УДК 517.946

В. К. Романко

ОБ ОБЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе изучается разрешимость смешанных краевых задач для одного типа систем уравнений. Некоторые результаты для рассматриваемых систем уравнений были получены ранее в работах [3, 4]. Периодические краевые условия для таких и более общих гиперболических систем были изучены в работе [2].

Рассматривается система уравнений вида

$$Lu(x, t) \equiv D_t u - AP(D_x) u = f(x, t), \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2)$; $t \in (0, T)$; $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V = \{x_l \in (0, 2\pi), l = \overline{1, n}\}$; $f = (f_1, f_2)$; A — ненулевая квадратная комплексная матрица; $P(D_x)$ — линейная дифференциальная операция в кубе V с комплексными коэффициентами:

$$P(D_x) = \sum_{|\alpha| \leqslant r} p_\alpha D_x^\alpha, \quad D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_j = 0, 1, 2, \ldots, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

По каждой переменной x_j, $j = \overline{1, n}$, берутся периодические краевые условия

$$D_{x_j}^{l_j} u(x, t)\Big|_{x_j=0} = D_{x_j}^{l_j} u(x, t)\Big|_{x_j=2\pi}, \quad l_j = \overline{0, r_j - 1}, \tag{2}$$

а по t рассматриваются общие краевые условия

$$M_1 u(x, 0) + M_2 u(x, T) = 0. \tag{3}$$

Здесь r_j — порядок операции $P(D_x)$ по переменной x_j; M_1, M_2 — квадратные комплексные матрицы; $\operatorname{rang}(M_1, M_2) = 2$.

Пусть $\mathcal{H} \equiv \mathcal{L}_2(V \times [0, T])$ — гильбертово пространство комплекснозначных вектор-функций с двумя компонентами и с интегрируемым квадратом модуля, и пусть $f(x, t) \in \mathcal{H}$.

Определение. Элемент $u(x, t) \in \mathcal{H}$ называется решением граничной задачи (1), (2), (3), если найдется последовательность $\{u_N\}$ бесконечно дифференцируемых вектор-функций, удовлетворяющих граничным условиям (2), (3), таких, что в смысле сходимости в $\mathcal{H}$

$$u_N(x, t) \to u(x, t), \quad Lu_N(x, t) \to f(x, t), \quad N \to \infty.$$

Этим определением задаче (1), (2), (3) поставлен в соответствие линейный замкнутый оператор L с плотной в $\mathcal{H}$ областью определения. Нас интересует вопрос, как по заданным системе (1) и условиям периодичности (2) найти такую пару матриц M_1, M_2, чтобы полученный оператор L был нётеровым, т. е. его ядро и коядро конечномерны и задача разрешима для всякой $f(x, t) \in \mathcal{H}$, удовлетворяющей конечному числу условий.

Введем следующие обозначения: ω_1, ω_2 — собственные значения A; h_1 — собственный и h_2 — собственный или присоединенный векторы A; $h_j = \operatorname{col}(h_{1j}, h_{2j})$, $j = 1, 2$; (h_1, h_2) — матрица, у которой h_1 — первый столбец, h_2 — второй столбец; $|H| = \det(h_1, h_2)$; $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $k_j = 0, \pm 1, \ldots, kx = k_1 x_1 + \ldots, + k_n x_n$; $\varphi_k(x) = (2\pi)^{-n/2} \exp(ikx)$; λ_k — собственное значение оператора $P(D_x)$, порожденного условиями периодичности (2) в кубе V. Изучена [1] структура спектра, в частности, точечной его части $\sigma_d P$ оператора $P(D_x)$ и показано, что $\varphi_k(x)$ являются собственными функциями этого оператора.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

I. Собственные значения ω_1, ω_2 матрицы A ненулевые, возможно, равные и соответствующие им собственные векторы h_1, h_2 образуют базис.

II. Определители $|M_1|$, $|M_2|$, $|(M_1h_1, M_2h_2)|$, $|(M_2h_1, M_1h_2)|$ отличны от нуля.

III. Существуют числа $\delta > 0$ и $R_0 > 0$, такие, что $|\operatorname{Re}\lambda_k\omega_j| > \delta$, $j = 1, 2$, для всех $\lambda_k \in \sigma_d P$, $|\lambda_k| > R_0$.

IV. Единственной предельной точкой множества собственных значений $\sigma_d P$ служит $\lambda = \infty$.

Тогда граничная задача (1), (2), (3) является нётеровой.

Доказательство. Ищем решение задачи (1), (2), (3) в виде $u(x, t) = \sum\limits_k u_k(t)\varphi_k(x)$.

Так как система функций $\varphi_k(x)$ образует базис в $\mathcal{L}_2(V)$, то коэффициенты $u_k(t)$ должны быть решениями следующей краевой задачи:

$$u_k'(t) = \lambda_k A u_k(t) + f_k(t),$$

$$M_1 u_k(0) + M_2 u_k(T) = 0, \quad \lambda_k \in \sigma_d P, \tag{4}$$

где $f_k(t)$ — коэффициенты разложения $f(x, t)$ по системе $\varphi_k(x)$.

Проведем в комплексной λ-плоскости прямые $\operatorname{Re}\lambda\omega_j = 0$, $j = 1, 2$. Они разбивают всю плоскость на сектора (их четыре, если прямые различны, и два, если прямые совпадают). Внутри любого сектора каждый $\operatorname{Re}\lambda\omega_j$ сохраняет знак.

Ненулевыми собственными значениями краевой задачи (4) служат нули функции:

$$\Delta(\lambda) = |M_1H| + |(M_2h_1, M_1h_2)| \exp(\lambda\omega_1 T) +$$

$$+ |(M_1h_1, M_2h_2)| \exp(\lambda\omega_2 T) + |M_2H| \exp \lambda T(\omega_1 + \omega_2).$$

Нули $\Delta(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ могут находиться лишь в окрестности прямых $\operatorname{Re}\lambda\omega_j = 0$, как показывает исследование $\Delta(\lambda)$ внутри каждого из секторов λ-плоскости. Поэтому в силу условия III найдется такое большое число $R > R_0$, что все $\lambda_k \in \sigma_d P$, $|\lambda_k| > R$, $|\operatorname{Re}\lambda_k\omega_j| > \delta$ отграничены от нулей $\Delta(\lambda)$.

Представим теперь $\mathcal{H}$ в виде прямой суммы:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^- \oplus \mathcal{H}^+,$$

где

$$\mathcal{H}^- = \left\{u^-(x, t) \mid u^-(x, t) = \sum_{|\lambda_k| < R} u_k^-(t)\varphi_k(x)\right\},$$

$$\mathcal{H}^+ = \left\{u^+(x, t) \mid u^+(x, t) = \sum_{|\lambda_k| > R} u_k^+(t)\varphi_k(x)\right\}.$$

Краевая задача (4) для $u_k^+(t)$ при $f_k^+(t)$ всегда имеет единственное решение

$$u_k^+(t) = \int_0^T G(t, \tau, \lambda_k) f_k^+(\tau)\, d\tau, \tag{5}$$

где $G(t, \tau, \lambda_k)$ — матрица Грина задачи (4). Имеем

$$G(t, \tau, \lambda_k) = |H|^{-1}\Delta^{-1}(\lambda_k)\begin{cases} -G_1(t, \tau, \lambda_k), & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ G_2(t, \tau, \lambda_k), & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{6}$$

$G_1(t, \tau, \lambda) = \exp(\lambda\omega_1 t)[g_{11}\exp\lambda\omega_1(T-\tau) + g_{12}\exp\lambda\omega_2(T-\tau) + g_{13}\exp\{\lambda T \times (\omega_1+\omega_2) - \lambda\omega_1\tau\}] + \exp(\lambda\omega_2 t)[g_{14}\exp\lambda\omega_1(T-\tau) + g_{15}\exp\lambda\omega_2(T-\tau) + g_{16}\exp\{\lambda T(\omega_1+\omega_2) - \lambda\omega_2\tau\}]$, $G_2(t, \tau, \lambda) = \exp(\lambda\omega_1 t)[g_{21}\exp(-\lambda\omega_1\tau) + g_{22}\exp\lambda\omega_2(T-\tau) + g_{23}\exp\lambda(\omega_2 T - \omega_1\tau)] + \exp(\lambda\omega_2 t)[g_{24}\exp(-\lambda\omega_2\tau) + g_{25}\exp\lambda\omega_1(T-\tau) + g_{26}\exp\lambda(\omega_1 T - \omega_2\tau)]$.

В этих формулах матрицы g_{ij} следующие:

$$g_{11} = |(M_2h_1, M_1h_2)|(h_{22}h_1, -h_{12}h_1), \quad g_{12} = |(M_2h_2, M_1h_2)|(-h_{21}h_2, h_{11}h_2),$$
$$g_{13} = |M_2H|(h_{21}h_1, -h_{12}h_1), \quad g_{14} = |(M_1h_1, M_2h_1)|(h_{22}h_2, -h_{12}h_2),$$
$$g_{15} = |(M_1h_1, M_2h_2)|(-h_{21}h_2, h_{11}h_2), \quad g_{16} = |M_2H|(-h_{21}h_2, h_{11}h_2).$$

Заменой M_1 на M_2 получается g_{23} из g_{11}, g_{22} из g_{12}, g_{25} из g_{14}, g_{26} из g_{15}. Заменой M_2 на M_1 получается g_{21} из g_{13} и g_{24} из g_{16}.

Используя условие II теоремы 1, можно в каждом секторе λ-плоскости выделить главную часть роста $\Delta(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому, например, при $\operatorname{Re}\lambda_k\omega_j > 0$, $j = 1, 2$, в некотором секторе имеем для $|\lambda_k| > R$

$$\Delta(\lambda_k) = [|M_2H| + O(\lambda_k^{-1})]\exp\lambda_k T(\omega_1+\omega_2).$$

Используя это представление $\Delta(\lambda_k)$, из формулы (6) при $|\lambda_k| > R$ получаем в данном секторе равномерную ограниченность нормы матрицы $\|G(t, \tau, \lambda_k)\|$. Аналогичные рассмотрения проводятся и для остальных возможных секторов.

Итак, найдется число $c > 0$, что для всех $|\lambda_k| > R$ норма

$$\|G(t, \tau, \lambda_k)\| \leqslant c.$$

Из свойств нормы матрицы и неравенства Коши — Буняковского из (5) тогда получаем оценку ($\mathcal{H}_t \equiv \mathcal{L}_2[0, T]$):

$$|u_k^+(t)|^2 \leqslant \left(\int_0^T |G(t, \tau, \lambda_k) f_k^+(\tau)|d\tau\right)^2 \leqslant \left(\int_0^T \|G(t, \tau, \lambda_k)\|\,|f_k^+(\tau)|d\tau\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^T \|G(t, \tau, \lambda_k)\|^2 d\tau \int_0^T |f_k^+(\tau)|^2 d\tau \leqslant c^2 T\,\|f_k^+(t)\|^2_{H_t}.$$

Из этого неравенства рассуждениями, аналогичными приведенным в [1, с. 118], получается, что для всякой $f^+(x, t) \in \mathcal{H}^+$ существует единственное решение $u^+(x, t) \in \mathcal{H}^+$ задачи (1), (2), (3).

В силу условия IV теоремы 1 в круге $|\lambda| \leqslant R$ лежит лишь конечное число $\lambda_k \in \sigma_d P$ конечной кратности. Так как для каждого такого λ_k краевая задача (4) имеет конечномерные ядро и коядро, то теорема доказана.

Замечание. Условие III теоремы 1 означает, что система (1) не может быть гиперболической. Эта система может быть эллиптического, параболического или неклассического типа.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

I. Матрица A имеет двукратное собственное значение $\omega \neq 0$ и собственный вектор h_1 и присоединенный к нему вектор h_2.

II. Матрицы M_1 и M_2 являются невырожденными.

III. Существуют числа $\delta > 0$ и $R_0 > 0$, такие, что $|\operatorname{Re}\lambda_k\omega| \geqslant \delta$ для всех $\lambda_k \in \sigma_d P$, $|\lambda_k| > R_0$.

IV. Множество $\sigma_d P$ имеет единственную предельную точку $\lambda = \infty$. Тогда граничная задача (1), (2), (3) является нётеровой.

Доказательство. Действуем по схеме, изложенной при доказательстве теоремы 1. В силу условия III найдется такое $R > R_0$, что все

$\lambda_k \in \sigma_d P$, $|\lambda_k| > R$, отграничены от собственных значений задачи (4), которые являются нулями функции:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{-1} |M_1 H| + \{\lambda^{-1} |(M_2 h_1, M_1 h_2)| + \lambda^{-1} |(M_1 h_1, M_2 h_2)| + T |(M_1 h_1, M_2 h_1)|\} \exp(\lambda \omega T) + \lambda^{-1} |M_2 H| \exp(2\lambda\omega T)$$

и которые при $\lambda \to \infty$ могут лежать лишь в окрестности прямой $\operatorname{Re} \lambda\omega = 0$. Краевая задача (4) при всех $|\lambda_k| > R$ имеет решение, задаваемое формулой (5), где матрица Грина $G(t, \tau, \lambda_k)$ имеет вид

$$G(t, \tau, \lambda_k) = \Delta^{-1}(\lambda_k) \exp \lambda_k \omega (t - \tau) \begin{cases} -G_1(t, \tau, \lambda_k), & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ G_2(t, \tau, \lambda_k), & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{7}$$

$$G_1(t, \tau, \lambda) = [E + \lambda(\tau - T) g] \{\lambda^{-1} g_{11} + t g_{12} + [\lambda^{-1} E + (T - t) g_{13}] \exp(\lambda\omega T)\} \exp(\lambda\omega T),$$

$$G_2(t, \tau, \lambda) = [E + \lambda\tau g] \{\lambda^{-1} E + t g_{21} + [\lambda^{-1} g_{22} + (T - t) g_{23}] \exp(\lambda\omega T)\}.$$

Здесь E — единичная матрица; $g = (h_{21} h_1, -h_{11} h_1)$; $g_{13} = |M_2| g$; $g_{21} = |M_1| g$; $g_{12} = (|(m_1^2, M_1 h_1)| h_1, |(m_2^2, M_1 h_1)| h_1)$; $g_{23} = (|(m_1^1, M_2 h_1)| h_1, |(m_2^1, M_2 h_1)| h_1)$, m_i^j — i-й столбец матрицы M_j, $j, i = 1, 2$. Матрицы g_{11}, g_{12} являются произведением $|H|$ на некоторые матрицы, элементы которой выражаются через элементы M_1 и M_2.

Непосредственно из формулы (7) при всех $|\lambda_k| > R$ следует равномерная ограниченность нормы $\|G(t, \tau, \lambda_k)\|$. Дальнейший ход доказательства дословно повторяет ход доказательства теоремы 1.

З а м е ч а н и е. Условие II теорем 1 и 2 всегда выполнено, например, в случае простейших нелокальных условий, т. е. при $M_1 = mE$, $M_2 = E$, m — ненулевое комплексное число.

Приведем пример, показывающий необходимость условия II.

П р и м е р. Пусть $A = aE$, a — ненулевое комплексное число, и пусть

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда условие II невыполнимо и любое комплексное число является собственным значением краевой задачи (4). Следовательно, задача (1), (2), (3) не является нётеровой.

Теорема 3. Если матрица A имеет двукратное собственное значение $\omega = 0$, то для системы (1) при условиях (2) и при любом операторе $P(D_x)$ рассматриваемого типа не существует корректных [1] граничных по t условий (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как следует из [1], достаточно показать неограниченность оператора $\tilde{L}^{-1}$ в $\mathcal{H}$, если в качестве граничных по t условий взять условия $u(x, 0) = u(x, T) = 0$. Взяв последовательность свободных членов системы (1) $f_k(x, t)$ с компонентами

$$\alpha^{-1} f_{1k}(x, t) = f_2(x, t) = 2[T^2 - 6tT + 6t^2] \varphi_k(x)$$

(число α укажем ниже), получим последовательность решений $u_k(x, t)$ нашей граничной задачи, главная часть которой при $\lambda_k \to \infty$ имеет вид

$$\lambda_k |H|^{-1} (h_{11} - \alpha h_{21}) t^2 (T - t)^2 h_1 \varphi_k(x).$$

Если взять $\alpha \neq h_{11} h_{21}^{-1}$ в случае $h_{11} \neq 0$, $h_{21} \neq 0$ и $\alpha = 1$ в остальных случаях, то видно, что при $\lambda_k \to \infty$ $\|u_k(x, t)\|_H \to \infty$, в то время как $\|f_k(x, t)\|_H$ ограничена. Теорема доказана.

1. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. — М.: Наука, 1980. — 208 с.
2. *Полищук В. Н., Пташник Б. И.* Периодическая краевая задача для линейных гиперболических уравнений и систем. — Львов, 1982.—60 с. — (Препринт / Физ.-мех. ин-т им. Г. В. Карпенко АН УССР; № 64).
3. *Романко В. К.* Системы с производной первого порядка по «времени». — Дифференц. уравнения, 1969, 5, № 1, с. 174—185.

4. *Романко В. К.* О корректных задачах для некоторых систем уравнений. — В кн.: Теория и методы решения некорректно поставленных задач и их приложения: Тез. докл. Всесоюз. шк.-семинара по теории некоррект. задач. Самарканд, 29 сент. — 6 окт. 1983 г. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983, с. 185.

Московский физико-технический ин-т Получено 26.03.84.

УДК 517.946

А. С. Гупало, Г. П. Лопушанская

РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В ряде работ советских и зарубежных авторов [1, 2, 6, 8, 9, 11—13] доказана разрешимость общих граничных задач для уравнений и систем эллиптического типа в различных функциональных пространствах, а также пространствах обобщенных функций в конечной области. Исследование таких задач проводилось различными методами. В некоторых работах получены формулы решений.

Подход к граничным задачам в обобщенных функциях, использованный в работах [2, 6, 8, 13], дает возможность изучать одновременно как внутренние, так и внешние граничные задачи. В настоящей статье, развивая этот подход, доказывается единственность и строятся решения внутренней и внешней задач Неймана для неоднородной сильно эллиптической системы вариационного типа второго порядка в достаточно широких пространствах обобщенных функций. Классические решения внутренней и внешней задач Неймана для такой системы построены в [3—5].

Пусть

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \sum_{k,\,l=1}^{n} A_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = F \tag{1}$$

— сильно эллиптическая система дифференциальных уравнений, являющаяся системой Эйлера для некоторого положительно определенного функционала; $A_{kl} = A_{lk} = A'_{kl}$ (штрих означает транспонирование) — постоянные действительные квадратные матрицы порядка p. Пусть Ω — область в R^n, $n \geqslant 3$, ограниченная замкнутой $n-1$-мерной поверхностью S класса C^∞; $[D(\overline{\Omega})]^p$, $[D(S)]^p$ — пространства бесконечно дифференцируемых вектор-функций в $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$ и на S соответственно;

$$[X(\overline{\Omega})]^p = \left\{\varphi \in [D(\overline{\Omega})]^p : C^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(y)\Big|_S = 0\right\},$$

где

$$C\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) + Q(y); \quad C^*\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) + Q'(y);$$

$$C^{(\nu)}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = -2\sum_{k,\,l=1}^{n} \tilde{A}_{lk}\nu_l(y)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

— граничный оператор типа Неймана [3, 5] для системы (1); матрицы $\tilde{A}_{lk} = \tilde{A}'_{kl}$ единственным образом определяются матрицами A_{kl}; $\nu_l(y)$ $(l = \overline{1, n})$ — компоненты единичного вектора $\nu(y)$ внутренней нормали к S в точке y; $Q(y)$ — матрица с бесконечно дифференцируемыми на S элементами.

Через $[D'(\overline{\Omega})]^p$, $[D'(S)]^p$, $[X'(\overline{\Omega})]^p$ обозначаем пространства линейных непрерывных функционалов (обобщенных вектор-функций) над $[D(\overline{\Omega})]^p$,