Для аппроксимации

$$e_a^x \approx \frac{e^a}{4}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(a-x)} + \frac{1}{\operatorname{ch}(a-x)}\right) \qquad (25)$$

формула (14) будет иметь вид

$$f_*(t,\ a) = f_*^{k.m.i.j}(t,\ a) = \frac{1}{2}\left[f_1^{k.m}(t,\ a) + f_2^{i.j}(t,\ a)\right]. \qquad (26)$$

Аппроксимация (25) значительно увеличивает точность вычисления оригинала. Погрешность приближенного вычисления оригинала в этом случае равна

$$|f_*(t,\ a) - f_*(t)| \leqslant e^{-4a}|f_*(5t) + e^{-4a}f_*(9t) + \ldots|. \qquad (27)$$

Для ограниченной функции ($|f_*(t)| \leqslant C$) неравенство (27) примет вид

$$|f_*(t,\ a) - f_*(t)| \leqslant Ce^{-4a}|1 + e^{-4a} + \ldots|. \qquad (28)$$

Из рассмотренных аппроксимаций наименьшую погрешность обеспечивает аппроксимация (4).

Случай аппроксимации (18) был рассмотрен в [7].

1. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике.—М.: Наука, 1980.—974 с.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.—М.: Физматгиз, 1963.—1100 с.
3. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление.—М.: Высш. шк., 1975.—407 с.
4. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращение преобразования Лапласа.— М.: Наука, 1974.— 223 с.
5. *Побережный О. В., Пяныло Я. Д.* Об оценке погрешности и условиях сходимости приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью ортогональных многочленов.—Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 91—94.
6. *Цирулис Т. Т., Белов М. А.* Асимптотические методы исследования схемы Папулиса для приближенного обращения преобразования Лапласа.—Учен. зап. Латв. ун-та, 1973, № 292, с. 139—154.
7. *Toshio Hosono.* Numerical inversion of Laplase transform and some applications to wave optics.—Radio Sciense, 1981, 16, № 6, p. 1015—1019.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 03.02.84.

УДК 519.62

П. И. Боднарчук, Р. В. Слоневский

ОБОСНОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ УСТОЙЧИВОЙ КОРРЕКЦИИ

В работе исследуется актуальная задача обоснования решения систем жестких дифференциальных уравнений. В отличие от известных результатов рассматриваются явные устойчивые реализации неявных дробно-рациональных алгоритмов. Основной результат работы состоит в построении конкретных примеров неявных устойчивых дробно-рациональных отображений дифференцируемых функций, допускающих явную реализацию в виде простых устойчивых итераций [1, 2].

1. Пусть $y(x)$ есть $m+1$ раз дифференцируемая функция, представленная формулой Обрешкова [2] в виде

$$y_{n+1}^{[m]} = y_n + \sum_{s=1}^{m}(-1)^{s+1}y_{n+1}^{(s)}\frac{h^s}{s!} + 0\left(h^{m+1}\right). \qquad (1)$$

Образуем ее неявные дробно-рациональные отображения

$$y_{n+1}^{[m]} = y_n + \frac{A_{n+1}^{[m]}}{B_{n+1}^{[m]}}, \qquad (2)$$

где

1) $m = 2, 3, 4, \ldots;$

2) $A_{n+1}^{[2k]} = \sum_{m=1}^{2k} h^{2m-1} \left\{ \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^{s+1} \frac{2y_{n+1}^{(s)} y_{n+1}^{(2m-s)}}{s!\,(2m-s)!} + (-1)^m \left[\frac{1}{m!} y_{n+1}^{(m)} \right]^2 \right\};$

3) $B_{n+1}^{[2k]} = \sum_{m=1}^{2k} \frac{1}{m!} h^{m-1} y_{n+1}^{(m)};$

4) $A_{n+1}^{[2k+1]} = A_{n+1}^{[2k]} + L_{n+1}^{[2k+1]};$

5) $B_{n+1}^{[2k+1]} = B_{n+1}^{[2k]} + \mu_{2k+1} h^{2k+1} y_{n+1}^{(2k+1)};$

6) $L_{n+1}^{[2k+1]} = h^{2k+1} \left\{ \sum_{s=2}^{k+1} (-1)^{s+1} \frac{2y_{n+1}^{(s)} y_{n+1}^{(2k+2-s)}}{s!\,(2k+2-s)!} + \right.$

$\left. + \left(\mu_{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)!} \right) y'_{n+1} y_{n+1}^{(2k+1)} + (-1)^k \left[\frac{1}{k!} y_{n+1}^{(k)} \right]^2 \right\};$

7) $\mu_{2k+1} = \sum_{s=2}^{k+1} (-1)^{s+1} \frac{2}{s!\,(2k+2-s)!} - \frac{1}{(2k+1)!} + (-1)^k \frac{1}{(k!)^2}.$

Дробно-рациональные отображения (2) дифференцируемой функции (1) при любом $m = 2, 3, 4, \ldots$ характеризуются свойствами А-устойчивости, устойчивости по правой части и численной устойчивости.

Определение. Вычислительный алгоритм

$$y_{n+1}^{[m]} = F\left(x_n, \ y_n, \ h, \ y_n^{(k)}, \ y_{n+1}^{(k)}\right) \qquad (k = \overline{1, \ m}) \tag{3}$$

называется численно устойчивым, если

$$\left| \tilde{y}_{n+1}^{[m]} - y_{n+1}^{[m]} \right| \leqslant \varepsilon \alpha, \tag{4}$$

где

1) $0 < \alpha \leqslant 1;$

2) $\tilde{y}_{n+1}^{[m]} \doteq F\left(x_n, \ y_n + \varepsilon, \ h, \ y_n^{(k)} + \varepsilon \alpha_k, \ y_{n+1}^{(k)}\right);$

3) α_k, h — произвольные числа.

Введенная этим определением численная устойчивость вычислительного алгоритма имеет смысл независимости возмущения решения на данном шаге вычислений от ограниченного возмущения (в пределах заданной точности) входной информации на предыдущем шаге вычислений. Если вычислительный алгоритм обладает свойством численной устойчивости, то это влечет за собой соответствие друг другу теоретической и фактической его устойчивости в процессе вычислительного эксперимента. Лишь в этом случае теоретические прогнозы выбора длины очередного шага интегрирования соответствуют реальной ситуации вычислений.

На конкретных примерах вычислительных алгоритмов 2-го — 6-го порядков изучим их свойства и возможности реализации с помощью простых итераций.

2. Рассмотрим вычислительный алгоритм 2-го порядка

$$y_{n+1}^{[2]} = y_n + \frac{h\left(y'_{n+1}\right)^2}{y'_{n+1} + \frac{1}{2} h y''_{n+1}}. \tag{5}$$

Проверим его на согласованность со вторым порядком точности, т. е. оценим со вторым порядком разность $y_{n+1}^{[2,0]} - y_{n+1}^{[2]}$, где $y_{n+1}^{[2,0]} = y_n + h y'_{n+1} - \frac{1}{2} h^2 y''_{n+1} + 0(h^3)$. Тогда

$$y_{n+1}^{[2,0]} - y_{n+1}^{[2]} = \frac{a_{n+1}^{[2]}}{y'_{n+1} + \frac{1}{2} h y''_{n+1}},$$

где

$$a_{n+1}^{[2]} = \left(hy^{\bullet}_{n+1} - \frac{1}{2}h^2 y^{\bullet\bullet}_{n+1}\right)\left(y'_{n+1} + \frac{1}{2}hy''_{n+1}\right) - h\left(y'_{n+1}\right)^2 =$$

$$= h\left(y'_{n+1}\right)^2 - \frac{1}{4}h^3\left(y''_{n+1}\right)^2 - h\left(y'_{n+1}\right)^2 = 0(h^3).$$

Далее исследуем вычислительный алгоритм (5) на устойчивость по отношению модельного дифференциального уравнения $y' = -\lambda y\,(\mathrm{Re}\,\lambda > 0)$, приняв обозначение $z = h\lambda$. Легко видеть, что $hy^{\bullet}_{n+1} = -zy_{n+1}$ и $h^2 y^{\bullet\bullet}_{n+1} = z^2 y_{n+1}$, а поэтому из (5) получаем

$$y_{n+1} = y_n - \frac{z^2\left(y_{n+1}\right)^2}{\left(z - \frac{1}{2}z^2\right)y_{n+1}}, \quad \text{или} \quad y_{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{2}z}{1 + \frac{1}{2}z}y_n, \tag{6}$$

т. е. вычислительный алгоритм (5) является А-устойчивым и характеризуется операторной функцией

$$D_2(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z}{1 + \frac{1}{2}z}. \tag{7}$$

Вычислительный алгоритм (5) неявный. Поэтому рассмотрим его явную реализацию методом простой А-устойчивой итерации в виде

$$y_{n+1,m+1}^{[2]} = y_n + \frac{h\left(y'_{n+1,m}\right)^2}{y'_{n+1,m} + \frac{1}{2}hy''_{n+1,m}}, \tag{8}$$

где m — итерационный индекс и $y_{n+1,0}^{[2]}$ — начальное приближение. Для обеспечения А-устойчивости простых итераций в виде (8) исследуем вычислительный алгоритм (8) на устойчивость на каждом шаге итерационного процесса $m = \overline{0,\ k}$. Тогда по отношению к модельному дифференциальному уравнению $y' = -\lambda y(\mathrm{Re}\,\lambda > 0)$ на первом шаге итерационного процесса получаем, что

$$y_{n+1,1}^{[2]} = y_n + \frac{h\left(y'_{n+1,0}\right)^2}{y'_{n+1,0} + \frac{1}{2}hy''_{n+1,0}} =$$

$$= y_n - D_{20}(z)\frac{z}{1 - \frac{1}{2}z}y_n,$$

где

$$y_{n+1,0}^{[2]} = D_{20}(z)\,y_n; \quad hy^{\bullet}_{n+1,0} = -zD_{20}(z)\,y_n; \quad h^2 y^{\bullet\bullet}_{n+1,0} = z^2 D_{20}(z)\,y_n.$$

Отсюда очевидно, что на первом шаге простых итераций (8)

$$D_{21}(z) = 1 - D_{20}(z)\frac{z}{1 - \frac{1}{2}z} \tag{9}$$

и операторная функция $D_{21}(z)$, которой характеризуется первый шаг итерационного процесса, будет А-допустимой только при специальном выборе операторной функции $D_{20}(z)$, которой характеризуется начальное приближение $y_{n+1,0}^{[2]}$. Среди других возможных случаев выбора начального приближения оптимальным является такое $y_{n+1,0}^{[2]}$, которое характеризуется операторной функцией (7), так как тогда

$$D_{21}(z) = 1 - \frac{1 - \frac{1}{2}z}{1 + \frac{1}{2}z}\,\frac{z}{1 - \frac{1}{2}z} = \frac{1 - \frac{1}{2}z}{1 + \frac{1}{2}z} = D_{20}(z).$$

В качестве такого начального приближения можно взять [1, 2]

$$y^{[2]}_{n+1,0} = y_n + \frac{h\left(y'_n\right)^2}{y'_n - \frac{1}{2}hy''_n}. \tag{10}$$

В этом случае соотношение (9) показывает, что на любой итерации вычислительный процесс (8), (10) характеризуется A-допустимой операторной функцией (7). Следовательно, итерационная процедура (8), (10) является A-допустимой на любом шаге вычислений. Более того, она одновременно является и численно устойчивой, так как

$$\tilde{y}^{[2]}_{n+1,m+1} = y_n + \varepsilon + \frac{h\left(y'_{n+1,m}\right)^2}{y'_{n+1,m} + \frac{1}{2}hy''_{n+1,m}},$$

а тогда

$$\left|\tilde{y}^{[2]}_{n+1,m+1} - y^{[2]}_{n+1,m+1}\right| = \varepsilon.$$

Заметим, что в вычислительном алгоритме (8), (10) имеется возможность обращения в нуль знаменателя при определенном соотношении производных или их малости по абсолютной величине. Например, такая ситуация возникает либо при условии малости производных $y'_{n+1,m}$ и $\frac{1}{2}hy''_{n+1,m}$, либо при условии, когда они равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. В первом случае по формуле (1) $y^{[2]}_{n+1,m+1} \approx y_n$, т. е. следует в точке x_{n+1} решению снова присваивать значение y_n. Во втором случае следует сначала вычислить знаменатель следующего по порядку вычислительного алгоритма и, когда он также равен или близок к нулю, также полагать $y^{[2]}_{n+1,m+1} = y_n$.

3. Рассмотрим вычислительный алгоритм 3-го порядка

$$y^{[3]}_{n+1} = y_n + \frac{h\left(y'_{n+1}\right)^2 + \frac{1}{4}h^3\left[y'_{n+1}y'''_{n+1} - \left(y''_{n+1}\right)^2\right]}{y'_{n+1} + \frac{1}{2}hy''_{n+1} + \frac{1}{12}h^2y'''_{n+1}}. \tag{11}$$

Сначала проверим его на согласованность с третьим порядком точности, т. е. оценим разность $y^{[3,0]}_{n+1} - y^{[3]}_{n+1}$, где

$$y^{[3,0]}_{n+1} = y_n + hy'_{n+1} - \frac{1}{2}h^2y''_{n+1} + \frac{1}{6}h^3y'''_{n+1} + 0(h^4).$$

Тогда

$$y^{[3,0]}_{n+1} - y^{[3]}_{n+1} = \frac{a^{[3]}_{n+1}}{y'_{n+1} + \frac{1}{2}hy''_{n+1} + \frac{1}{12}h^2y'''_{n+1}},$$

где

$$a^{[3]}_{n+1} = \left(hy'_{n+1} - \frac{1}{2}h^2y''_{n+1} + \frac{1}{6}h^3y'''_{n+1}\right)\left(y'_{n+1} + \frac{1}{2}hy''_{n+1} + \frac{1}{12}h^2y'''_{n+1}\right) -$$

$$- h\left(y'_{n+1}\right)^2 - \frac{1}{4}h^3\left[y'_{n+1}y'''_{n+1} - \left(y''_{n+1}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{24}h^4y''_{n+1}y'''_{n+1} + 0\left(h^5\right).$$

Следовательно, локальная погрешность вычислительного алгоритма (11) представляется в виде

$$T^{[3]}_{n+1} = \frac{\frac{1}{24}h^4\left[y''_{n+1}y'''_{n+1} - y'_{n+1}y^{\mathrm{IV}}_{n+1}\right]}{y'_{n+1} + \frac{1}{2}hy''_{n+1} + \frac{1}{12}h^2y'''_{n+1}}. \tag{12}$$

Далее исследуем вычислительный алгоритм (11) на устойчивость, применяя его к решению модельного дифференциального уравнения $y' = -\lambda y$ $(\mathrm{Re}\,\lambda > 0)$. Так как $hy'_{n+1} = -zy_{n+1}$, $h^2 y''_{n+1} = z^2 y_{n+1}$ и $h^3 y'''_{n+1} = -z^3 y_{n+1}$, то в результате получим, что

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{12} z^2}{1 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{12} z^2} y_n, \tag{13}$$

т. е. требуемое доказательство его А-устойчивости.

Вычислительный алгоритм (11) является неявным. Рассмотрим его явную реализацию с помощью простых итераций в виде

$$y^{[3]}_{n+1,m+1} = y_n + \frac{h\left(y'_{n+1,m}\right)^2 + \frac{1}{4} h^3 \left[y'_{n+1,m} y'''_{n+1,m} - \left(y''_{n+1,m}\right)^2\right]}{y'_{n+1,m} + \frac{h}{2} y''_{n+1,m} + \frac{1}{12} h^2 y'''_{n+1,m}}, \tag{14}$$

где m — итерационный индекс; $y^{[3]}_{n+1,0}$ — начальное приближение.

Для обеспечения устойчивости простых итераций в виде (14) исследуем их на устойчивость на каждом шаге итерационного процесса $m = \overline{0,\, k}$. Тогда, применяя (14) к решению указанного ранее модельного дифференциального уравнения, получим, что

$$y^{[3]}_{n+1,1} = y_n - D_{30}(z) \frac{z}{1 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{12} z^2} y_n,$$

т. е. операторная функция на первом шаге итерационного процесса определяется из соотношения

$$D_{31}(z) = 1 - D_{30}(z) \frac{z}{1 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{12} z^2},$$

где использованы следующие соотношения:

$$y^{[3]}_{n+1,0} = D_{30}(z)\, y_n; \quad hy'_{n+1,0} = -zD_{30}(z)\, y_n,$$
$$h^2 y''_{n+1,0} = z^2 D_{30}(z)\, y_n, \quad h^3 y'''_{n+1,0} = -z^3 D_{30}(z)\, y_n.$$

Таким образом, операторная функция $D_{31}(z)$ на первом шаге итерационного процесса является А-допустимой только при специальном выборе операторной функции $D_{30}(z)$, которая характеризует с точки зрения устойчивости начальное приближение $y^{[3]}_{n+1,0}$. Среди различных возможностей выбора начального приближения А-устойчивость любой из итераций достигается только при таком начальном приближении, которое характеризуется операторной функцией (13), так как тогда

$$D_{31}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{12} z^2}{1 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{12} z^2} = D_{30}(z).$$

Этому условию удовлетворяет начальное приближение

$$y^{[3]}_{n+1,0} = y_n + \frac{h\left(y'_n\right)^2 + \frac{1}{4} h^3 \left[y'_n y'''_n - \left(y''_n\right)^2\right]}{y'_n - \frac{1}{2} hy''_n + \frac{1}{12} h^2 y'''_n}.$$

Аналогичными свойствами обладают вычислительные алгоритмы (2) любого порядка. Это позволяет на их основе строить одношаговые и многошаговые численные методы решения жестких систем дифференциальных уравнений, обладающие свойствами численной устойчивости и А-устойчивости итерационных коррекций. Перенос алгоритмов устойчивой коррекции (2) на системы дифференциальных уравнений осуществляется покомпонентно.

Вычислительный эксперимент, проведенный на базе численных методов устойчивой коррекции, убеждает в целесообразности практического использования последних. Этим подтверждается полезность развиваемого направления в построении численных методов решения жестких систем дифференциальных уравнений.

1. *Боднарчук П. И., Кутнив М. В., Максымив Е. М.* Дробно-рациональные численные методы решения слабо жестких задач. — В кн.: Тез. лекций и докл. Всесоюз. школы «Численные методы решения задач математической физики» (Львов, 25 мая — 4 июня 1983 г.). М.: Знание, 1983, ч. 3, с. 2—4.
2. *Боднарчук П. И., Слоневский Р. В., Пустомельников И. П.* Дробно-рациональные численные методы решения «жестких» задач. — Там же, с. 4—6.

Львовский политехнический ин-т Получено 08.02.84

УДК 517.52

Х. И. Кучминская, О. Н. Сусь

ДВА ПРИЗНАКА СХОДИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Предметом наших исследований будут двумерные цепные дроби (ДЦД) [2] вида

$$\frac{a_0|}{|\Phi_0} + \frac{a_1|}{|\Phi_1} + \ldots, \quad \Phi_i = b_i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}|}{|b_{i+j,i}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}|}{|b_{i,i+j}}, \tag{1}$$

n-я подходящая дробь которых определяется по формуле

$$P_n/Q_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} \frac{a_i|}{|\Phi_i^{(n-2i)}}, \tag{2}$$

где

$$\Phi_i^{(k)} = b_i + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{i+j,i}|}{|b_{i+j,i}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{i,i+j}|}{|b_{i,i+j}}; \quad \Phi_i^{(0)} = b_i, \ k = 0, 1, \ldots .$$

При введении обозначений

$$\frac{P_n(i)}{Q_n(i)} = \Phi_{i-1}^{(n-2i+2)} + \frac{a_i|}{|\Phi_i^{(n-2i)}} + \ldots + \frac{a_{[n/2]}|}{|\Phi_{[n/2]}^{(n-2[n/2])}}, \quad i = \overline{1, [n/2]}, \tag{3}$$

в предположении, что

$$\frac{P_n(0)}{Q_n(0)} = 0, \quad \frac{P_n([n/2]+1)}{Q_n([n/2]+1)} = \Phi_{[n/2]}^{(n-2[n/2])}, \quad \frac{P_n([n/2]+2)}{Q_n([n/2]+2)} = \infty, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

аналогично как и в работах [1, 4], нетрудно получить формулу разности двух соседних подходящих дробей

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^{i+1} \left[\Phi_i^{(n-2i)} - \Phi_i^{(n-1-2i)}\right] \prod_{j=0}^{i} \frac{a_j Q_{n-1}(j+1)\, Q_n(j+1)}{P_{n-1}(j+1)\, P_n(j+1)} +$$

$$+ (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} \frac{Q_n\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+2\right)}{P_n\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+2\right)} \prod_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{a_{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}\, a_j Q_{n-1}(j+1)\, Q_n(j+1)}{P_{n-1}(j+1)\, P_n(j+1)}. \tag{4}$$

Обозначая

$$R_{i,n-1} = -\frac{a_i Q_{n-1}(i+1)\, Q_n(i+1)}{P_{n-1}(i+1)\, P_n(i+1)},$$