Поскольку ряд $\sum_{i=0}^{\infty} B_i$ сходится, то сходится произведение $\prod_{i=0}^{\infty} (1 + B_i)$ и, таким образом, последовательности $\{P_{2n}\}$, $\{P_{2n+1}\}$, $\{Q_{2n}\}$, $\{Q_{2n+1}\}$ ограничены. Кроме того, эти последовательности стремятся к конечному пределу, что доказывается аналогично, как и в работе [4].

Из формулы (5) получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} (P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n) \neq 0,$$

тем самым четные и нечетные подходящие дроби ДЦД (1) сходятся к разным пределам, поэтому ДЦД (1) расходится.

1. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости разложения функции двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 3—6.
2. *Кучминская Х. И.* Приближение функций двух переменных двумерными цепными дробями. — В кн.: Междунар. конф. по теории приближения функций, СССР, Киев, 30 мая — 6 июня 1983 г. : Тез. докл. Киев : Ин-т матем. АН УССР, 1983, с. 110.
3. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. — М. : Гостехиздат, 1956.—203 с.
4. *Siemaszko W.* On some conditions for convergence of branched continued fractions.— Lect. Notes Math., 1981, 888, p. 367—370.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 23.11.83

УДК 539.377

В. А. Шевчук

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ПРОЦЕССА ДИФФУЗИОННОГО НАСЫЩЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ВЗАИМОСВЯЗИ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ И ДИФФУЗИИ ВЕЩЕСТВА

Диффузионное насыщение поверхности металлических изделий соответствующими химическими элементами является одним из основных способов получения защитных покрытий, которые используются для повышения долговечности и надежности деталей машин, придания им необходимых физико-химических свойств. Для расчета напряженного состояния и режима образования диффузионных покрытий может быть использована математическая модель, приведенная в работе [1], которая позволяет учитывать взаимосвязь процессов деформации и диффузии вещества.

Система дифференциальных уравнений и краевых условий, описывающих процесс диффузионного насыщения, представляет собой сложную краевую задачу математической физики. Аналитическое решение может быть получено лишь для некоторых частных задач такого рода, а для большинства практически важных случаев получение аналитического решения крайне затруднено. Поэтому представляется целесообразным применение численных методов, ориентированных на современные мощные ЭВМ.

В данной работе для решения нестационарной взаимосвязанной задачи о диффузионном насыщении сферических деформируемых твердых тел для случая центральной симметрии предложена схема численного расчета, основанная на сведении исходной системы уравнений и краевых условий к решению некоторой неклассической краевой задачи для физической переменной (концентрации диффундирующего вещества) и последующему определению механических переменных (перемещений и напряжений) через решение этой неклассической краевой задачи.

Для центральносимметричной задачи, в изотермическом случае, в предположении, что время релаксации механических процессов значительно меньше времени релаксации процессов, связанных с переносом массы, система дифференциальных уравнений, учитывающих взаимосвязь процессов деформации и диффузии вещества, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu}\beta\frac{\partial c}{\partial r} = 0, \qquad (1)$$

$$Ld_c\left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right) + Ld_e\left(\frac{\partial^2 e}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial e}{\partial r}\right) = \frac{\partial c}{\partial \tau}, \qquad (2)$$

где u — радиальное перемещение; c — отклонение концентрации от равновесной; e — относительное объемное расширение; L — коэффициент, характеризующий подвижность атомов растворенного вещества при диффузии; ν — коэффициент Пуассона; β — коэффициент линейного концентрационного расширения; d_c, d_e — параметры, характеризующие изменение химического потенциала с изменением соответственно концентрации и деформации.

Рассматривается смешанная задача: на одном участке границы задаются перемещения, на другом — напряжения:

$$u\,|_{\Gamma_u} = \tilde{u}, \qquad (3)$$

$$\sigma_{rr}\,|_{\Gamma_p} = p. \qquad (4)$$

На химический потенциал могут задаваться условия первого, второго или третьего рода:

$$(d_c c + d_e e)\,|_{\Gamma_{1\varphi}} = \varphi_c, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(d_c c + d_e e)\,|_{\Gamma_{2\varphi}} = q_c, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(d_c c + d_e e)\,|_{\Gamma_{3\varphi}} = \mu\,(d_c c + d_e e - \varphi_c), \qquad (7)$$

где μ — коэффициент массоотдачи; $\Gamma_u + \Gamma_p = \Gamma_{1\varphi} + \Gamma_{2\varphi} + \Gamma_{3\varphi} = \Gamma$. При этом предполагается, что в начальный момент [1]

$$c\,|_{\tau=0} = 0. \qquad (8)$$

Модель замыкается физическими соотношениями

$$\sigma_{rr} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\frac{u}{r} - \frac{E\beta}{1-2\nu}c, \qquad (9)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\frac{u}{r} - \frac{E\beta}{1-2\nu}c.$$

Приведение к неклассической краевой задаче для концентрации осуществляется путем исключения механической переменной — объемной деформации из уравнения диффузии и граничных условий на химический потенциал.

Общее решение уравнения равновесия (1) имеет вид

$$u = Ar + \frac{B}{r^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\beta}{r^2}\int_{r_1}^{r_2} cr^2 dr. \qquad (10)$$

Соответственно для относительного объемного расширения имеет место формула

$$e = 3A + \beta\frac{1+\nu}{1-\nu}c. \qquad (11)$$

Определив константы A, B, путем удовлетворения механических граничных условий (3), (4) с учетом обобщенного закона Гука (9) и подставив объемную деформацию по формуле (11) в уравнение диффузии (2) и граничные условия (5), (6), (7), получим неклассическую задачу для концентрации c:

$$L\left(d_c + \frac{1+\nu}{1-\nu}\beta d_e\right)\left(\frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right) = \frac{\partial c}{\partial \tau}, \qquad (12)$$

$$A_1\frac{\partial c}{\partial r}+B_1c+F_1\int_{r_1}^{r_2}cr^2dr-G_1=0 \quad \text{при} \quad r=r_1, \tag{13}$$

$$A_2\frac{\partial c}{\partial r}+B_2c+F_2\int_{r_1}^{r_2}cr^2dr-G_2=0 \quad \text{при} \quad r=r_2,$$

где выражения для констант A_i, B_i, F_i, G_i $(i=1, 2)$ определяются конкретным видом граничных условий (3)—(7).

Особенностью данной неклассической краевой задачи является нелокальное краевое условие, включающее интеграл по всей области определения функции концентрации.

Напряжения явно выражаются через концентрацию путем использования решений уравнений равновесия и граничных условий на механические переменные:

$$\sigma_{rr}=\frac{2EB}{1-\nu}\left[\frac{1}{r_2^3-r_1^3}\int_{r_1}^{r_2}cr^2dr-\frac{1}{r^3-r_1^3}\int_{r_1}^{r}cr^2dr\right]+\overset{0}{\sigma}_{rr}, \tag{14}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\theta\theta}=\frac{E\beta}{1-\nu}\left[\frac{2}{r_2^3-r_1^3}\int_{r_1}^{r_2}cr^2dr+\frac{1}{r^3-r_1^3}\int_{r_1}^{r}cr^2dr\right]+\overset{0}{\sigma}_{\varphi\varphi},$$

где $\overset{0}{\sigma}_{rr}$, $\overset{0}{\sigma}_{\varphi\varphi}$ — величины, зависящие только от вида граничных условий на механические переменные (3), (4).

Таким образом, решение задачи сводится к определению концентрации из (12), (13), (8) и последующему вычислению напряжений по формулам (14).

После разделения задачи механодиффузии в таком смысле для решения неклассической краевой задачи для уравнения диффузионного типа построена схема численного расчета, основанная на методе конечных разностей [2]. Предполагая, что решение задачи существует, единственно и обладает гладкостью, необходимой для аппроксимации, ищем сеточную функцию $c_i^j=c(r_i, \tau_j)$, определенную в пространственно-временной сеточной области $\omega_{h\tau}=\omega_h\times\omega_\tau$, $\omega_\tau=\{\tau_j=j\Delta\tau,\ j=0, 1, 2, \ldots\}$, $\omega_h=\{r_i=r_1+(i-1)h,\ i=\overline{1, N},\ h=(r_2-r_1)/(N-1)\}$, и удовлетворяющую конечно-разностным уравнениям:

$$L\left(d_c+\beta d_e\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\left(\frac{c_{i+1}^k-2c_i^k+c_{i-1}^k}{h^2}+\frac{c_{i+1}^k-c_{i-1}^k}{hr_i}\right)=\frac{c_i^{k+1}-c_i^k}{\Delta\tau},$$

$$i=\overline{2,\ N-1},$$

$$A_1\frac{-3c_1^k+4c_2^k-c_3^k}{2h}+B_1c_1^k+F_1\frac{h}{3}\left(c_1^kr_1^2+4\sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}}c_{2l}^kr_{2l}^2+2\sum_{l=1}^{\frac{N-3}{2}}c_{2l+1}^kr_{2l+1}^2+\right.$$

$$\left.+c_N^kr_N^2\right)-G_1=0,$$

$$A_2\frac{3c_N^k-4c_{N-1}^k+c_{N-2}^k}{2h}+B_2c_N^k+F_2\frac{h}{3}\left(c_1^kr_1^2+4\sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}}c_{2l}^kr_{2l}^2+2\sum_{l=1}^{\frac{N-3}{2}}c_{2l+1}^kr_{2l+1}^2+\right.$$

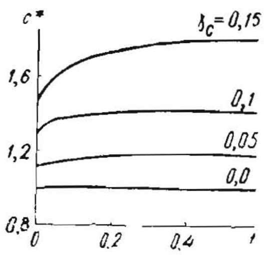
$$\left.+c_N^kr_N^2\right)-G_2=0,$$

$$c_i^0=0,\ i=\overline{2,\ N-1},$$

$$c_1^0=\begin{cases}\dfrac{\varphi_c-d_ee_1^0}{d_c+\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\beta d_e}, & r_1\in\Gamma_{1\varphi},\\[2ex] -\dfrac{q_ch}{3\left(d_c+\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\beta d_e\right)}, & r_1\in\Gamma_{2\varphi},\\[2ex] 0, & r_1\in\Gamma_{3\varphi},\end{cases}\qquad c_N^0=\begin{cases}\dfrac{\varphi_c-d_ee_N^0}{d_c+\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\beta d_e}, & r_2\in\Gamma_{1\varphi},\\[2ex] \dfrac{q_ch}{3\left(d_c+\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\beta d_e\right)}, & r_2\in\Gamma_{2\varphi},\\[2ex] 0, & r_2\in\Gamma_{3\varphi}.\end{cases}$$

На основе этой системы конечно-разностных уравнений построена схема численного расчета, по которой вычисления организованы таким образом, что алгоритм представляет собой явную схему метода конечных разностей, т. е. расчет концентрации ведется по рекуррентным соотношениям, что значительно облегчает программирование. Напряжения определяются путем численного интегрирования.

Данный алгоритм реализован в виде комплекса фортран-подпрограмм для ЭВМ М-4030. На основе комплекса был произведен расчет концентрационного поля и напряженного состояния при диффузионном насыщении сплошного шара при следующих условиях: на химический потенциал ставилось граничное условие первого рода и принималось, что поверхность шара свободна от напряжений. На рисунке показано изменение безразмерной концентрации $c^* = c/(\varphi_c/d_c)$ на границе тела во времени $t = Ld_c\tau/r_2^2$ при следующих значениях параметров: $\nu = 1/3$, $\gamma_c = -\beta d_e/d_c = 0$; 0,05; 0,1; 0,15. Видно, что учет взаимосвязи процессов диффузии и деформации приводит к качественному изменению процесса диффузионного насыщения: если при $\gamma_c = 0$ (несвязанная задача — учитывается только влияние диффузии на деформацию) концентрация постоянна во времени, то при $\gamma_c \neq 0$ концентрация c^* с течением времени монотонно возрастает, приближаясь к значению в установившемся режиме — максимальной растворимости диффундирующего компонента при данных условиях, причем начальное значение c^* на границе равно



$$1\Big/\left(1 - \frac{1+\nu}{1-\nu}\gamma_c\right).$$

1. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н., Павлина В. С.* Квазистатическая задача термодиффузии для деформируемых твердых тел.— Прикл. механика, 1971, 7, № 12, с. 6—11.
2. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.—552 с.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов
Получено 24.01.84

УДК 537.72 : 620.198

Б. И. Сенчина

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ ДИФФУЗИОННЫХ ПОКРЫТИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ДРУГОЙ ФАЗЫ

При твердофазной химической реакции [1] возможна перестройка кристаллической решетки фазы, состав которой путем предварительной однофазной диффузии меняется до предела стойкости твердого раствора. Если в однофазном твердом растворе имеет место полиморфное преобразование, то увеличение концентрации вещества, способствующего фазовому переходу, в приграничной зоне выше определенного значения приведет к полиморфному фазовому превращению в этой зоне, которая будет фазовоотличимой от области, где концентрация диффундирующего компонента еще не достигла граничного значения.

После фазовых превращений первого рода в области новой фазы, отличающейся от исходной удельным объемом, могут появляться большие градиенты химического потенциала, существенно влияющие на диффузионные процессы в окрестности этой области. В случае диффузионных покрытий фазовые превращения в приповерхностном слое могут существенно влиять на стабильность покрытий (диффузионное рассасывание «защитных» компонентов).

С целью аналитического описания таких процессов запишем исходные соотношения для исследования диффузионного насыщения во вза-