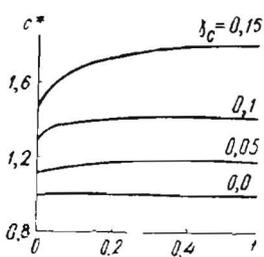


На основе этой системы конечно-разностных уравнений построена схема численного расчета, по которой вычисления организованы таким образом, что алгоритм представляет собой явную схему метода конечных разностей, т. е. расчет концентрации ведется по рекуррентным соотношениям, что значительно облегчает программирование. Напряжения определяются путем численного интегрирования.

Данный алгоритм реализован в виде комплекса фортран-подпрограмм для ЭВМ М-4030. На основе комплекса был произведен расчет концентрационного поля и напряженного состояния при диффузионном насыщении сплошного шара при следующих условиях: на химический потенциал ставилось граничное условие первого рода и принималось, что поверхность шара свободна от напряжений. На рисунке показано изменение безразмерной концентрации $c^* = c/(c_0/d_c)$ на границе тела во времени $t = Ld_c\tau/r_2^2$ при следующих значениях параметров: $\nu = 1/3$, $\gamma_c = -\beta d_e/d_c = 0; 0,05; 0,1; 0,15$. Видно, что учет взаимосвязи процессов диффузии и деформации приводит к качественному изменению процесса



диффузионного насыщения: если при $\gamma_c = 0$ (несвязанная задача — учитывается только влияние диффузии на деформацию) концентрация постоянна во времени, то при $\gamma_c \neq 0$ концентрация c^* с течением времени монотонно возрастает, приближаясь к значению в установившемся режиме — максимальной растворимости диффундирующего компонента при данных условиях, причем начальное значение c^* на границе равно

$$1 / \left(1 - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \gamma_c \right).$$

1. Подстриган Я. С., Швец Р. Н., Павлина В. С. Квазистатическая задача термомодиффузии для деформируемых твердых тел.— Прикл. механика, 1971, 7, № 12, с. 6—11.
2. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1971.—552 с.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 24.01.84

УДК 537.72 : 620.198

Б. И. Сенчина

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ ДИФфуЗИОННЫХ ПОКРЫТИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ДРУГОЙ ФАЗЫ

При твердофазной химической реакции [1] возможна перестройка кристаллической решетки фазы, состав которой путем предварительной однофазной диффузии меняется до предела стойкости твердого раствора. Если в однофазном твердом растворе имеет место полиморфное преобразование, то увеличение концентрации вещества, способствующего фазовому переходу, в приграничной зоне выше определенного значения приведет к полиморфному фазовому превращению в этой зоне, которая будет фазовоотличимой от области, где концентрация диффундирующего компонента еще не достигла граничного значения.

После фазовых превращений первого рода в области новой фазы, отличающейся от исходной удельным объемом, могут появляться большие градиенты химического потенциала, существенно влияющие на диффузионные процессы в окрестности этой области. В случае диффузионных покрытий фазовые превращения в приповерхностном слое могут существенно влиять на стабильность покрытий (диффузионное рассасывание «защитных» компонентов).

С целью аналитического описания таких процессов запишем исходные соотношения для исследования диффузионного насыщения во вза-

взаимосвязи процессов теплопроводности, диффузии и деформации при наличии областей новой фазы.

Рассмотрим твердый континуум, состояние которого характеризуется следующими величинами: температурой T и энтропией S , тензором напряжений $\hat{\sigma}$ и тензором деформации \hat{e} , концентрацией диффундирующего вещества C и его химическим потенциалом Φ , изменением удельного объема δ и удельной работой при фазовом превращении A . Основное термодинамическое соотношение для такой системы представим в виде

$$du = Tds + \sigma_{ij}de_{ij} + \varphi dc + Ad\delta. \quad (1)$$

Следуя [3], запишем выражение для внутренней энергии:

$$u(e_{ij}, s, c, \delta) = \frac{T_s^2}{2C^{\alpha,c}} + \frac{1}{2}d_c c^2 + \frac{1}{2}\left(K - \frac{2}{3}G\right)e_{ii}^2 + Ge_{ij}^2 + d_s cs - K(\beta_s s + \beta_c c + \delta)e_{ii} + d_{s,\delta} s\delta + d_{\delta c} c\delta + d_A \delta^2. \quad (2)$$

Здесь $u(e_{ij}, s, c, \delta)$ — изменение внутренней энергии при отклонении состояния системы от равновесного; s, φ, c — приращения энтропии, химического потенциала и концентрации по отношению к значениям этих величин в равновесном состоянии; G — модуль сдвига; β_s и β_c — коэффициенты объемного расширения материала при изменении энтропии и концентрации; K — модуль объемного сжатия;

$$d_c = \frac{\partial \varphi}{\partial c} \Big|_{s,e,\delta}; \quad d_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \Big|_{c,e,\delta}; \quad d_\delta = \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} \Big|_{s,c,e}; \quad d_{s,\delta} = \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_{e,\delta,c}; \quad d_A = \frac{\partial A}{\partial \delta} \Big|_{e,s,c}.$$

Из (2), (1) находим выражения для компонентов тензора напряжений и приращения химического потенциала:

$$\sigma_{ij} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)e_{ij}\delta_{ij} + 2Ge_{ij} - K(\beta_s s + \beta_c c + \delta)\delta_{ij}, \quad (3)$$

$$\varphi = d_c c + d_s s + d_\delta \delta - K\beta_c e_{ii}. \quad (4)$$

Уравнение равновесия в этом случае без учета объемных сил можно записать следующим образом:

$$G\Delta \bar{u} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\text{grad div } \bar{u} - K(\beta_s \text{grad } s + \beta_c \text{grad } c + \text{grad } \delta) = 0. \quad (5)$$

Для примера рассмотрим полупространство с диффузионным слоем новой фазы. Пусть полупространство и слой имеют отличные $G^{(i)}$ — модули сдвига, $\nu^{(i)}$ — коэффициенты Пуассона, $\beta^{(i)}$ — концентрационные коэффициенты объемного расширения, $D_c^{(i)}, D_e^{(i)}$ — коэффициенты диффузии, $d_c^{(i)}, d_e^{(i)}$ — коэффициенты, которые характеризуют изменение химического потенциала при изменении концентрации и деформации (слой $i=1$, полупространство $i=2$). Процессы диффузии и деформации в их взаимосвязи в изотермическом случае описываем системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c^{(i)}}{\partial \tau} &= D_c^{(i)} \Delta c^{(i)} + D_e^{(i)} \text{div } \Delta \bar{u}^{(i)}, \\ \Delta \bar{u}^{(i)} + \frac{1}{1-2\nu^{(i)}} \text{grad div } \bar{u}^{(i)} - \frac{2}{3} \frac{1+\nu^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}} \times \\ &\times [\beta^{(i)} \text{grad } c^{(i)} + \text{grad } \delta^{(i)}] = 0, \quad \delta^{(1)} = \delta, \quad \delta^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В системе взаимосвязанных уравнений (6) влияние температуры на диффузию может учитываться известным соотношением Арениуса.

В случае, когда изменение удельного объема в слое можно считать постоянным, уравнение диффузии из системы (6) путем исключения из второго уравнения $\text{div } \Delta \bar{u}^{(i)}$ можно привести к виду

$$\frac{\partial c^{(i)}}{\partial \tau} = D_{(i)} \frac{\partial^2 c^{(i)}}{\partial x^2},$$

где

$$D^{(i)} = D_c^{(i)} + \frac{1 + \nu^{(i)}}{3(1 - \nu^{(i)})} \beta^{(i)} D_e^{(i)}. \quad (7)$$

Распределение диффундирующего вещества в слое и полупространстве описывается решением уравнений (7) при следующих краевых условиях: 1) $c^{(i)}(x, 0) = c_0^{(i)}$; 2) $c^{(2)}(x, \tau) = c_0^{(2)}$ при $x \rightarrow \infty$; 3) $\varphi_1 = \varphi_c$ при $x = 0$; 4) $\varphi_1 = \varphi_2$ при $x = x_1$; 5) $L_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = L_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$ при $x = x_1$.

Здесь принято

$$\varphi^{(i)} = d_c^{(i)} c^{(i)} + d_e^{(i)} e^{(i)} + d_\delta^{(i)} \delta^{(i)};$$

$L^{(i)}$ — кинетические коэффициенты диффузии; x_1 — координата границы подложка — слой.

Для определения напряженного состояния системы подложка — слой перемещения представим в форме Папковича — Нейбера [2]:

$$u_x^{(i)} = \psi_x^{(i)} + \frac{1}{4(1 - \nu^{(i)})} \frac{\partial}{\partial x} (\chi^{(i)} - x \psi_x^{(i)}), \quad (8)$$

где $\psi_x^{(i)}$ — гармонические функции; $\chi^{(i)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \chi^{(i)} = \frac{4(1 + \nu^{(i)})}{3} (\beta^{(i)} c^{(i)} + \delta^{(i)}). \quad (9)$$

Из условий $\sigma_{xx}^{(1)} = 0$ при $x = 0$, $\sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{xx}^{(2)}$ при $x = x_1$ получаем

$$\sigma_{yy}^{(i)} = \sigma_{zz}^{(i)} = -2G^{(i)} \frac{1 + \nu^{(i)}}{3(1 - \nu^{(i)})} (\beta^{(i)} c^{(i)} + \delta^{(i)}). \quad (10)$$

Учитывая краевые условия, находим выражения для распределения концентрации диффундирующего вещества в слое и полупространстве:

$$c^{(1)} = c_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha)^{n-1} \left\{ a_{14} \left[\operatorname{erfc} \frac{(2n-1)x_1 - x}{2\sqrt{\tau D_1}} - \operatorname{erfc} \frac{(2n-1)x_1 + x}{2\sqrt{\tau D_1}} \right] + a_{15} \left[\operatorname{erfc} \frac{2(n-1)x_1 + x}{2\sqrt{\tau D_1}} + \alpha \operatorname{erfc} \frac{2nx_1 - x}{2\sqrt{\tau D_1}} \right] \right\}, \quad (11)$$

$$c^{(2)} = c_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha)^{n-1} \left\{ a_{16} \operatorname{erfc} \left[\frac{(2n-1)x_1}{2\sqrt{\tau D_1}} + \frac{x - x_1}{2\sqrt{\tau D_2}} \right] - a_{17} \operatorname{erfc} \left[\frac{(n-1)x_1}{\sqrt{\tau D_1}} - \frac{x - x_1}{2\sqrt{\tau D_2}} \right] - a_{17} \operatorname{erfc} \left[\frac{nx_1}{\sqrt{\tau D_1}} + \frac{x - x_1}{2\sqrt{\tau D_2}} \right] \right\}. \quad (12)$$

В стационарном случае ($\tau \rightarrow \infty$) имеем

$$c^{(1)} = c_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha)^{n-1} (1 + \alpha) a_{15}, \quad (13)$$

$$c^{(2)} = c_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha)^{n-1} [a_{16} - 2a_{17}]. \quad (14)$$

Здесь введены обозначения

$$a_{11} = d_e^{(1)} \frac{1 + \nu^{(1)}}{3(1 - \nu^{(1)})} + d_\delta^{(1)}; \quad a_{12} = \frac{D_1}{L_1}; \quad a_{13} = \frac{D_2}{L_2};$$

$$a_{14} = \frac{\lambda_1 L_2}{a_{12} \sqrt{D_2} \left(\frac{L_1}{\sqrt{D_1}} + \frac{L_2}{\sqrt{D_2}} \right)}; \quad a_{15} = \frac{\lambda_2}{a_{12}}; \quad a_{16} = \frac{2\lambda_2 L_1}{a_{13} \sqrt{D_1} \left(\frac{L_1}{\sqrt{D_1}} + \frac{L_2}{\sqrt{D_2}} \right)};$$

$$a_{17} = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} a_{16}; \quad \alpha = \frac{1 - \frac{L_2}{L_1} \sqrt{\frac{D_1}{D_2}}}{1 + \frac{L_2}{L_1} \sqrt{\frac{D_1}{D_2}}};$$

$$\lambda_1 = c_0^{(2)} a_{13} - c_0^{(1)} a_{12} - a_{11} \delta; \quad \lambda_2 = \varphi_c - a_{12} c_0^{(1)} - a_{11} \delta.$$

Таким образом, получены выражения для распределения концентрации диффундирующего вещества (11)–(12) и компонентов тензора напряжений в слое и полупространстве (10).

1. Архаров В. И. Сучасні уявлення про явища дифузії речовини в твердому стані. — Фізика твердого тіла, 1972, вип. 2, с. 3–18.
2. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970.—939 с.
3. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р. Вариационная форма теории термодиффузионных процессов в деформируемом твердом теле. — Прикл. математика и механика, 1964, 33, № 4, с. 774–776.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 24.01.84.

УДК 539.3 : 538.54

А. Р. Гачкевич, Б. И. Чорный

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ И НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ПЛАСТИНЕ, НАГРЕВАЕМОЙ ЛИНЕЙНЫМ ИНДУКТОРОМ

Рассматривается электропроводная упругая пластина толщины $2h$, в области которой (область D) отсутствуют «сторонние» заряды и токи. Пластина помещена в диэлектрическую среду (области D_0^\pm) и подвергается воздействию установившегося высокочастотного электромагнитного поля, создаваемого единичным линейным проводником с током (индуктором) параллельным поверхности пластины. Ставится задача об определении электромагнитного поля, соответствующего ему джоулева тепла, температурного поля и напряжений при данной схеме индукционного нагрева.

На первом этапе решения такой комплексной задачи, т. е. при определении электромагнитного поля, исходим из уравнений электродинамики, записанных относительно амплитуд напряженностей электрического поля \vec{E}_0^\pm , \vec{E} в областях внешней среды и пластины [3]. Вводя прямоугольную декартовую систему безразмерных (отнесенных к h) координат $\{x_1, x_2, z\}$ таким образом, чтобы ось x_1 совпала с направлением тока в проводнике, а плоскость $z = 0$ — со срединной плоскостью пластины, амплитуду плотности тока в индукторе представим в виде

$$\vec{j}_0^+ = j_0 \delta(x_2) \delta(z - z_0 - 1) \vec{i}_1, \quad (1)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; z_0 — расстояние от проводника до нагреваемой поверхности пластины. В этом случае отличными от нуля будут только составляющие E_{01}^\pm, E_1 амплитуд \vec{E}_0^\pm, \vec{E} . Для их определения имеем следующую систему уравнений [3]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + k_0^2 \right) E_{01}^\pm = \begin{cases} i\omega\mu_0 h^2 j_0 \delta(x_2) \delta(z - z_0 - 1) & \text{в } D_0^+, \\ 0 & \text{в } D_0^-, \end{cases} \quad (2)$$

$$\left[\delta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) - \frac{i}{2} \right] E_1 = 0 \text{ в } D, \quad (3)$$

граничных условий на поверхностях $z = \pm 1$ пластины

$$E_1 = E_{01}^\pm, \quad \frac{\partial}{\partial z} E_1 = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial z} E_{01}^\pm, \quad (4)$$

к которым присоединяются условия на бесконечности (условия излучения [3]).