Таким образом, доказано $\rho(L) = \varnothing$, если выполняются условия 1°—6°, тогда $\mathbb{C} = S_p(L) \cup S_c(L)$, $S_r(L) = \varnothing$ и $S_p(L)$ — дискретное множество не имеет точек накопления, имеющее асимптотическое представление (17), где $\rho(L)$ — резольвентное множество; $S_r(L)$ — остаточный спектр.

1. *Беллабаси Ю.* Регуляризованные следы многоточечной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков. — Дифференц. уравнения, 1983, **19**, № 6, с. 938—944.
2. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами. — Там же, 1977, **13**, № 4, с. 637—645.
3. *Бобик О. І., Боднарчук П. І., Пташник Б. Й., Скоробогатько В. Я.* Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.— К.: Наук. думка, 1972.—175 с.
4. *Жданович В. Ф.* Формулы для нулей полиномов Дирихле и квазиполиномов. — ДАН СССР, 1960, **135**, № 5, с. 1046—1049.
5. *Завгородний М. Г.* Асимптотика и структура спектра многоточечной краевой задачи / Воронеж. ун-т. — Воронеж, 1982.—21 с. — Рукопись деп. в ВИНИТИ 16.02.83, № 861—83. Деп.
6. *Завгородний М. Г., Покорный Ю. В.* Об асимптотике спектра краевой задачи Валле — Пуссена. — В кн.: Краевые задачи: Межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1979, с. 133—135.
7. *Лидский В. Б., Садовничий В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций.— Функциональный анализ и его применения, 1967, **1**, № 2, с. 52—59.
8. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.—371 с.
9. *Мамедов К. С.* Асимптотика функции распределения собственных чисел абстрактного дифференциального оператора.— Мат. заметки, 1982, **31**, № 1, с. 41—51.

Ин-т прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 17.01.84

УДК 517.946 : 517.21 : 518.31

З. И. Васюнык, А. К. Прикарпатский

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ГАМИЛЬТОНОВОМ ФОРМАЛИЗМЕ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ ДИРАКА

1. Рассмотрим дифференциальную операцию Дирака с быстроубывающими «потенциалами» $q(x, t)$, $r(x, t)$ из класса Шварца [1—8]:

$$\frac{\partial}{\partial x} y = i\lambda(x, t)\sigma y + \begin{bmatrix} 0 & q(x, t) \\ r(x, t) & 0 \end{bmatrix} y, \quad \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $y \in C^{(1)}(\mathbb{R}^1, \mathbb{C}^2)$; параметр $\lambda \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^1)$ — некоторая комплекснозначная функция переменных x, $t \in \mathbb{R}^1$. Опишем класс динамических систем для функций $q(x, t)$, $r(x, t)$, удовлетворяющих следующему условию: обратная задача рассеяния для них является разрешимой при помощи алгебраического алгоритма Гельфанда — Левитана — Марченко. С этой целью, следуя схеме работ [2, 4—8], построим фундаментальные решения Ψ и Φ для $\forall t \in \mathbb{R}^1$ как параметра со следующим асимптотическим поведением на $x = \pm\infty$:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t; \lambda)|_{x\to-\infty} &\sim \begin{bmatrix} e^{i\gamma(x,t)} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma(x,t)} \end{bmatrix} = \Psi_-, \\ \Phi(x, t; \lambda)_{x\to+\infty} &\sim \begin{bmatrix} e^{i\gamma(x,t)} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma(x,t)} \end{bmatrix} = \Phi_+, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\gamma \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^1); \ \frac{\partial}{\partial x}\gamma(x, t) = \lambda(x, t).$$

Тогда, очевидно, выполнено следующее соотношение:

$$\Psi(x, t; \lambda) := \Phi(x, t; \lambda) S(t, \lambda), \tag{3}$$

где $S(t, \lambda) = \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$ — матрица «рассеяния» для операции Дирака (1). Очевидно, $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$.

2. Исследуем теперь эволюцию по параметру $t \in \mathbb{R}^1$ для матрицы рассеяния $S(t, \lambda)$. С этой целью запишем следующее тождество:

$$\Psi^{-1}\Psi_t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = i \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma(x, t)\, \Psi^{-1}\sigma\Psi + \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^{-1} \begin{bmatrix} 0 & q_t \\ r_t & 0 \end{bmatrix} \Psi dx,$$

используя его вместе с (3), находим, что

$$S^{-1}S_t + S^{-1}\Phi_+^{-1}\Phi_{+,t}S_t - \Psi_-^{-1}\Psi_{-,t} = i\gamma_t S^{-1}\Phi_+^{-1}\sigma\Phi_+ - i\gamma_t\, \Psi_-^{-1}\sigma\Psi_- +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^{-1} \begin{bmatrix} 0 & q_t \\ r_t & 0 \end{bmatrix} \Psi dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_t(x, t)(\Psi^{-1}\sigma\Psi)_x dx. \tag{4}$$

Так как $[\sigma, \Phi_+] = [\sigma, \Psi_-] = 0$, из (4) следует важное соотношение:

$$S^{-1}S_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^{-1} \begin{bmatrix} 0 & q_t \\ r_t & 0 \end{bmatrix} \Psi dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_t(x, t)\, \Psi^{-1} \left[\sigma, \begin{bmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{bmatrix}\right] \Psi dx. \tag{5}$$

Вводя билинейные формы

$$I(\psi, \varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, [q_t\psi_2\varphi_2 - r_t\psi_1\varphi_1],$$

$$J(\psi, \varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_t(x, t)\, dx\, [q\psi_2\varphi_2 + r\psi_1\varphi_1],$$

для данных рассеяния $\frac{b}{\bar{a}}$ и $\frac{\bar{b}}{a}$ легко получаем из (5) следующие выражения:

$$\left(\frac{\bar{b}}{a}\right)_t = \frac{-K(\psi, \psi)}{a\bar{b}} \left(\frac{\bar{b}}{a}\right),$$

$$\left(\frac{b}{\bar{a}}\right)_t = \frac{K(\bar{\psi}, \bar{\psi})}{\bar{a}b} \left(\frac{b}{\bar{a}}\right), \tag{6}$$

где $K(\psi, \varphi) := I(\psi, \varphi) + 2iJ(\psi, \varphi)$;

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & \bar{\psi}_1 \\ \psi_2 & \bar{\psi}_2 \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \bar{\varphi}_1 \\ \varphi_2 & \bar{\varphi}_2 \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, для разрешимости уравнений (6) необходимы следующие соотношения:

$$a\bar{b} = \int_{-\infty}^{+\infty} d(\psi_1\psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, [q\psi_2^2 + r\psi_1^2],$$

$$\bar{a}b = \int_{-\infty}^{+\infty} d(\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, [\bar{q}\bar{\psi}_2^2 + \bar{r}\bar{\psi}_1^2], \tag{7}$$

$$ab\omega(\lambda_0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Omega(\lambda, t)\, [q\psi_2^2 + r\psi_1^2],$$

где $K(\psi, \psi) = -\omega(\lambda_0, t)\, a\bar{b}$; $K(\bar{\psi}, \bar{\psi}) = \omega(\lambda_0, t)\, b\bar{a}$; $\Omega(\lambda, t)$ — некоторая мероморфная функция параметра $\lambda(x, t) \in \mathbb{C}^1$. Для $\forall t \in \mathbb{R}^1$ уравнения (6) легко интегрируются:

$$\left(\frac{\bar{b}}{a}\right)(t) = \frac{\bar{b}}{a}(0) \exp\left(\int_0^t \omega(\lambda_0, \tau)\, d\tau\right),$$

$$\left(\frac{b}{\bar{a}}\right)(t) = \left(\frac{b}{\bar{a}}\right)(0) \exp\left(-\int_0^t \omega(\lambda_0, \tau)\, d\tau\right). \tag{8}$$

Так как согласно алгебраическому алгоритму метода обратной задачи разрешимость (8) является достаточной для определения коэффициентов операции Дирака (1) по матрице рассеяния $S(\lambda, t)$, из условий (6) и (7) получаем [2] характеристическое уравнение для коэффициентов указанного класса операций Дирака:

$$\begin{pmatrix} -r_t \\ q_t \end{pmatrix} = \Omega(\Lambda^+, t)\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} + 2if(\Lambda^+; x, t)\left(\frac{r}{q}\right), \tag{9}$$

где мы положим, что $\gamma_t(x, t) := f(\lambda; x, t)$ — некоторая мероморфная функция параметра $\lambda(x, t) \in \mathbb{C}^1$ для $\forall x, t \in \mathbb{R}^1$ и рекурсионный оператор Λ^+ имеет вид

$$\Lambda^+ = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + 2r\int\limits_x^\infty dyq & 2q\int\limits_x^\infty dyq \\ -2r\int\limits_x^\infty dyr & -\frac{\partial}{\partial x} - 2q\int\limits_x^\infty dyr \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Из условия $\gamma_x(x, t) = \lambda(x, t)$ находим следующее дифференциальное уравнение в частных производных для «спектрального параметра» $\lambda(x, t) \in \mathbb{C}^1$:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda(0, x) := \lambda_0(x), \tag{11}$$

которое считается разрешимым при заданной начальной функции $\lambda(0, x) = \lambda_0(x)$ из класса $C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{C}^1)$. Приведенные выше уравнения (9) обобщают ранее полученные динамические системы для операции Дирака в работах [2, 5]. Результат работы [5] следует из (9)—(11) при условии $\lambda_x(x, t) \equiv 0 \ \forall x, t \in \mathbb{R}^1$. Тогда, очевидно, функция $f(\lambda; x, t) = xf(\lambda, t)$ и уравнения (9) превращаются в следующие [5]:

$$\begin{pmatrix} -r_t \\ q_t \end{pmatrix} = \Omega(\Lambda^+, t)\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} + 2if(\Lambda^+; t)\begin{pmatrix} xr \\ xq \end{pmatrix}. \tag{12}$$

В том случае, когда $\lambda_t(x, t) \equiv 0$, $\lambda_x(x, t) = \varepsilon\lambda(x, t)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$, из (9) и (11) легко находим, что

$$\begin{pmatrix} -r_t \\ q_t \end{pmatrix} = \Omega(\Lambda^+, t)\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} + 2if(\Lambda^+ e^{-\varepsilon x}, t)\begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}. \tag{13}$$

В общем случае уравнения вида (9) — (11) представляют нетривиальный интерес с точки зрения теории возмущений для динамических систем, ассоциированных с операцией Дирака (1) [4, 6].

3. Перейдем к гамильтоновой интерпретации полученных выше динамических систем (9). Сначала положим $f(\lambda; x, t) \equiv 0$. Тогда эти уравнения можно представить в гамильтоновом виде [3, 9]:

$$\begin{pmatrix} r_t \\ q_t \end{pmatrix} = -L \operatorname*{res}_{\lambda=\infty}[l(\lambda, t)\nabla A(\lambda; t)]. \tag{14}$$

Здесь $l(\lambda, t)$ — некоторая мероморфная функция от $\lambda \in \bar{\mathbb{C}}^1$; $A(\lambda) := \ln a(\lambda, t)$; $\nabla = \left(\frac{\delta}{\delta r}, \frac{\delta}{\delta q}\right)^\tau$ (τ — значок транспонирования); $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ — кососимметрическая матрица, задающая на пространстве функционалов $D[q, r]$ от функций $q, r \in C^{(1)}(\mathbb{R}^1; \bar{\mathbb{C}}^1) \ \forall t \in \mathbb{R}^1$ симплектическую структуру по правилу $\forall F, G \in D[q, r]$; скобка Пуассона $\{F, G\}$ имеет вид [9]

$$\{F, G\} := \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \langle\nabla F, L\nabla G\rangle, \tag{15}$$

где $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — обычная билинейная форма в $\bar{\mathbb{C}}^2$.

Динамическая система (14) допускает еще одну симплектическую структуру, скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_0$ которой имеет вид [3, 9]

$$\{F, G\}_0 := \sum_{-\infty}^{\infty} dx \langle\nabla F, M\nabla G\rangle, \tag{16}$$

где кососимметрический оператор M имеет форму [3, 9]

$$M=-J\Lambda^{+}LJ=\frac{1}{2i}\begin{bmatrix}-2r\int\limits_x^\infty rdy & \frac{\partial}{\partial x}+2r\int\limits_x^\infty qdy\\ \frac{\partial}{\partial x}+2q\int\limits_x^\infty rdy & -2q\int\limits_x^\infty qdy\end{bmatrix}. \tag{17}$$

Условие, что операторы L, M удовлетворяют тождеству Якоби [9], проверяется непосредственным вычислением. Так как операторы L и M удовлетворяют соотношению $M\nabla A(\lambda,\ t)=\lambda L\nabla A(\lambda,\ t)$, то, очевидно, существует такая мероморфная функция $\tilde{\Omega}(\lambda)$ от $\lambda\in\mathbb{C}^1$, что уравнения (14) примут вид

$$\begin{pmatrix}r_t\\ q_t\end{pmatrix}=-L\tilde{\Omega}(L^{(-1)}M)\nabla H_0,$$

где (18)

$$H_0=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dxqr.$$

Выражение (18) естественно обобщается на случай $f(\lambda;\ x,\ t)\neq 0$:

$$\begin{pmatrix}r_t\\ q_t\end{pmatrix}=L\tilde{\Omega}(L^{-1}M)\nabla H_0+2iJf(\Lambda^{+},\ x,\ t)JL\nabla H_0. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь более детально функцию $A(\lambda,\ t)=\ln a(\lambda,\ t)$. Из (5) следует, что $\frac{d}{dt}A(\lambda(x,\ t),\ t)=0\ \forall x,\ t\in\mathbb{R}^1$. Таким образом, учитывая мероморфную зависимость функции $\lambda(x,\ t)$ от произвольного начального данного $\lambda(0,\ 0)=\lambda_0\in\mathbb{C}^1$, функцию $A(\lambda(x,\ t),\ t)=\tilde{A}(\lambda_0,\ x,\ t)$ можно использовать как производящую функцию законов сохранения $A_j(x,\ t)\in\in D[q,\ r]$, $j\in\mathbb{Z}$, разлагая ее в окрестности $|\lambda_0|\to\infty$ в ряд по обратным степеням λ_0^{-1}. Из соотношения $M\nabla A(\lambda)=L\lambda\nabla A(\lambda)$ следует, что $\{A_j,\ A_k\}=0\ \forall j,\ k\in\mathbb{Z}$. Из (19) легко получить уравнения для функционалов A_j, $j\in\mathbb{Z}$:

$$\frac{\partial A_j}{\partial t}+\{A_j,\ F\}=0, \tag{20}$$

где $F\in D[q,\ r]$ — функционал, удовлетворяющий условию

$$\nabla F:=2iLJf(\Lambda^{+};\ x,\ t)JL\nabla H_0. \tag{21}$$

Таким образом, уравнения (20), (21) являются квазигамильтоновой записью динамических систем (9) с параметрической спектральной зависимостью (11).

Представляет значительный интерес перенесение проведенной выше конструкции на случай периодических граничных условий с целью изучения уравнений эргодических деформаций квазипериодических потоков для динамических систем, ассоциированных с операцией Дирака.

1. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов.—М.: Наука, 1980.—319 с.
2. *Ablowitz M., Kaup D., Newell A., Segur H.* The inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems.—Stud. Appl. Math., 1974, 53, № 4, p. 249—315.
3. *Arthur M., Case K.* Gradient theorem for completely Integrable Hamiltonian systems.—J. Math. Phys., 1982, 23, № 10, p. 1771—1777.
4. *Dodd R. K., Morris H. C., Eaglton J.* Perturbation theory for the nealy integrable non-linear equations associated with a modified Zakharov—Shabat scattering problem.—J. Phys. A.: Math. and Gen., 1980, 13, № 7, p. 1455—1465.
5. *Gupta M. R., Ray J.* Extension of inverse scattering method to nonlinear evolution equation in the uniform medium.—J. Math. Phys., 1981, 22, № 10, p. 2180—2183.
6. *Kaup D.* A perturbation expansion for the Zakharov—Shabat inverse scattering transform.—SIAM J. Appl. Mathem., 1976, 31, № 1, p. 121—133.
7. *Kaup D.* Clousure of the Squared Zakharov—Shabat Eigenstates.—J. Math. Anal. and Appl., 1976, 54, № 5, p. 849—864.

8. *Kaup D., Newell A.* Evolution Equations, Singular Dispersion Relation, and Moting Eigenvalues.—Adv. Math., 1979, 31, № 1, p. 67—100.
9. *Magri F.* A Geometrical approach to the non-linear solvable equations.—Lect. Notes Phys., 1980, 120, p. 233—263.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР, Львов Получено 18.11.83

УДК 517.948

Ю. И. Ковальчик

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ФЕЙНМАНА ОТ ФУНКЦИОНАЛОВ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ФУНКЦИЯМИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Большой интерес к интегралу Фейнмана [7] вызван его приложениями в теоретической физике. Этому интегралу посвящено очень много работ, выполненных разными авторами. В краткой статье нет возможности перечислить даже главнейшие работы, посвященные фейнмановскому интегралу. Отметим только, что, например, в монографиях [5, 6] можно найти некоторые литературные ссылки. Интеграл Фейнмана порождает «меру», не обладающую ограниченной вариацией [1, 9] и не являющуюся счетно-аддитивной функцией множества [3]. Строгое математическое обоснование фейнмановского интеграла впервые предложил Р. Камерон [9]. Если подынтегральный функционал $F(x)$, где $x \in C$ (C — пространство непрерывных функций, заданных на сегменте $[a, b]$), удовлетворяет некоторым жестким ограничениям, в частности $F(\lambda x)$ при фиксированном x является аналитической функцией параметра λ, то интеграл Фейнмана от функционала $F: C \to \mathbb{R}^1$ существует [9]. Однако в [9] подчеркивалось, что эти условия только достаточные, и приводилась без доказательства теорема, принадлежащая Вудворду, в которой утверждалось, что интеграл Фейнмана от функционала $F(x) = f\left[\int_a^b \alpha(t)\,dx(t)\right]$ существует, хотя $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ не только не является аналитической, но даже не будет непрерывной функцией. На f достаточно наложить требование абсолютной интегрируемости на всей действительной оси.

В данной статье рассмотрим три класса функционалов, являющихся функциями линейных функционалов, интегралы Фейнмана от которых существуют и даются формулы для их вычисления через конечнократные интегралы. В первой теореме обобщим результат Вудворда [9] на случай функции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. Исследование отображения $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ при $n > 1$ важно для приложений, в частности, для приближенного вычисления интегралов Фейнмана.

Определим интеграл Фейнмана. Пусть C — пространство непрерывных функций $x: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^1$, удовлетворяющих условию $x(a) = 0$, с равномерной нормой, $x \mapsto F(x)$ — функционал, заданный на C и имеющий смысл на функциях, которые допускают разрывы первого рода в конечном числе точек. Разобьем сегмент $[a, b]$ на m частей с помощью разбиения $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ так, что $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_j (t_j - t_{j-1}) = 0$. Для каждой кривой $x(\cdot)$ построим ступенчатую $\bar{x}^{(m)}(\cdot)$:

$$\bar{x}^{(m)}(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} x(t_1) \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ x(t_k) \text{ при } t_{k-1} < t \leqslant t_k,\ k = \overline{2, m}, \end{cases}$$

и положим $x(t_k) = x_k$ $(k = \overline{0, m})$. На ступенчатой $\bar{x}^{(m)}(\cdot)$ функционал превратился в функцию m переменных: $F(\bar{x}^{(m)}) = F_m(x_1, \ldots, x_m)$.

Интеграл Фейнмана от функционала $x \mapsto F(x)$ по пространству C определим следующим образом:

$$\int\limits_C F(x)\,dx \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} [2\pi i (t_k - t_{k-1})]^{-\frac{1}{2}} \times$$