

РОЗРАХУНОК КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ШТАМПІВ, ОТВОРІВ ТА ТРІЩИН У ПІВПЛОЩИНІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І РОЗВ'ЯЗКІВ ҐРІНА

Запропоновано підхід до розв'язування контактної задачі для ізотропної багатозв'язної півплощини з отворами й тріщинами, що взаємодіє з гладким штампом. Напруження визначено на основі інтегральних рівнянь, побудованих на розв'язках типу Ґріна. У цьому підході процес розв'язування суттєво спрощено, оскільки умови на прямолінійній межі півплощини, зокрема й під штампом, задовольняються тотожно. Досліджено контактні напруження під штампом, коефіцієнти інтенсивності напружень біля тріщин та концентрацію напружень біля отворів різних форм.

Ключові слова: штамп, отвори, тріщини, напружений стан, контакт берегів тріщин, розв'язки Ґріна, метод інтегральних рівнянь.

Розглянуто задачу про визначення напружень у півплощині з отворами й тріщинами, в яку втискається гладкий штамп. Контактні задачі для тіл з отворами й тріщинами математично досить складні, оскільки необхідно одночасно задовольняти граничні умови та знаходити контактні напруження наперед не заданих ділянках контакту. У пружному тілі в околі штампа виникають стискальні напруження і тому в таких задачах слід додатково враховувати контакт берегів тріщин. У літературі для спрощення таких задач найчастіше наближено приймають, що контактні напруження під штампом описуються розподілом Герца [3, 4]. У строгій постановці розглядали [9] контактну задачу для півплощини з тріщиною за дії плоского гладкого штампа, а також для ізотропної півплощини та штампа з основою криволінійної форми без урахування контакту берегів тріщин [11, 13]. Детальні результати досліджень контактних задач для ізотропних матеріалів проаналізовано в працях [3, 4].

Для визначення напруженого стану біля отворів і тріщин у пластинах складної форми широко застосовують метод граничних інтегральних рівнянь [1, 10]. Його ефективність суттєво підвищується за використання інтегральних рівнянь, ядра в яких побудовано на розв'язках типу Ґріна, коли частково виконуються задані граничні умови [1, 10]. Таким чином, у літературі досліджували напруження біля отворів і тріщин у пластинах з еліптичним отвором, круговій та кільцевій пластинах, півплощині, смузі тощо. [10]. У цій статті використано аналогічні інтегральні рівняння для вивчення напруженого стану біля отворів й тріщин, що розміщені біля штампа у півплощині. Основною перевагою таких рівнянь є те, що їх записують тільки для невідомих на кривих, де розміщені отвори й тріщини. При цьому граничні умови на прямолінійній межі, в тому числі й під штампом, задовольняються тотожно, що дає можливість спростити алгоритм розв'язування задачі та підвищити точність розв'язку. Аналогічний шлях на основі методу рядів використовували в праці [5], досліджуючи плоскі контактні задачі теорії пружності для деяких форм пластин з отворами.

1. **Формулювання задачі.** Розглянемо півплощину $y < 0$ з отворами та тріщинами, що взаємодіє при $|x - c| < a$ зі штампом, до якого прикладено силу S_y та момент M . Межі отворів обмежені кривими G_1, K, G_2 , а тріщини розміщені вздовж кривих L_1, K, L_2 . Приймемо, що півплощина навантажена на нескінченності зусиллями p , які діють паралельно до осі

✉ t_solyar@ukr.net

Ox , та зосередженими силами (X_j, Y_j) , які діють у внутрішніх точках півплощини (a_j, b_j) , $j = 1, \mathbf{K}, J_S$; зусилля q_T , які прикладені до берегів тріщин, вважаємо однаковими на протилежних берегах. Тут і далі введено такі позначення: $q_G = N_G + iT_G$ – вектор напружень на дотичній площинці до деякої неперервної кривої G , N_G і T_G – проекції вектора внутрішніх сил на нормаль до площинки, яка розміщена справа до вибраного напрямку обходу кривої.

Розглянемо гладкий штамп, що має довільну форму і до навантаження дотикається до півплощини в початку координат. Приймемо, що відомими є сила S_y , яка прикладена до штампа, та момент M відносно центра. Вважаємо, що під час навантаження центр штампа може зміститись у горизонтальному напрямку на деяку величину c (для плоского штампа $c = 0$).

Інтегральні рівняння задач теорії пружності для пластин з отворами й тріщинами будують, вводючи комплексні потенціали для суцільної пластини, які містять невідомі функції на межах пластини. Інтегральні зображення для комплексних потенціалів для нескінченних пластин з тріщинами запишемо у вигляді [10]

$$F(z) = \oint_L \frac{Q(t)}{t-z} ds + F_{\neq}(z), \quad Y(z) = \oint_L \frac{\bar{Q}}{t-z} - \frac{\bar{t}Q}{(t-z)^2} \bar{\partial} ds + Y_{\neq}(z), \quad (1)$$

де функції F_{\neq} , Y_{\neq} – комплексні потенціали для нескінченної суцільної пластини, що відповідають прикладеному до неї навантаженню, $L = L_1 + L_2 + \mathbf{K} + L_j$. Функцію Q визначаємо через невідомі стрибки переміщень u , v берегів тріщини за співвідношенням [4]

$$Q = - \frac{Gi}{\rho(c+1)} \frac{d}{ds} ([u] + i[v]),$$

де $[u] = u^+ - u^-$, $[v] = v^+ - v^-$, величини зі значками «+» і «-» відносяться відповідно до лівого і правого берегів тріщини згідно з вибраним додатнім напрямком на тріщині.

Для забезпечення умов однозначності переміщень необхідно, щоб виконувалась умова $\oint_{L_j} Q ds = 0$ на кожній із тріщин. Врахувавши, що

$$Q = g_{\neq} - ig_{\neq}, \quad g_{\neq} = \frac{G}{\rho(c+1)} \frac{d[u]}{ds}, \quad g_{\neq} = \frac{G}{\rho(c+1)} \frac{d[v]}{ds},$$

зображення (1) запишемо для дійсних невідомих у вигляді

$$F(z) = \oint_L [g_{\neq}(t)F_1(z, t) + g_{\neq}(t)F_2(z, t)] ds + F_p(z),$$

$$Y(z) = \oint_L [g_{\neq}(t)Y_1(z, t) + g_{\neq}(t)Y_2(z, t)] ds + Y_p(z), \quad (2)$$

де $F_j(z, z_0) = \frac{A_j}{z_0 - z}$, $Y_j(z, z_0) = \frac{\bar{A}_j}{t - z} - \frac{\bar{t}A_j}{(t - z)^2}$, $j = 1, 2$, $A_1 = -i$, $A_2 = 1$.

Для побудови аналогічних до (2) інтегральних зображень для півплощини, що взаємодіє зі штампом, спочатку знайдемо комплексні потенціали $F_D(z, z_0)$, $Y_D(z, z_0)$ (які є аналітичними функціями тільки відносно змінної z) для суцільної півплощини, що контактує з плоским гладким штампом при $|x - c| < a$, коли ці потенціали мають особливості в довільній точці півплощини Z_0 :

$$F_D(z, z_0) : \frac{A}{z_0 - z}, \quad Y_D(z, z_0) : \frac{\bar{A}}{z_0 - z} - \frac{\bar{z}_0 A}{(z_0 - z)^2} \quad (3)$$

де A – довільна комплексна стала.

Під час побудови функцій F_D, Y_D вимагаємо, щоб головний вектор і момент сил, прикладених до штампа, дорівнювали нулеві. Зазначимо, що отриманий розв'язок може не мати фізичного змісту, оскільки напруження під штампом можуть бути розтягальними.

Тоді комплексні інтегральні зображення (2) для півплощини з тріщинами, яка взаємодіє зі штампом, перепишемо так [1]:

$$\begin{aligned} F(z) &= \oint_L g_1(t) F_1^D(z, t) + g_2(t) F_2^D(z, t) ds + F_p(z), \\ Y(z) &= \oint_L g_1(t) Y_1^D(z, t) + g_2(t) Y_2^D(z, t) ds + Y_p(z), \end{aligned} \quad (4)$$

де $F_j^D(z, t) = F_D(z, t)|_{A=A_j}, Y_j^D(z, t) = Y_D(z, t)|_{A=A_j}, j = 1, 2; F_p(z)$ і $Y_p(z)$ – комплексні потенціали для суцільної півплощини, що контактує зі штампом заданої форми, які враховують прикладене до пластини навантаження.

Підінтегральні функції в формулах (1), (2) і (4) мають однакові особливості. Тому переміщення на кривих L , які ці потенціали визначають, матимуть однакові стрибки. Зазначимо, що потенціали F_D, Y_D належать до дислокаційних [8].

Аналогічно записуємо рівняння для півплощини з отворами [10]. Подамо інтегральні зображення розв'язку задачі для півплощини з отворами і тріщинами:

$$\begin{aligned} F(z) &= \oint_L g_1(t) F_1^D(z, t) + g_2(t) F_2^D(z, t) ds + \\ &+ \oint_G U(t) F_i^D(z, t) + V(t) F_2^D(z, t) ds + F_p(z), \\ Y(z) &= \oint_L g_1(t) Y_1^D(z, t) + g_2(t) Y_2^D(z, t) ds + \\ &+ \oint_G U(t) Y_i^D(z, t) + V(t) Y_2^D(z, t) ds + Y_p(z), \end{aligned} \quad (5)$$

де $G = G_1 + G_2 + K + G_J, U = \frac{G}{p(c+1)} \frac{du}{ds}, V = \frac{G}{p(c+1)} \frac{dv}{ds}$.

Інтегральні рівняння для знаходження невідомих на контурах L і G функцій отримуємо задовольнивши задані граничні умови на берегах тріщин та межах отворів [10]. Для розв'язування отриманого рівняння ефективним є метод механічних квадратур [1, 6, 10, 12].

Розглянемо півплощину $y < 0$, до межі якої при $|x - c| < a$ прикладено гладкий штамп. Для розв'язування задачі згідно із запропонованим підходом необхідно побудувати дислокаційний розв'язок, знайти напруження під дією штампа в суцільній півплощині та врахувати можливість контакту берегів тріщини.

2. Дислокаційний розв'язок для півплощини, що знаходиться під дією штампа. За дислокаційний приймемо розв'язок задачі теорії пружності для суцільної півплощини, який задовольняє умови на її межі:

$$t_{xy} = 0, \quad |x| < \infty,$$

$$\nabla v / \nabla x = e, \quad |x - c| < a,$$

$$s_{yy} = 0, \quad |x - c| > a, \quad (6)$$

e – стала (кут повороту штамп, який необхідно обчислити), причому напруження під штампом задовольняють умови

$$\int_{a_1}^{a_2} s_y(x) dx = S_y, \quad \int_{a_1}^{a_2} (x - c) s_y(x) dx = M, \quad a_{1,2} = c \pm a,$$

де S_y і M – прикладені до штамп сила та момент, які під час визначення дислокаційного розв'язку покладаємо рівними нулю.

Потенціали Мусхелішвілі F_D , Y_D , які відповідають дислокаційній задачі, мають полюси в точці Z_0 нижньої півплощини:

$$F_D : -\frac{A}{z - z_0}, \quad Y_D : -g \frac{\bar{A}}{z - z_0} - \bar{z}_0 \frac{A}{(z - z_0)^2}, \quad (7)$$

де A – комплексна стала, $g = 1$. Поклавши $g = -c$ та $A = \frac{1}{2p(1+c)}(X + iY)$, визначимо навантаження півплощини зосередженою в точці Z_0 силою (X, Y) за дії плоского штамп.

Далі, для зручності викладок, введемо в розгляд функцію $W_D(z) = F_D(z) + zF_D'(z) + Y_D(z)$, яка має таку особливість:

$$W_D(z) : -g \frac{\bar{A}}{z - z_0} + \frac{(z_0 - \bar{z}_0)}{(z - z_0)^2} A. \quad (8)$$

Знайдемо комплексні потенціали з особливостями (7), (8), які задовольняють умови (6). Зобразимо їх так:

$$F_D(z) = F(z) + F_D(z), \quad W_D(z) = W(z) + W_D(z).$$

За комплексні потенціали $F(z)$, $W(z)$ прийемо такі, які є розв'язком задачі (6) при $e = 0$:

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad W(z) = -f_1(z) + f_2(z),$$

де

$$f_1(z) = \frac{C(z) + \bar{C}(z)}{2}, \quad f_2(z) = \frac{B(z) - \bar{B}(z)}{X(z)}, \quad X(z) = \sqrt{(z - c)^2 - a^2},$$

$$C(z) = \frac{a_1}{z - z_0} + \frac{a_2}{(z - z_0)^2}, \quad B(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2},$$

$$a_1 = -A + \bar{A}, \quad a_2 = -b_2, \quad b_1 = -\frac{A + \bar{A}}{2} X_0 + \frac{b_2}{2} X_1, \quad b_2 = \frac{b_2}{2} X_0,$$

$$X_0 = X(z_0), \quad X_1 = X'(z_0) = \frac{z_0 - c}{X_0}, \quad b_2 = (z_0 - \bar{z}_0)A.$$

Складові F_D , W_D мають вигляд

$$F_D = -iD_1 + i \frac{D_0 + D_1(z - c)}{X(z)},$$

$$W_D = -iD_1 + i \frac{D_0 + D_1(z - c)}{X(z)},$$

де D_0 , D_1 – дійсні довільні сталі.

Використавши умови рівноваги штамп, отримуємо:

$$D_0 = -\frac{S_y}{2p} + (g-1) \operatorname{Im} A,$$

$$a^2 p D_1 = -4p \operatorname{Im} \frac{\dot{e}}{e} b_1 \frac{\ddot{e}}{e} - \frac{z_0 - c \ddot{e}}{X_0} + b_2 \frac{a^2 \dot{u}}{X_0^3 \dot{u}} - M.$$

Розв'язок для суцільної півплощини за дії параболічного штамп.

Дослідимо детальніше параболічний штамп з основою $x^2/(2R)$, коли ділянка контакту займає задану область $-a < x < a$, де R – радіус заокруглення. Вважаємо відомими силу S_y та момент M , що прикладені до штамп. Умови на прямолінійній межі мають такий вигляд: $t_{xy} = 0$ при $|x| < a$; $\sqrt{|v|}/\sqrt{|x|} = e + x/R$ при $|x| < a$ та $s_{yy} = 0$ при $|x| > a$. Тоді комплексні потенціали у зображенні (7) будуть такими [2, 8]:

$$F_p = Ciz - iD_1 + i \frac{D_0 + D_1 z - Cz^2}{X(z)}, \quad W_p = F_p,$$

де

$$C = \frac{2G}{(c+1)R}, \quad D_0 = -\frac{S_y}{2p} + \frac{a^2}{2} C, \quad D_1 = -\frac{M}{a^2 p}.$$

Перепишемо потенціали у вигляді

$$F_p = Ci \frac{\ddot{e}}{e} z + \frac{(a^2 + a_0^2)/2 - z^2}{X(z)} \frac{\ddot{e}}{e} + iD_1 \frac{\ddot{e}}{e} - 1 + \frac{z}{X(z)} \frac{\ddot{e}}{e}, \quad W_p = F_p(z),$$

де $a_0 = \frac{\sqrt{PR(c+1)}}{\sqrt{2pG}}$, $P = |S_y|$.

Тут a_0 – півдовжина ділянки контакту, яку визначають з розв'язку для півплощини, що контактує з гладким параболічним штампом за заданих значень сили S_y та умови $M = 0$ [2, 10]. Максимальний контактний тиск під штампом

$$p_0 = \frac{2\sqrt{2PG}}{\sqrt{pR(c+1)}}.$$

4. Числовий алгоритм розв'язування задачі. Необхідно додатково визначити межі області контакту a_1 і a_2 , які є наперед не відомими. Їх знаходимо з умови обмеженості напружень, які відповідають потенціалам (6):

$$s_y(a_1) = s_y(a_2) = 0.$$

Щоб задовольнити ці умови, вводимо величину

$$Q(a_1, a_2) = [s_y(a_1 - id)]^2 + [s_y(a_2 - id)]^2,$$

де $s_y(T)$ – напруження, які визначають через потенціали (6) у півплощині в точці T ; d – вибрана мала величина.

Під час числового розв'язування задачі потенціали (6) замінили квадратними формулами, наведеними раніше в [1, 10]. Сталі a_1 і a_2 визначали з умови мінімуму величини $Q(a_1, a_2)$ за додаткових умов (рівнянь) (6). Таким чином, прийшли до відомої задачі на умовний екстремум. Для таких задач у комп'ютерних математичних пакетах розроблено стандартні програми, які апробовані та дають змогу (за відповідної адаптації) розраховувати зі заданою точністю. При розв'язуванні задавали початкове наближення, за яке приймали межі області контакту для суцільної півплощини.

5. **Півплощина з отворами.** Розглянемо круговий отвір радіуса R , центр якого розміщено в точці з координатами $x_c = 0$, $y_c = -mR$ при $m = 1.25; 1.5; 2$, радіус заокруглення штампа $R = 10a$. Прийmemo, що головний вектор і момент сил, які прикладені до штампа, дорівнюють S_y і $M = 0$. Криві, наведені на рис. 1б, описують розрахований відносний контактний тиск s / p_0 при $p_0 = 400$ МПа.

На рис. 1а наведено віднесені до величини $P_0 = P/R$ колові напруження σ_θ залежно від кутової координати θ , яку відлічуємо від найнижчої точки на межі отвору за годинниковою стрілкою.

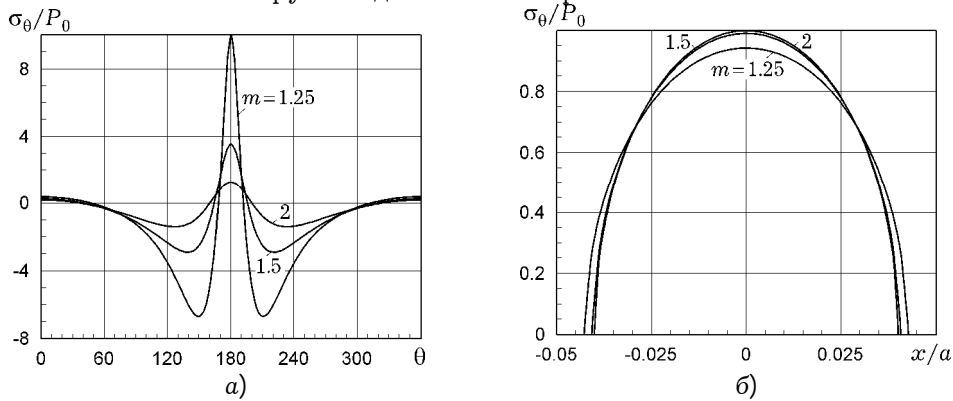


Рис. 1. Напруження на межі отвору (а) та контактні (б) за різних відстаней отвору від штампа.

Як бачимо, найбільші колові напруження на межі виникають в отворах, близьких до штампа, при цьому максимальні контактні напруження під штампом зменшуються.

Дослідимо зсунуті відносно штампа отвори, які віддалені на однакову відстань від межі півплощини. Результати розрахунків для штампа з радіусом заокруглення $R = 10a$, коли центр отворів розміщений у точках $(0, -1.5a)$, $(0.25a, -1.5a)$, $(0.5a, -1.5a)$, $(a, -1.5a)$, наведено на рис. 2.

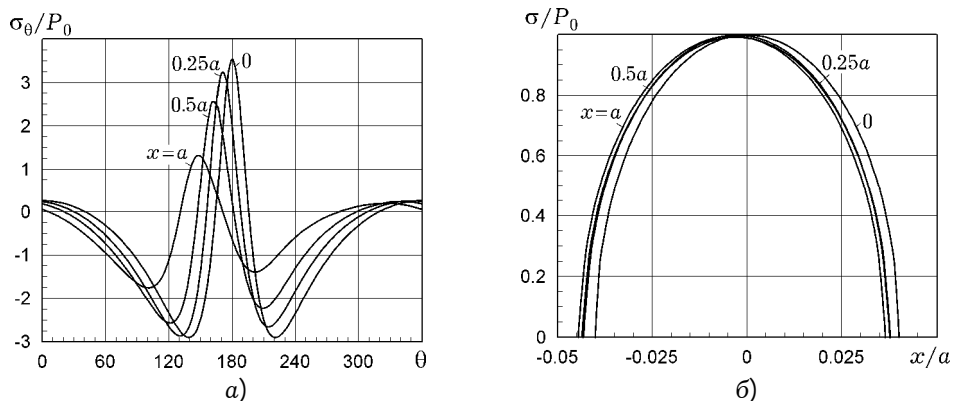


Рис. 2. Напруження на межі отвору (а) та контактні (б) за зсунутих відносно штампа отворів.

Контактні напруження виявились практично однаковими, але область контакту змістилась у протилежному до зміщення отвору напрямку. Максимальні напруження на межі отвору зменшуються з віддаленням його від штампа.

Отримані результати стосувались штампа з відносно невеликим радіусом заокруглення. Для всіх розглянутих випадків розподіл контактних напружень мало відрізнявся від розподілу у суцільній півплощині. Розгля-

дали півплощину з круговим отвором, центр якого розміщений у точці $(0, -1.5a)$. Результати розрахунків для великих радіусів заокруглень штампа при $R = 100a; 250a; 500a$ подано на рис. 3.

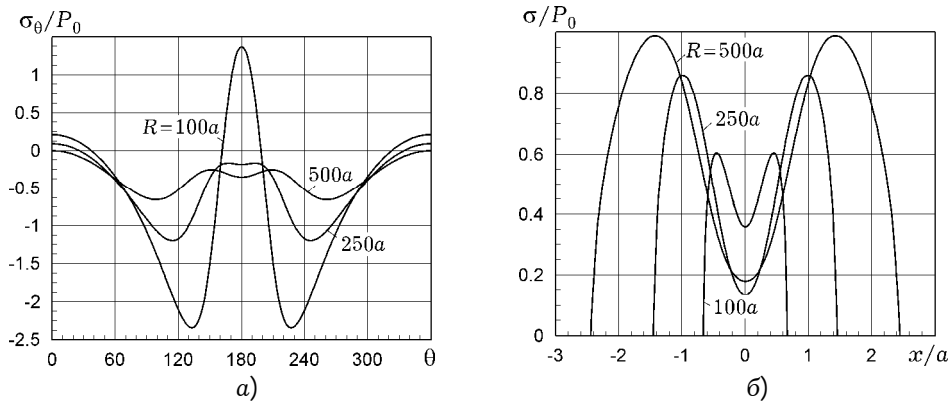


Рис. 3. Напруження на межі отвору (а) та контактні (б) за різних радіусів заокруглення штампа.

Виявили, що контактні напруження суттєво залежать від радіуса заокруглення штампа, при цьому в центральній частині під штампом вони мають локальний мінімум. Відчутно змінюється і характер їх розподілу на межі отвору та максимальні значення.

5. **Перевірка достовірності підходу.** Перевіряли результати, отримані на основі розробленого алгоритму, що базується на інтегральних рівняннях зі строгим задоволенням умов контакту під штампом. З цією метою розглядали півплощину, послаблену круговим отвором радіуса a , з центром у точці $(0.5a, -1.5a)$, радіус заокруглення штампа $R = 50a$, матеріал ізотропний, $\rho_0 = 2000$ МПа. Розраховані за розробленим алгоритмом відносні напруження на межі отвору наведено на рис. 4а, а відносний контактний тиск під штампом – на рис. 4б (крива 1, тут крива 2 – контактний тиск у суцільній півплощині). Далі розглядали півплощину з отвором (без дії штампа), до межі якої в знайдений області контакту (a_1, a_2) в точках $x_j = a_1 + jh$, $j = 0, \mathbf{K}, 40$, прикладено зосереджені сили $Y_j = -hp(x_j)$, де $p(x)$ – знайдений контактний тиск, $h = (a_2 - a_1)/40$.

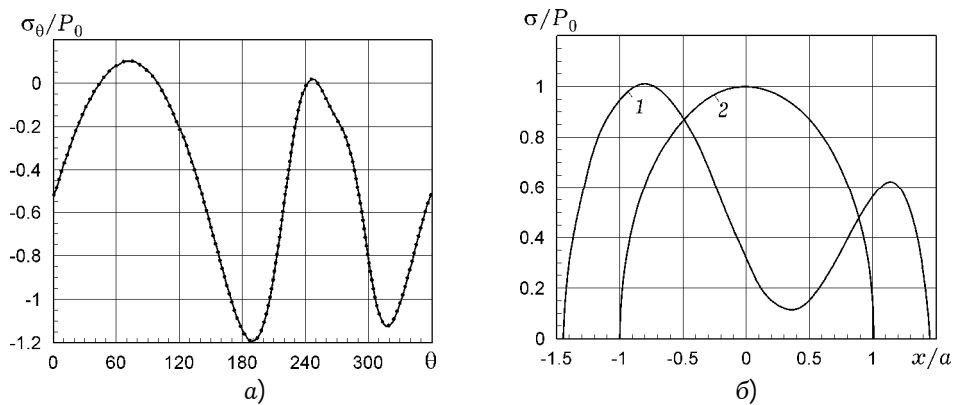


Рис. 4. Напруження на межі отвору (а) і контактний тиск (б) для ізотропної півплощини.

Для розв'язування цієї задачі використали інтегральні рівняння, де допоміжні потенціали F_j^D , Y_j^D визначали, розглядаючи півплощину із

вільною від навантаження межею [1]. Розраховані відносні напруження на межі отвору зображено на рис. 4а (крапки).

Отже, знайдені за різними підходами (на основі різних інтегральних рівнянь) напруження на межі отвору є практично однакові, що вказує на достовірність результатів.

6. Півплощина з тріщинами. Розглянемо півплощину $y < 0$, послаблену тріщиною, на яку при $a_1 < x < a_2$ втискається без тертя параболічний штамп. Вважатимемо, що головний вектор і момент сил, які прикладені до штампа, дорівнюють P і M . Центр штампа знаходиться в точці $c = (a_1 + a_2)/2$, а півдовжина ділянки контакту $a = (a_2 - a_1)/2$.

Приймемо, що півплощина послаблена прямолінійною тріщиною півдовжини l з центром у точці (x_c, y_c) , яка нахилена під кутом α до осі Ox . Перед втисканням центр штампа знаходиться в точці $(0, 0)$, момент прикладених сил до нього відносно цієї точки покладемо рівним нулю.

Інтегральне рівняння розв'язували числово методом механічних квадратів [10, 12]. Під час знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) враховували контакт берегів тріщин. Алгоритм розв'язування такої задачі викладено раніше [7].

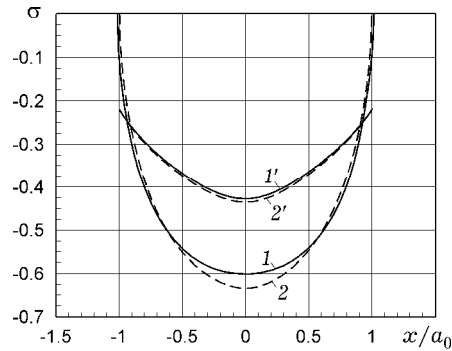


Рис. 5. Відносні контактні напруження та КІН за дії кругового штампа при $\alpha = 0^\circ$.

Вважали, що прикладене навантаження є таким, що півдовжина ділянки контакту за втискання штампа у суцільну півплощину дорівнює a_0 . Далі всі величини віднесені до неї. Розраховані відносні контактні напруження

під штампом $s = a_0 \frac{s_y}{S_y}$ за відносної довжини $d = l/a_0 = 1$, кута нахилу тріщини $\alpha = 0^\circ$, $x_c = 0$ та $y_c/a_0 = 1.1$ наведено на рис. 5 (крива 1). Крива 2

описує відносні контактні напруження на берегах тріщини $s_T = a \frac{s_n}{S_y}$.

Значення відносних КІН $K = \frac{K_{II} \sqrt{a}}{S_y \sqrt{\rho}}$ у лівій і правій вершинах тріщини

відповідно дорівнюють -0.0762 і 0.0762 . Для порівняння штриховими лініями зображено контактні напруження у півплощині, що перебуває під дією герцівського тиску. Розраховані відносні КІН K у вершинах тріщини для цього випадку будуть рівними -0.0783 і 0.0783 .

Аналогічні дані для тріщини, нахиленої під кутом $\alpha = -30^\circ; -45^\circ; -60^\circ; -90^\circ$, наведено на рис. 6 і рис. 7. Тут відбувався контакт берегів вздовж усієї тріщини. Для нахилених тріщин контактні напруження під штампом (рис. 6 і рис. 7) істотно відрізняються від розподілу Герца, що відповідно впливає на значення КІН.

Аналогічні результати для зсунутої тріщини при $x_c/a_0 = 0.5$ та кута нахилу тріщини $\alpha = -90^\circ; -45^\circ; 0^\circ; 45^\circ$ наведено на рис. 8 і рис. 9.

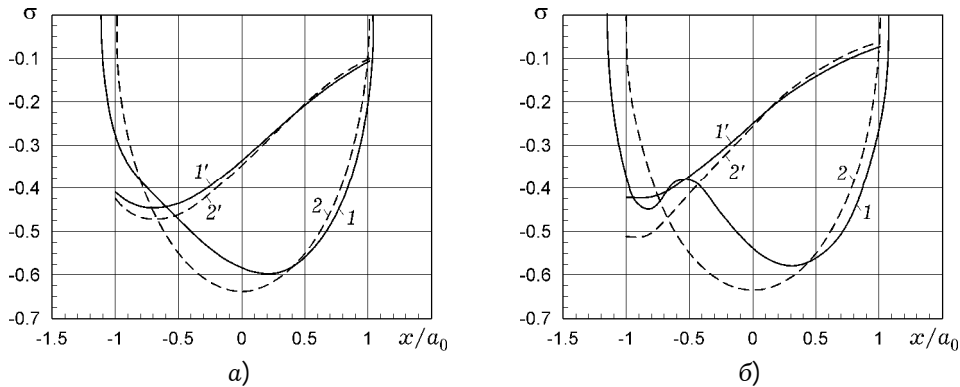


Рис. 6. Відносні контактні напруження та КІН за дії кругового штампa при $\alpha = -30^\circ$ (а) та $\alpha = -45^\circ$ (б).

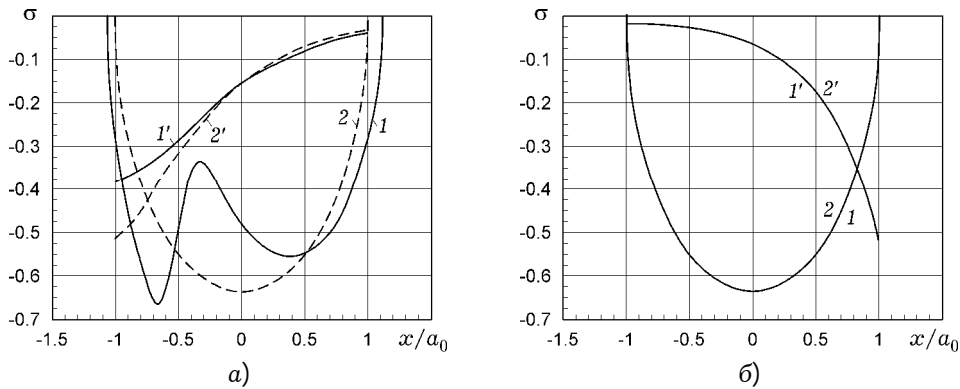


Рис. 7. Відносні контактні напруження та КІН за дії кругового штампa при $\alpha = -60^\circ$ (а) та $\alpha = -90^\circ$ (б).

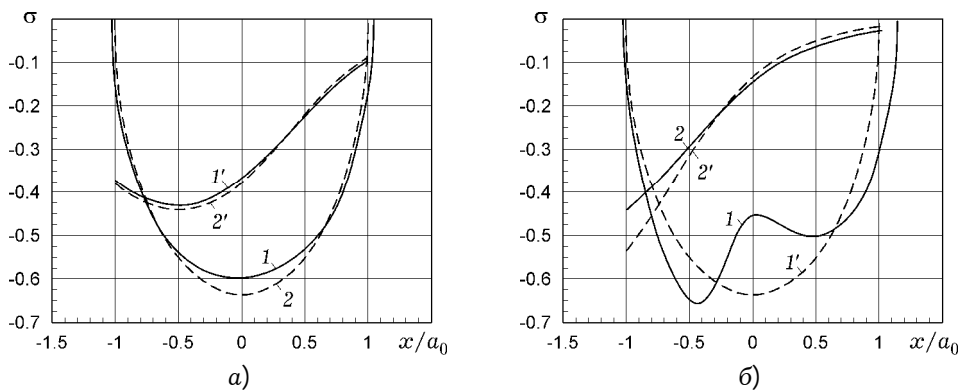


Рис. 8. Відносні контактні напруження та КІН для зсунутої тріщини при $\alpha = 0^\circ$ (а) та $\alpha = -45^\circ$ (б).

Для всіх розглянутих випадків контакт берегів тріщин відбувався в околі їхніх вершин.

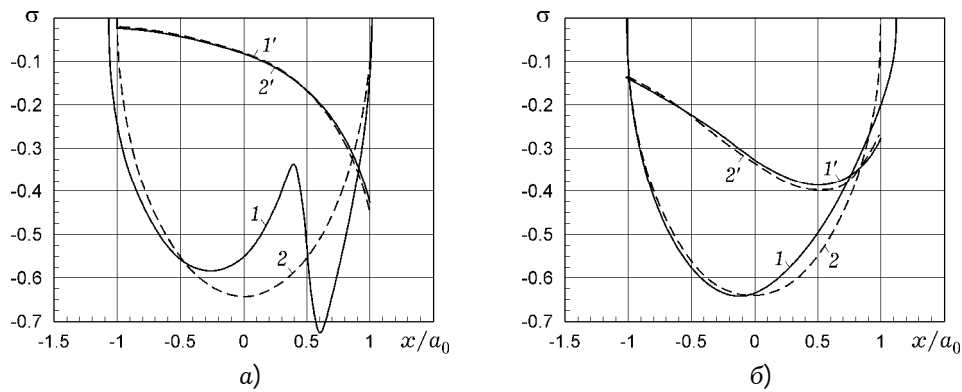


Рис. 9. Відносні контактні напруження та КІН для зсунутої тріщини при $\alpha = -90^\circ$ (а) та $\alpha = 45^\circ$ (б).

Висновки. Розроблено методика визначення напруженого стану біля отворів і тріщин у півплощині, що взаємодіє із жорстким гладким штампом. Методика базується на методі інтегральних рівнянь і враховує контакт берегів тріщин. Інтегральні рівняння побудовано так, що умови на прямолінійній межі півплощини, в тому числі і під штампом, задовольняються тотожно. Інтегральні рівняння розв'язано числово за методом механічних квадратур. Досліджено напруження біля штампа, тріщин та отворів різних форм.

1. Божидарник В., Максимович О. Пружна рівновага анізотропної півплощини з періодичною системою отворів і тріщин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – 37, № 6. – С. 15–21.
Te same: *Bozhydarnyk V., Maksymovych O.* Elastic equilibrium of an anisotropic half plane with periodic system of holes and cracks // *Mater. Sci.* – 2001. – 37, No. 6. – P. 857–865. – <https://doi.org/10.1023/A:1015632905424>
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
3. Дацшишн О. П., Глазов А. Ю., Левус А. Б. Особливості контактування берегів крайової тріщини за рухомого герцівського навантаження // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2013. – 49, № 5. – С. 31–41.
Te same: *Datsyshyn O. P., Hlazov A. Yu., Levus A. B.* Specific features of contact of the faces of an edge crack under moving Hertzian loads // *Mater. Sci.* – 2014. – 49, No. 5. – P. 589–601. – <https://doi.org/10.1007/s11003-014-9652-4>
4. Дацшишн О. П., Марченко Г. П. Напружений стан півплощини з крайовою половою тріщиною під герцівським навантаженням (огляд) // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – 44, № 1. – С. 23–34.
Te same: *Datsyshyn O. P., Marchenko H. P.* Stressed state of a half plane with shallow edge crack under Hertzian loading (a survey) // *Mater. Sci.* – 2008. – 44, No. 1. – P. 22–34. – <https://doi.org/10.1007/s11003-008-9039-5>
5. Калюеров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках. – Донецьк: Донецьк. нац. ун-т, 2013. – 438 с.
6. Максимович В. М., Приходько О. С., Соляр Т. Я. Визначення напружень біля пружних включень у пластинках складної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 3. – С. 109–118.
Te same: *Maksymovych V. M., Prykhod'ko O. S., Solyar T. Ya.* Determination of stresses near elastic inclusions in plates of complex shape // *J. Math. Sci.* – 2016. – 217, No. 3. – P. 271–282. – <https://doi.org/10.1007/s10958-016-2972-1>
7. Максимович О. В., Лавренчук С. В., Соляр Т. Я. Контактна задача для анізотропної півплощини з тріщинами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2017. – 60, № 1. – С. 141–148.
Te same: *Maksymovych O. V., Lavrenchuk S. V., Solyar T. Ya.* Contact problem for an anisotropic half plane with cracks // *J. Math. Sci.* – 2019. – 240, No. 2. – P. 173–183. – <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04345-3>
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.

- Те саме: *Muskhelishvili N. I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1977. – 732 p.
9. *Панасюк В. В., Дацишин А. П., Марченко Г. П.* Контактна задача про дію штампа на границю півплощини, ослабленої системою криволінійних тріщин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – 31, № 6. – С. 7–16.
Те саме: *Panasyuk V. V., Datsyshyn O. P., Marchenko H. P.* Contact problem for a half plane with cracks subjected to the action of a rigid punch on its boundary // Mater. Sci. – 1996. – 31, No. 6. – P. 667–678.
<https://doi.org/10.1007/BF00558587>
10. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 248.
11. *Саврук М. П., Томчик А.* Тиск з тертям абсолютно жорсткого штампа на пружний півпростір з тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – 46, № 3. – С. 5–15.
Те саме: *Savruk M. P., Tomczyk A.* Pressure with friction of a perfectly rigid die upon an elastic half space with cracks // Mater. Sci. – 2010. – 46, No. 3. – P. 283–296. – <https://doi.org/10.1007/s11003-010-9289-x>
12. *Maksymovych O., Jaroszewicz J.* Determination of stress state of anisotropic plates with rigid inclusions based on singular integral equations // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2018. – 95. – P. 215–221.
<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.07.004>
13. *Tomczyk A.* Friction effect in a plane problem of punch acting on a half-space weakened by cracks // Acta Mech. Autom. – 2014. – 8, No. 2. – P. 107–114.
–<https://doi.org/10.2478/ama-2014-0020>

РАСЧЕТ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ШТАМПОВ, ОТВЕРСТИЙ И ТРЕЩИН В ПОЛУПЛОСКОСТИ НА ОСНОВАНИИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И РЕШЕНИЙ ГРИНА

Предложен подход к решению контактной задачи для изотропной многосвязной полуплоскости с отверстиями и трещинами, которая взаимодействует с гладким штампом. Напряжения определены на основании интегральных уравнений, построенных на решениях типа Грина. В этом подходе процесс решения существенно упрощен, поскольку условия на прямолинейной границе полуплоскости, в частности и под штампом, удовлетворяются тождественно. Исследованы контактные напряжения под штампом, коэффициенты интенсивности напряжений возле трещин и концентрация напряжений около отверстий разных форм.

Ключевые слова: штамп, отверстия, трещины, напряженное состояние, контакт берегов трещин, решения Грина, метод интегральных уравнений.

CALCULATION OF STRESS CONCENTRATION NEAR PUNCHES, HOLES AND CRACKS IN A HALF-PLANE BASED ON THE INTEGRAL EQUATION METHOD AND GREEN'S SOLUTIONS

An approach to solving a contact problem for an isotropic multilinked half-plane with holes and cracks that interacts with smooth punch is proposed. The stresses are determined on the basis of integral equations, built on the Green type solutions. The process of solving in the proposed approach is significantly simplified since the conditions imposed on the rectilinear boundary of the half-plane, including the area under the punch, are identically satisfied. The investigation of the contact stresses under the punch, the stress intensity factors near the cracks and the stress concentration near the holes of different shapes is carried out.

Key words: punch, holes, cracks, stress state, crack edges contact, Green's solutions, method of integral equations.

¹ Нац. ун-т «Львівська політехніка»

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів