \vec{h} \cdot \vec{H}); \quad (10)$$

где  $\hat{E}$  — единичный тензор;  $\nabla$  — набла-оператор Гамильтона;  $(\nabla \vec{u})^*$  — транспонированный тензор  $\nabla \vec{u}$ ;  $\hat{T}$  — тензор напряжения Максвелла возмущенного состояния.

Пусть для рассматриваемой оболочки справедлива гипотеза Кирхгофа — Лява, согласно которой поверхностное условие (8) принимает вид

$$h_3^+ = \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 H_1^+ w) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 H_2^+ w) \right], \quad (11)$$

где индексом  $+$  здесь и далее отмечены значения соответствующих величин на поверхности оболочки  $\alpha_3 = h$ ;  $A_1 = R$ ;  $A_2 = R \sin \alpha_1$ ;  $w$  — прогиб оболочки.

Индукированное магнитное поле  $\vec{h}$  в области  $\alpha_3 > h$  определяем, решая уравнения (6) при условии (11) и условии затухания возмущений на бесконечности. Эту задачу введением потенциальной функции  $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$  посредством

$$\vec{h} = \operatorname{grad} \Phi \quad (12)$$

приводим к решению следующей внешней задачи Неймана в области  $\alpha_3 > h$  для функции  $\Phi$ :

$$\Delta_1 \Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_3} \right|_{\alpha_3=h} = h_3^+(\alpha_1, \alpha_2), \quad (13)$$

где  $\Delta_1$  — трехмерный оператор Лапласа. Решение задачи Неймана (13) определяется формулой Бьеркнеса [5].

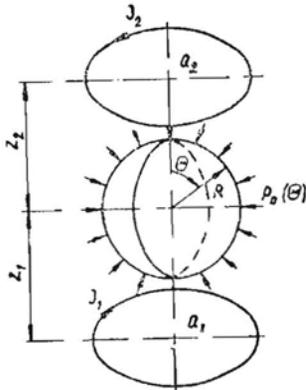
Принимая гипотезу Кирхгофа — Лява и поступая аналогичным образом, как в классической теории оболочек, в силу (13) получим замкнутую двумерную систему разрешающих интегро-дифференциальных уравнений устойчивости относительно перемещений точек срединной поверхности оболочки. Ее решения должны удовлетворять условиям непрерывности и однозначности на сфере.

На основе полученной системы рассмотрим задачу устойчивости сферической оболочки в неоднородном магнитном поле  $\vec{H}$ , создаваемом двумя параллельными кольцевыми постоянными токами (рисунок). Такая система токов может фиксировать оболочку в пространстве бесконтактно [3].

Невозмущенное магнитное поле системы сверхпроводящая оболочка—виток найдется методом изображений [6, 7]. В итоге на поверхности сферы  $a_3 = h$  для компонент результирующего невозмущенного магнитного поля с точностью  $z_i^2 + a_i^2 \gg R^2$  получаются выражения

$$H_2^+ = 0, \quad H_3^+ = 0, \\ H_1^+ = -\frac{3\pi}{c} \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{y_i a_i^2}{(a_i^2 + z_i^2)^{3/2}} + \left( \sum_{i=1}^2 \frac{5R y_i z_i a_i^2}{(a_i^2 + z_i^2)^{3/2}} \right) \cos \theta \right] \sin \theta. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (10), определяем неравномерно распределенные поверхностные силы, действующие на оболочку в невозмущенном состоянии. Проекция главного вектора этих сил на вертикальную ось должна уравниваться силой тяжести оболочки  $Q = 8\pi R^2 \gamma h$ , где  $\gamma$  — удельный вес материала оболочки. Следовательно, условие бесконтактного удержания оболочки кольцевыми токами можно представить в виде



$$\left[ 1 + \frac{y_2 a_2^2}{y_1 a_1^2} \left( \frac{a_1^2 + z_1^2}{a_2^2 + z_2^2} \right)^{3/2} \right] \left[ 1 + \frac{y_2 z_2 a_2^2}{y_1 z_1 a_1^2} \left( \frac{a_1^2 + z_1^2}{a_2^2 + z_2^2} \right)^{5/2} \right] = \\ = \frac{4\gamma h c^2}{3\pi R y_1^2 z_1} \left( \frac{a_1^2 + z_1^2}{a_1} \right)^4. \quad (15)$$

В исходную систему (5) входят неизвестные напряжения невозмущенного состояния. Их определяем, решая задачу (3)—(4). На основе (14) и решений граничных задач (13) и (3)—(4) рассматриваемая задача устойчивости сводится к исследованию следующего интегро-дифференциального уравнения относительно перемещения  $w$ :

$$[\partial^2 (\Delta + 1)^2 + 1] (\Delta + 2) w + \frac{3q_0 R}{2Eh} (\Delta + 1 - \nu) \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{32\beta}{3A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) \frac{A_2^2}{A_1^2} - \frac{8\beta}{9A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right] \Delta w - \frac{2A_2^2}{3A_1^2} \left( 1 + \frac{12\beta}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{8A_2}{3A_1} \left( 1 + \frac{5\beta}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial F}{\partial x_1} \right\} + \frac{4q_0 R}{Eh} \left( \frac{h^2}{3R^2} \Delta - 1 - \nu \right) \left\{ \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{10\beta}{A_1} \left( 1 - \frac{13A_2^2}{10A_1^2} \right) \right] \frac{5A_2}{A_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{A_2^2}{A_1^2} \left( 1 + \frac{10\beta}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 4 \left[ 1 - \frac{3A_2^2}{2A_1^2} + \frac{10\beta}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \left( 1 - \frac{5A_2^2}{2A_1^2} \right) \right] w \right\} = 0, \quad (16)$$

где приняты следующие обозначения:

$$F = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ \frac{2}{r_0} - \ln \left( 1 + \frac{2}{r_0} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1 + 5\beta \cos \xi) w(\xi, \eta) \sin^2 \xi \right] d\xi d\eta; \\ r_0^2 = 2(1 - \cos \theta_0); \quad \cos \theta_0 = \cos \xi \cos \alpha_1 + \sin \xi \sin \alpha_1 \cos(\eta - \alpha_2); \\ q_0 = \frac{9\pi y_1^2 a_1^4}{32c^2 (a_1^2 + z_1^2)^3} \left[ 1 + \frac{y_2 a_2^2}{y_1 a_1^2} \left( \frac{a_1^2 + z_1^2}{a_2^2 + z_2^2} \right)^{3/2} \right]^2; \\ \beta = \frac{z_1 R}{a_1^2 + z_1^2} \left[ 1 + \frac{y_2 z_2 a_2^2}{y_1 z_1 a_1^2} \left( \frac{a_1^2 + z_1^2}{a_2^2 + z_2^2} \right)^{5/2} \right] \left[ 1 + \frac{y_2 a_2^2}{y_1 a_1^2} \left( \frac{a_1^2 + z_1^2}{a_2^2 + z_2^2} \right)^{3/2} \right]^{-1};$$

$$\delta = \frac{h^2}{3R^2(1-\nu^2)}; \Delta = \frac{R^2}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right]. \quad (17)$$

Решение уравнения (16) представим в виде разложения

$$w = \left( \sum_{n=i}^{\infty} w_n P_{nk}(\cos \alpha_1) \right) \cos k\alpha_2 \quad (k \leq n, i = 1, 2 \dots), \quad (18)$$

где  $w_n$  — неизвестные коэффициенты;  $P_{nk}(x)$  — присоединенные функции Лежандра.

Подставляя (18) в уравнение (16) и используя обычный процесс ортогонализации, получим регулярную бесконечную систему однородных алгебраических уравнений относительно  $w_n$ . Из условия существования нетривиального решения этой системы и из условия (15) бесконтактного удержания оболочки в первом приближении получается следующая система алгебраических уравнений относительно критических значений  $y_1^*$ ,  $y_2^*$  кольцевых токов:

$$\begin{aligned} a_1^2 (a_2^2 + z_2^2)^{3/2} y_1^* + a_2^2 (a_1^2 + z_1^2)^{3/2} y_2^* &= \frac{4c}{3} \sqrt{\frac{2Eh}{\pi}} [(a_1^2 + z_1^2) (a_2^2 + z_2^2)]^{3/2} B_{ik}, \\ z_1 a_1^2 (a_2^2 + z_2^2)^{5/2} y_1^* + z_2 a_2^2 (a_1^2 + z_1^2)^{5/2} y_2^* &= \frac{\gamma c}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{h}{ER}} \frac{[(a_1^2 + z_1^2) (a_2^2 + z_2^2)]^{5/2}}{B_{ik}}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} B_{ik}^2 &= \frac{(\lambda_i - 2) [1 + \delta^2 (\lambda_i - 1)^2]}{(\lambda_i - 1 + \nu) A_{ki}}; \quad A_{ki} = \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left\{ \frac{1}{i(2i+1)} [2i^6 - \right. \\ &- 11i^5 - 20i^4 - 7i^3 - 8i^2 + 8i + k^2(10i^4 + 31i^3 + i^2 - 30i + 12)] + \\ &\left. + \frac{4(1+\nu)}{\lambda_i - 1 + \nu} [2i^4 + 4i^3 - 2i - k^2(2i^2 + 2i - 3)] \right\}; \quad \lambda_i = i(i+1). \end{aligned} \quad (20)$$

Из (19), в частном случае, когда  $a_1 = a_2 = a$ ,  $z_1 = |z_2| = z$ , для критических значений получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{y_1^*}{c} &= \frac{2B_{ik}}{3a^2} \sqrt{\frac{2Eh}{\pi R}} \left[ (a^2 + z^2)^{3/2} + \frac{3\gamma (a^2 + z^2)^{5/2}}{8EzB_{ik}^2} \right], \\ \frac{y_2^*}{c} &= \frac{2B_{ik}}{3a^2} \sqrt{\frac{2Eh}{\pi R}} \left[ (a^2 + z^2)^{3/2} - \frac{3\gamma (a^2 + z^2)^{5/2}}{8EzB_{ik}^2} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Минимум функции  $y_1^*(i, k)$ , как видно из (21), достигается при

$$B_{ik}^2 = \frac{3\gamma (a^2 + z^2)}{8Ez} \geq \min_{(i,k)} B_{ik}^2 = b^2 \quad (22)$$

и составляет

$$\min \frac{y_1^*}{c} = \frac{4(a^2 + z^2)^2}{3a^2 \sqrt{z}} \sqrt{\frac{3\gamma h}{4\pi R}}. \quad (23)$$

Легко заметить, что при условии (22) имеет место  $y_2^* = 0$  и  $z^2 \ll a^2$ . В силу этого из (22) и (23) окончательно имеем

$$\min \frac{y_1^*}{c} = \frac{4ab}{3} \sqrt{\frac{2Eh}{\pi R}}, \quad \min y_2^* = 0, \quad (24)$$

где величина  $b$  согласно (22) является минимальным значением функции  $B_{ik}$  по волновым числам  $i$  и  $k$ .

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. — М.: Наука, 1977. — 272 с.
2. Багдасарян Г. Е., Мкртчян П. Я. Устойчивость сверхпроводящей цилиндрической оболочки в магнитном поле. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1981, 34, № 6, с. 36—47.

3. Белоозеров В. Н. Удержание сверхпроводящего шара системой круговых токов.— Журн. техн. физики, 1966, 36, вып. 5, с. 852—859.
4. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.— М.: Физматгиз, 1961.—339 с.
5. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики.— М.: Высш. шк., 1970.—712 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1957.—532 с.
7. Левин М. Л. О решении одной задачи квазистационарной электродинамики методом изображений.— Журн. техн. физики, 1964, 34, вып. 3, с. 393—398.
8. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1948.—212 с.

Ин-т механики АН АрмССР,  
Ереван

Получено 17.04.83

УДК 539.3

К. Б. Казарян

### О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ВЫПУЧИВАНИИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ ТОКОПРОВОДОВ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Задачи устойчивости токонесущих стержней рассматривались многими исследователями. В работе [3] впервые была установлена возможность потери упругой устойчивости стержня с током, обусловленная взаимодействием тока с собственным магнитным полем. Обзор работ по устойчивости токонесущих стержней приведен в [7]. Вопросу влияния внешнего магнитного поля на распространение упругих волн в стержне с поверхностным током посвящена работа [4].

В настоящей статье исследуется пространственная потеря устойчивости упругих стержней с током во внешнем магнитном поле неизменного направления. При этом исходим из общих нелинейных уравнений статики пространственно-криволинейных стержней с учетом следящих сил электромагнитного происхождения, обусловленных взаимодействием тока с внешним магнитным полем. Рассмотрим конкретные задачи устойчивости круглого кольца, а также плоской формы изгиба прямого стержня при определенных направлениях вектора индукции внешнего магнитного поля.

1. Рассмотрим тонкий упругий электропроводный неферромагнитный стержень, по которому течет постоянный электрический ток силы  $J_0$ , находящийся во внешнем однородном магнитном поле с вектором индукции  $\vec{B}_0$  неизменного направления. Ток в стержне считается не сильным, что позволяет не учитывать собственное магнитное поле, индуцированное электромагнитное поле, а также возможные температурные эффекты, обусловленные джоулевым теплом.

Вследствие взаимодействия тока с внешним магнитным полем на стержень действует поперечная сила Ампера  $\vec{F} = \vec{J}_0 \times \vec{B}_0$ , которая в конечном итоге может привести к потере упругой устойчивости стержня.

Для описания деформации стержня введем подвижную систему координат  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  с ортами  $\vec{e}_m$ , жестко связанную с поперечными сечениями стержня. Начало координат поместим в центре тяжести площади поперечного сечения стержня, ось  $\eta_1$  направим вдоль касательной к осевой линии стержня, оси  $\eta_2, \eta_3$  — по главным центральным осям инерции [5, 8]. Все величины, меняющиеся вдоль осевой линии стержня, представим в виде функции от длины дуги  $l$  осевой линии.

Пусть  $\vec{e}_{m0}$  — орты подвижной системы недеформированного состояния стержня, связанные с ортами  $\vec{e}_m$  соотношениями

$$\vec{e}_m = \lambda_{mj} \vec{e}_{j0}, \quad \vec{e}_{m0} = \lambda_{jm} \vec{e}_m \quad (m, j = \overline{1, 3}), \quad (1)$$