2. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений: В 2-х т. — М. : Наука: Физматгиз, 1966. — Т. 2. 639 с.
3. *Канторович Л. В.* О методе Ньютона. — Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1949, 28, с. 104—144.
4. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М.* Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. — Киев : Наук. думка, 1981.— 344 с.
5. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. — М. : Наука, 1977.—656 с.

Львовский государственный ун-т им. Ив. Франко Получено 16.01.84.

УДК 517.9

М. Г. Кривцун

ЧИСЛЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящее время разработаны и эффективно используются на практике прямые численные методы решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ), с помощью которых при произвольной ограниченной правой части можно получить решение в виде рядов по ортогональным полиномам, коэффициенты которых определяются из систем алгебраических уравнений [1]. Однако во многих задачах математической физики, которые сводятся к решению СИУ, необходимо иметь решение в виде аналитической зависимости от правой части, т. е. знать формулу обращения. Например, если в задаче механики при фиксированной геометрии задачи необходимо варьировать прилагаемую нагрузку, то целесообразно иметь фундаментальное решение, чтобы не решать СИУ для каждой нагрузки заново. В контактных (смешанных) задачах теории упругости для тел с разрезами фундаментальное решение используется непосредственно при построении СИУ указанных задач.

Обратить СИУ можно практически лишь в том случае, если их регулярные ядра вырожденные или допускают подходящую аппроксимацию. Когда ядра СИУ сравнительно простой структуры, то приближенную формулу обращения можно также построить с помощью метода малого параметра. В общем же случае для достижения этой цели необходимо привлекать численные методы.

Ниже предлагается численный способ построения формул обращения системы СИУ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\varphi_p(s)}{s-s_0}+\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(s)M_{kp}(s,\ s_0)\right]ds=f_p(s_0), \tag{1}$$

$$p=\overline{1,\ n},\quad s_0\in[-1,\ 1],$$

где ядра $M_{kp}(s,\ s_0)$ и свободные члены $f_p(s)$ суть заданные на $[-1,\ 1]$ ограниченные функции.

Решение системы (1) будем искать в классе функций, неограниченных на концах, единственность которого обеспечивается наличием условий

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_p(s)\,ds=C_p,\quad p=\overline{1,\ n}. \tag{2}$$

Представим функции $\varphi_p(s)$ в виде

$$\varphi_p(s)=\frac{C_p}{\sqrt{1-s^2}}+\nu_p(s),\quad p=\overline{1,\ n}. \tag{3}$$

Тогда для определения новых неизвестных функций $\nu_p(s)$ имеем систему СИУ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\nu_p(s)\left[\frac{1}{s-s_0}+\sum_{k=1}^{n}\nu_k(s)M_{kp}(s,\ s_0)\right]ds=\psi_p(s_0), \tag{4}$$

$$p = \overline{1, n}, \quad s_0 \in [-1, 1],$$

где

$$\psi_p(s) = f_p(s) - \sum_{k=1}^{n} C_k \tilde{M}_{kp}(s); \quad \tilde{M}_{kp}(s_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{M_{kp}(s, s_0)\, ds}{\sqrt{1 - s^2}}.$$

На основании соотношений (2), (3) функции $\nu_p(s)$ должны удовлетворять условиям

$$\int_{-1}^{1} \nu_p(s)\, ds = 0, \quad p = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Рассмотрим систему СИУ

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[\frac{\nu_{pk}(r, s)}{s - s_0} + \sum_{j=1}^{n} \nu_{jk}(r, s) M_{jp}(s, s_0) \right] ds =$$
$$= \delta_{pk} \delta(r - s_0), \quad p, k = \overline{1, n}, \quad r, s_0 \in [-1, 1], \tag{6}$$

где δ_{pk} — символ Кронекера; $\delta(s)$ — дельта-функция Дирака.

Предполагается, что решение системы (6) удовлетворяет условиям

$$\int_{-1}^{1} \nu_{pk}(r, s)\, ds = 0, \quad p, k = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Умножим k-е уравнение системы (6) при фиксированном p на $\psi_k(r)$ и проинтегрируем его по r вдоль отрезка $[-1, 1]$. Просуммировав полученные равенства по k и сопоставив полученные соотношения с уравнениями системы (4), убеждаемся, что они совпадают, если

$$\nu_p(s) = \int_{-1}^{1} \sum_{k=1}^{n} \nu_{pk}(r, s) \psi_k(r)\, dr, \quad p = \overline{1, n}. \tag{8}$$

Таким образом, обращение системы (4) эквивалентно нахождению аналитического решения системы (6). Для одного комплексного уравнения, что соответствует случаю $n = 2$, этот результат установлен в работе [3].

Анализ системы (6) показывает, что функции $\nu_{pk}(r, s)$ можно искать в виде

$$\nu_{pk}(r, s) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - s^2}} \left[\frac{\delta_{pk} \sqrt{1 - r^2}}{s - r} + \mu_{pk}(r, s) \right], \quad p, k = \overline{1, n}, \tag{9}$$

где $\mu_{pk}(r, s)$ — неизвестные функции, непрерывные по обеим переменным.

Учитывая интегральное представление дельта-функции

$$\delta(r - s_0) = \frac{\sqrt{1 - r^2}}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}\,(s - r)(s - s_0)}, \tag{10}$$

из соотношений (6), (9) приходим к системе уравнений для определения функций $\mu_{pk}(r, s)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \left[\frac{\mu_{pk}(r, s)}{s - s_0} + \sum_{j=1}^{n} \mu_{jk}(r, s) M_{jp}(s, s_0) \right] \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} =$$
$$= Q_{kp}(r, s_0), \quad p, k = \overline{1, n}, \quad r, s_0 \in [-1, 1], \tag{11}$$

где

$$Q_{kp}(r, s_0) = \frac{\sqrt{1 - r^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{M_{kp}(s, s_0)\, ds}{\sqrt{1 - s^2}\,(r - s)}.$$

Решение системы (11), удовлетворяющее условиям

$$\int_{-1}^{1} \mu_{pk}(r, s)\,ds = 0, \quad p, k = \overline{1, n}, \tag{12}$$

определим с помощью метода механических квадратур. Для этой цели дискретизируем ее по r и s_0 в системе точек

$$r_{2m} = s_{2m} = \cos\theta_{2m}, \quad \theta_{2m} = \pi m/N, \quad m = \overline{1, N-1}, \tag{13}$$

а для вычисления интегралов воспользуемся квадратурной формулой Гаусса — Чебышева

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(s, s_0)\,ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} f(s_{1\nu}, s_0), \quad s_{1\nu} = \cos\theta_{1\nu}, \quad \theta_{1\nu} = \frac{2\nu-1}{2N}\pi, \tag{14}$$

справедливой при $s_0 = s_{2m}$ и для сингулярных интегралов [2]. В результате из соотношений (11), (12) получим $N-1$ независимых (при фиксированном l) систем n^2N алгебраических уравнений для определения $n^2N(N-1)$ неизвестных постоянных $\mu_{pkl\nu} = \mu_{pk}(r_{2l}, s_{1\nu})$:

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jp\nu m}\mu_{jkl\nu} = \beta_{kplm},\\ \sum_{\nu=1}^{N} \mu_{pkl\nu} = 0, \quad p, k = \overline{1, n}, \quad m, l = \overline{1, N-1},\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\alpha_{jp\nu m} = \frac{\delta_{jk}}{s_{1\nu} - s_{2m}} + M_{jp\nu m}; \quad \beta_{kplm} = Q_{kp}(r_{2l}, s_{2m}) =$$

$$= \frac{\sin\theta_{2l}}{N}\sum_{\nu=1}^{N} \frac{M_{kp\nu m}}{r_{2l} - s_{1\nu}}; \quad M_{jp\nu m} = M_{jp}(s_{1\nu}, s_{2m}).$$

Количество уравнений каждой из этих систем можно уменьшить на n^2, если в (15) исключить неизвестные

$$\mu_{pklN} = -\sum_{\nu=1}^{N-1} \mu_{pkl\nu}, \quad p, k = \overline{1, n}. \tag{16}$$

Системы уравнений для остальных неизвестных принимают вид

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{n} \alpha^*_{jp\nu m}\mu_{jkl\nu} = \beta_{kplm},\\ p, k = \overline{1, n}, \quad l, m = \overline{1, N-1},\end{gathered} \tag{17}$$

где

$$\alpha^*_{jp\nu m} = \alpha_{jp\nu m} - \alpha_{jpNm}.$$

Определив постоянные $\mu_{jkl\nu}$, решение исходной системы СИУ (1) с учетом соотношений (3), (8), (9) найдем по формуле

$$\begin{gathered}\varphi_p(s) = \left[C_p - \sum_{j=1}^{n} C_j R_p\{\tilde{M}_{jk}(r), s\} + R_p\{f_k(r), s\}\right] \Big/ \sqrt{1-s^2},\\ R_p\{\omega_k(r), s\} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\omega_p(r)}{s-r} + \sum_{k=1}^{n} \omega_k(r)\,\mu^*_{pk}(r, s)\right]\sqrt{1-r^2}\,dr,\\ \mu^*_{pk}(r, s) = \mu_{pk}(r, s)/\sqrt{1-r^2} =\end{gathered} \tag{18}$$

$$= \frac{4}{N^2} \sum_{m=1}^{N} T_m(s) \sum_{\nu=1}^{N} \cos m\theta_{1\nu} \sum_{l=1}^{N} U_{l-1}(r) \sum_{j=1}^{N-1} \mu_{pkj\nu} \sin l\theta_{2j},$$

где T_m, U_m — полиномы Чебышева первого и второго рода.

Определенное выше неограниченное на концах решение принадлежит к наиболее широкому классу функций. Если условия (2) (или часть их) отсутствуют, то аналогичным образом можно получить решение в других классах. В частности, если функции $f_p(s)$ и ядра $M_{kp}(s, s_0)$ по второй переменной удовлетворяют условию Гельдера (ядра $M_{kp}(s, s_0)$ в данном случае могут содержать интегрируемую по s особенность), то для обращения системы (1) в классе функций, ограниченных на концах, можно непосредственно воспользоваться полученными выше результатами. Действительно, после дифференцирования системы (1) по s_0 и интегрирования по частям с использованием условий $\varphi_p(\pm 1) = 0$, $p = \overline{1, n}$, придем к системе СИУ для функций $\varphi_p'(s)$, не ограниченных на концах. Единственность решения этой системы обусловлена наличием очевидных условий $\int\limits_{-1}^{1} \varphi_p'(s)\, ds = 0$, а обращение ее можно осуществить изложенным выше способом.

1. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. — М. : Наука, 1973.—303 с.
2. *Карпенко Л. М.* Про зображення функцій за допомогою многочленів Якобі та обчислення деяких інтегралів типу Коші. — Вісник Київ. ун-ту. Сер. математики та механіки, 1971, № 13, с. 74—79.
3. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1983.—278 с.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 16.11.83.

УДК 517.63

О. В. Побережный, М. Д. Ткач

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЧИСЛЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Проблеме численного обращения преобразования Лапласа посвящено много исследований. Достаточно полный анализ приведен в [3—6]. Как правило, все существующие методы основаны либо на разложении оригинала в ряды по специальным функциям, либо на замене функции-изображения другой функцией. В последнее время получил развитие метод, основанный на аппроксимации экспоненциальной функции в формуле Меллина. Развитию этого метода, оценке точности численного обращения преобразования Лапласа посвящена настоящая работа.

1. Представление оригинала $f(t)$ через его изображение $F(s)$ по Лапласу определяется формулой Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} F(s)\, e^{st} ds. \tag{1}$$

Чаще всего на практике известно преобразование Лапласа $F(s)$ функции $f(t)$ с некоторой абсциссой абсолютной сходимости γ_0, не обязательно равной нулю. Запишем формулу (1) в области регулярности функции изображения. С этой целью обозначим $F_*(s) = F(s + \gamma_0)$, тогда (1) примет вид

$$f(t) = e^{\gamma_0 t} f_*(t), \tag{2}$$