

$$\times \left[\prod_{k=1}^q (\tau_k - \tau_{k-1}) \right]^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{p+q}} \exp \left[\frac{i}{2} \sum_{k=1}^{p+q} (C_{p+q}^{-1} u, u) \right] \times \\ \times f(u_1, \dots, u_p) g(u_{p+1}, \dots, u_{p+q}) du.$$

Для доказательства строится функционал

$$h(x) = f(x) g \left[\int_a^b \alpha_{p+1}(t) dx(t), \dots, \int_a^b \alpha_{p+q}(t) dx(t) \right],$$

для которого специально выбираются функции $\alpha_{p+j}(t)$ ($j = \overline{1, q}$), а затем применяется теорема 1.

1. Далецкий Ю. Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями.—Успехи мат. наук, 1962, 17, вып. 5, с. 3—115.
2. Егоров А. Д., Янович Л. А. О точном и приближенном вычислении интегралов по гауссовой мере.—Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1971, № 1, с. 62—73.
3. Ладохин В. И. О «мере» в функциональном пространстве, отвечающей комплексному коэффициенту диффузии.—Учен. зап. Казан. ун-т, 1963, 123, кн. 6, с. 36—42.
4. Ладохин В. И. Вычисление континуальных интегралов от функционалов $\Phi \left[\int_0^T \alpha_1(\tau) dx(\tau), \dots, \int_0^T \alpha_m(\tau) dx(\tau) \right]$.—Успехи мат. наук, 1964, 19, вып. 1, с. 155—159.
5. Маслов В. П. Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана.—М.: Наука, 1976.—192 с.
6. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.—М.: Атомиздат, 1976.—256 с.
7. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям.—М.: Мир, 1968.—382 с.
8. Albeverio S., Høegh-Krohn R. Mathematical theory of Feynman path integrals.—Institute of Math. University of Oslo, 1974.—126 p.—(Preprint/ISBN; 82-553-0193-3).
9. Cameron R. H. A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals.—Journ. of Math. and Phys., 1960, 39, № 2, p. 126—140.
10. Combe Ph., Riedeau G., Rodriguez R., Sirugue-Collin M. On some mathematical problems in the definition of Feynman path integrals.—Marseille, 1976.—24 p.—(Preprint/Centre de Physique Theoret.; 76P. 845).

Львовский государственный
ун-т им. Ив. Франко

Получено 08. 02. 84.

УДК 536.21

М. Я. Бартиш, И. В. Огирко, В. М. Фарат

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ НЬЮТОНА — КАНТОРОВИЧА

В [5] для решения одномерного нелинейного уравнения теплопроводности применен метод Ньютона—Канторовича. В данной статье рассмотрен случай двумерного нелинейного уравнения теплопроводности.

Как известно [4], уравнение теплопроводности с учетом зависимости коэффициента теплопроводности λ от температуры $t(x, y)$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right] = -\omega \text{ в } D, \quad (1)$$

где ω — плотность внутренних источников тепла. Для простоты граничные условия выберем типа

$$t|_{\Gamma} = \varphi(x, y). \quad (2)$$

При решении задачи (1)—(2) методом Ньютона—Канторовича [3] исходная задача заменяется последовательностью линейных краевых задач:

$$\lambda^{(n)} \left[\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial y^2} \right] + 2 \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} \left[\frac{\partial t^{(n)}}{\partial x} \frac{\partial V^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial t^{(n)}}{\partial y} \frac{\partial V^{(n)}}{\partial y} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d^2\lambda^{(n)}}{dt^2} \left[\left(\frac{\partial t^{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t^{(n)}}{\partial y} \right)^2 \right] V^{(n)} + \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} \left[\frac{\partial^2 t^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t^{(n)}}{\partial y^2} \right] V^{(n)} = \\
& = \lambda^{(n)} \left[\frac{\partial^2 t^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t^{(n)}}{\partial y^2} \right] + \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} \left[\left(\frac{\partial t^{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t^{(n)}}{\partial y} \right)^2 \right] + \omega \text{ в } D, \quad (3)
\end{aligned}$$

$$t^{(n+1)} = t^{(n)} - \alpha_n V^{(n)}, \quad 0 < \alpha_n \leq 1, \quad t^{(n+1)}|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $V^{(n)}(x, y)$ — неизвестная функция; α_n — параметр, обеспечивающий сходимость итерационного процесса в случае «плохого» начального приближения. На практике, как правило, $\alpha_n = 1$.

Дискретизируем непрерывную область D равномерной сеткой [2]:

$$D_h = \{(x_i, y_j) : x_i = ih_x, y_j = jh_y\}, \quad (5)$$

где h_x, h_y — шаги сетки соответственно по осям x, y . Для простоты будем считать, что D является прямоугольником. При решении уравнения (3) производные функции $V^{(n)}(x, y)$ заменим разностями со вторым порядком аппроксимации [2]. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
b_{1,ij}^{(n)} V_{i,j-1}^{(n)} + b_{2,ij}^{(n)} V_{i-1,j}^{(n)} + b_{3,ij}^{(n)} V_{i,j}^{(n)} + b_{4,ij}^{(n)} V_{i+1,j}^{(n)} + b_{5,ij}^{(n)} V_{i,j+1}^{(n)} = b_{6,ij}^{(n)}, \quad (6) \\
i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1},
\end{aligned}$$

где $V_{i,j}^{(n)} = 0$; $i = \overline{0, M}$ при $j = 0, N$; $j = \overline{0, N}$ при $i = 0, M$,

$$b_1^{(n)} = \frac{\lambda^{(n)}}{h_y^2} - \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} \frac{\partial t^{(n)}}{\partial y} / h_y,$$

$$b_2^{(n)} = \frac{\lambda^{(n)}}{h_x^2} - \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} \frac{\partial t^{(n)}}{\partial x} / h_x,$$

$$b_3^{(n)} = \frac{d^2\lambda^{(n)}}{dt^2} \left[\left(\frac{\partial t^{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t^{(n)}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} \left[\frac{\partial^2 t^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t^{(n)}}{\partial y^2} \right] - \left[\frac{2\lambda^{(n)}}{h_x^2} + \frac{2\lambda^{(n)}}{h_y^2} \right],$$

$$b_4^{(n)} = \lambda^{(n)} / h_x^2 + \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} \frac{\partial t^{(n)}}{\partial x} / h_x,$$

$$b_5^{(n)} = \lambda^{(n)} / h_y^2 + \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} \frac{\partial t^{(n)}}{\partial y} / h_y,$$

$$b_6^{(n)} = \lambda^{(n)} \left[\frac{\partial^2 t^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t^{(n)}}{\partial y^2} \right] + \frac{d\lambda^{(n)}}{dt} \left[\left(\frac{\partial t^{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t^{(n)}}{\partial y} \right)^2 \right] + \omega.$$

Коэффициенты $b_i^{(n)}$ ($i = \overline{1, 6}$) системы (6) определим приближенно, а именно: $b_i^{(n)} = \bar{b}_i^{(n)} + o(h_x^2 + h_y^2)$, т. е. решаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
\bar{b}_{1,ij}^{(n)} V_{i,j-1}^{(n)} + \bar{b}_{2,ij}^{(n)} V_{i-1,j}^{(n)} + \bar{b}_{3,ij}^{(n)} V_{i,j}^{(n)} + \bar{b}_{4,ij}^{(n)} V_{i+1,j}^{(n)} + \bar{b}_{5,ij}^{(n)} V_{i,j+1}^{(n)} = \bar{b}_{6,ij}^{(n)}, \quad (7) \\
i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1},
\end{aligned}$$

где $V_{i,j}^{(n)} = 0$; $i = \overline{0, M}$ при $j = 0, N$; $j = \overline{0, N}$ при $i = 0, M$. Для решения системы (7) нами использовался метод верхней релаксации, можно пользоваться также матричной прогонкой или другим методом.

Для практической реализации изложенного метода нами решалась задача (1)–(2) в случае малоуглеродной стали марки 08 КП [1]. Область D выбрана в виде квадрата со стороной 0,5, а $\omega = 1$. Граничные условия заданы так: на горизонтальных сторонах $t = 500^\circ\text{C} + 1000^\circ\text{C}x$, на правой вертикальной — $t = 1000^\circ\text{C}$, на левой — $t = 500^\circ\text{C}$. Для определения $\lambda(t(x, y))$ использовали табличные данные из [1], при этом рассматривали аппроксимацию трех видов [2], а именно:

1. $\lambda(t)$ заменяли на промежутке $[\underline{t}, \bar{t}]$ прямой линией

$$L_1(t) = a + bt, \quad (8)$$

где коэффициенты выбраны из условия наилучшего приближения $L_1(t)$ к табличным значениям $\lambda(t)$ в точках промежутка $[t, \bar{t}]$.

2. $\lambda(t)$ заменяли ломаной линией, когда кривая на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ заменяется прямой по интерполяционной формуле Лагранжа [2]:

$$L_1(t) = \lambda(t_i) \frac{t - t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} + \lambda(t_{i+1}) \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}. \quad (9)$$

3. $\lambda(t)$ заменяли на каждом промежутке $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ отрезком параболы по интерполяционной формуле Лагранжа [2]:

$$L_2(t) = \lambda(t_{i-1}) \frac{(t - t_i)(t - t_{i+1})}{(t_{i-1} - t_i)(t_{i-1} - t_{i+1})} + \lambda(t_i) \frac{(t - t_{i-1})(t - t_{i+1})}{(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})} + \lambda(t_{i+1}) \frac{(t - t_{i-1})(t - t_i)}{(t_{i+1} - t_{i-1})(t_{i+1} - t_i)}. \quad (10)$$

Решение приведенной задачи для $y = 0,25$ ($h_x = h_y = 0,05$) дано в табл. 1, при этом для определения $L(t)$ использовались формулы (9), (10), а также (8) в случаях $\bar{t} = 500$, $\bar{t} = 1000$:

$$L_1(t) = 39,233 - 0,0166t \quad (11)$$

и $\bar{t} = 0$, $\bar{t} = 1000$:

$$L_1(t) = 54,2 - 0,036t. \quad (12)$$

При использовании аппроксимации (8) мы практически не можем хорошо удовлетворить таблицу из [1], что существенно влияет на неточность результатов вычислений. На практике целесообразно использовать аппроксимацию (9), как наиболее простую и достаточно эффективную, а также квадратную сетку $h_x = h_y$.

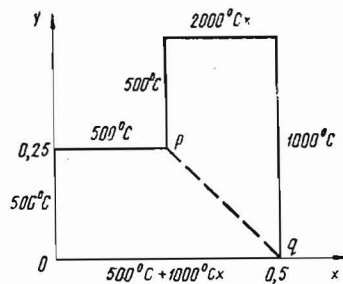


Таблица 1

λ	x								
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
(9)	543,6	588,5	634,8	681,8	730,3	780,7	832,8	888,9	944,1
(10)	543,9	588,7	635,1	682,1	730,8	781,5	833,8	890,5	944,7
(11)	546,0	593,0	640,9	689,4	738,7	788,8	839,6	891,6	944,9
(12)	542,5	586,5	631,8	678,4	726,2	775,4	826,5	880,0	937,2

Кроме того, нами решалась задача (1) — (2) для более сложной области D , приведенной на рисунке. Результаты расчетов даны в табл. 2 для линии pq ($x + y = 0,5$). Отметим, что результаты получены за 4—5 итераций Ньютона — Канторовича, что говорит об эффективности метода.

Таблица 2

λ	x					
	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
(9)	500,0	652,9	760,9	858,2	939,0	1000
(10)	500,0	653,7	761,3	857,4	938,9	1000
(11)	500,0	662,4	771,3	862,2	939,4	1000
(12)	500,0	649,3	755,4	850,0	934,2	1000

1. Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебание в условиях высоких температур. — М.: Машиностроение, 1965.—568 с.

2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: В 2-х т. — М.: Наука: Физматгиз, 1966. — Т. 2. 639 с.
3. Канторович Л. В. О методе Ньютона. — Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1949, 28, с. 104—144.
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Семерак М. М. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов. — Киев: Наук. думка, 1981. — 344 с.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.

Львовский государственный ун-т им. Ив. Франко

Получено 16.01.84.

УДК 517.9

М. Г. Кривцун

ЧИСЛЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящее время разработаны и эффективно используются на практике прямые численные методы решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ), с помощью которых при произвольной ограниченной правой части можно получить решение в виде рядов по ортогональным полиномам, коэффициенты которых определяются из систем алгебраических уравнений [1]. Однако во многих задачах математической физики, которые сводятся к решению СИУ, необходимо иметь решение в виде аналитической зависимости от правой части, т. е. знать формулу обращения. Например, если в задаче механики при фиксированной геометрии задачи необходимо варьировать прилагаемую нагрузку, то целесообразно иметь фундаментальное решение, чтобы не решать СИУ для каждой нагрузки заново. В контактных (смешанных) задачах теории упругости для тел с разрезами фундаментальное решение используется непосредственно при построении СИУ указанных задач.

Обратить СИУ можно практически лишь в том случае, если их регулярные ядра вырожденные или допускают подходящую аппроксимацию. Когда ядра СИУ сравнительно простой структуры, то приближенную формулу обращения можно также построить с помощью метода малого параметра. В общем же случае для достижения этой цели необходимо привлекать численные методы.

Ниже предлагается численный способ построения формул обращения системы СИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{\varphi_p(s)}{s-s_0} + \sum_{k=1}^n \varphi_k(s) M_{kp}(s, s_0) \right] ds = f_p(s_0), \quad (1)$$

$$p = \overline{1, n}, \quad s_0 \in [-1, 1],$$

где ядра $M_{kp}(s, s_0)$ и свободные члены $f_p(s)$ суть заданные на $[-1, 1]$ ограниченные функции.

Решение системы (1) будем искать в классе функций, неограниченных на концах, единственность которого обеспечивается наличием условий

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_p(s) ds = C_p, \quad p = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Представим функции $\varphi_p(s)$ в виде

$$\varphi_p(s) = \frac{C_p}{\sqrt{1-s^2}} + \nu_p(s), \quad p = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Тогда для определения новых неизвестных функций $\nu_p(s)$ имеем систему СИУ

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \nu_p(s) \left[\frac{1}{s-s_0} + \sum_{k=1}^n \nu_k(s) M_{kp}(s, s_0) \right] ds = \psi_p(s_0), \quad (4)$$