

КЕРУВАННЯ ДВОВИМІРНИМИ СТАЦІОНАРНИМИ ТЕМПЕРАТУРНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПІВПРОСТОРУ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗОВНІШНЬОГО ТЕПЛООВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Розв'язано двовимірну стаціонарну задачу оптимального керування температурними напруженнями плоскодеформованого півпростору, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла. За функцію керування вибрано температуру довкілля, з яким відбувається конвективний теплообмін через межу поверхню півпростору. Проаналізовано особливості поведінки знайденого розв'язку.

Ключові слова: задача керування, обернена задача термopружності, температурні напруження, двовимірна задача термopружності.

Вступ. Елементи сучасного технологічного обладнання, зокрема мікроелектронних пристроїв, часто зазнають інтенсивного теплового навантаження від нагрівання внутрішніми джерелами тепла. За певних умов це породжує у них високоградієнтні розподіли температурних полів [5, 6]. Щоб забезпечити надійне функціонування таких елементів, індуковане джерелами, тепло потрібно відвести, зокрема, за допомогою конвективного теплообміну з довкіллям. Ефективність такого тепловідведення можна суттєво підвищити шляхом керованої зміни температури середовища [1, 4] чи коефіцієнта теплообміну з ним [18]. При цьому, щоб зберегти проектні міцність та функціональні властивості відповідних елементів, слід задовольнити обмеження на параметри їх термонапруженого стану. Зокрема, на максимальні напруження та переміщення [1, 4, 20], що виникають в елементах обладнання за теплового навантаження. З огляду на це вказані задачі тепловідведення доцільно розглядати як задачі керування процесом нагрівання чи охолодження тіла за певних додаткових обмежень на параметри напружено-деформованого стану (НДС) [1, 4].

Формулювання та методики розв'язування задач оптимального керування НДС однорідних, неоднорідних і термочутливих елементів конструкцій, коли за функцію керування вибрано теплове навантаження і задані додаткові обмеження на параметри теплового та термомеханічного процесів, досліджено у працях [1, 2, 4, 7, 8, 15, 16, 23].

Задачі про мінімізацію температурних напружень теплонавантажених елементів конструкцій, виготовлених із неоднорідних, композитних та термочутливих матеріалів шляхом підбору їх складників, визначення закону розподілу його теплових і механічних характеристик за координатами чи форми поверхні розглянуто у працях [3, 9, 11, 12, 17, 19, 21].

У цій статті для плоскодеформованого півпростору, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла, побудовано та досліджено розв'язки задач оптимального керування температурними напруженнями його межевої поверхні чи деякого перерізу, паралельного до неї, коли за функцію керування вибрано закон розподілу температури довкілля, з яким відбувається конвективний теплообмін.

1. Формулювання задачі керування. Розглянемо віднесений до прямокутної декартової системи координат $Ox_1y_1z_1$ однорідний ізотропний півпростір так, що $0 \leq x_1 < \infty$, $|y_1| < \infty$, $|z_1| < \infty$. Вважатимемо, що у ньому реалізується двовимірне стаціонарне температурне поле $T(x_1, y_1)$ і відсутні переміщення в напрямку осі Oz_1 . Припустимо, що вільний від зовнішнього

[✉] yasinskyu.anatoliy@gmail.com

силового навантаження півпростір нагрівається залежними лише від координат x, y внутрішніми джерелами тепла, а через його межу поверхню $x = 0$ відбувається конвективний теплообмін із довкіллям за законом Ньютона. За таких гіпотез плоский деформований стан півпростору, спричинений температурним полем T , можна описати системою рівнянь рівноваги [10, 14]

$$\frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial s_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

фізичними співвідношеннями

$$\begin{aligned} s_{xx} &= \frac{E}{(1+n)(1-2n)} ((1-n)e_{xx} + ne_{yy}) - \frac{a_T E}{1-2n} T, \\ s_{yy} &= \frac{E}{(1+n)(1-2n)} ((1-n)e_{yy} + ne_{xx}) - \frac{a_T E}{1-2n} T, \\ s_{xy} &= \frac{E}{2(1+n)} e_{xy}, \end{aligned} \quad (2)$$

співвідношеннями Коші [10, 14] та крайовими умовами

$$s_{xx}|_{x=0} = s_{xy}|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

де $x = x^*/R$, $y = y^*/R$ – безрозмірні декартові координати; R – деяка нормувальна довжина; s_{xx} , s_{yy} , s_{xy} , e_{xx} , e_{yy} , e_{xy} – компоненти тензора напружень та деформації, які є функціями двох змінних x, y ; n – коефіцієнт Пуассона; E – модуль Юнга; a_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення. Вважаємо, що всі компоненти тензора напружень прямують до нуля, коли $x \rightarrow 0$ і $|y| \rightarrow \infty$.

Решту компонент тензорів напружень і деформації визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} s_{zz} &= n(s_{xx} + s_{yy}) - a_T E T, \\ s_{xz} = s_{yz} &= 0, \quad e_{xz} = e_{yz} = e_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Температурне поле $T(x, y)$ півпростору за наявності теплових джерел задовольнятиме рівняння Пуассона [10, 14]

$$DT(x, y) + Q(x, y) = 0, \quad x \in [0, \infty), \quad y \in (-\infty, \infty) \quad (5)$$

та межові умови

$$\frac{\partial T(0, y)}{\partial x} - a(T(0, y) - t(y)) = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{x, |y| \rightarrow \infty} T(x, y) = 0, \quad (7)$$

де $D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа; $Q(x, y) = Q_*(x, y)R^2/l$ – відносна інтенсивність внутрішніх теплових джерел; $Q_*(x, y)$ – їх інтенсивність; $a = a_*R/l$ – безрозмірний коефіцієнт теплообміну; a_* – коефіцієнт теплообміну; l – коефіцієнт теплопровідності; $t(y)$ – температура довкілля.

У працях [16, 23] досліджено стаціонарні та нестаціонарні двовимірні задачі керування за допомогою внутрішніх теплових джерел розподілом окремих нормальних компонент тензора напружень та їх лінійних комбінацій у заданому перерізі $x = x_1$, $0 \leq x_1 = \text{const}$ плоскодеформованого пів-

простору. Зокрема, наведено інтегральні співвідношення взаємозв'язку між окремими компонентами тензора напружень та величиною $s_{xx} + s_{yy}$ і показано, що, керуючи цими сумарними напруженнями, можна опосередковано змінювати кожну з компонент тензора напружень.

Тут вважаємо, що функція розподілу теплових джерел $Q(x, y)$ задана, а конвективний теплообмін із довкіллям використовуємо для відведення тепла, індукованого цими джерелами. Відшукаємо такий закон зміни температури довкілля, щоб за сталого значення коефіцієнта теплообміну a розподіл окремих компонент тензора напружень чи їх лінійної комбінації був максимально близьким до наперед заданого. Оскільки у вільному від зовнішнього силового навантаження однорідному однозв'язному плоскодеформованому тілі компоненти тензора напружень s_{xx} , s_{yy} , s_{xy} у площині Oxy не залежать від способу теплового навантаження межевої поверхні тіла, а лише – від розподілу теплових джерел [10], задачу керування температурними напруженнями півпростору сформулюємо так: потрібно визначити такий закон зміни температури довкілля $t(y)$, $y \in [0, \infty)$, за якого функціонал

$$J(t) = \max_{y \in [0, \infty)} |S(x_1, y, t) - j^*(y)|, \quad (8)$$

набував би мінімального значення, де

$$S(x_1, y, t) = s_{zz}(x_1, y, t)$$

або

$$S(x_1, y, t) = s_{xx}(x_1, y, t) + s_{yy}(x_1, y, t) + s_{zz}(x_1, y, t)$$

– перший інваріант тензора напружень; $j^*(y)$ – задана функція.

2. Побудова розв'язку задачі керування. Припустимо, що у просторі неперервних функцій існує керування $t(y)$, $y \in [0, \infty)$, яке забезпечує існування точної нижньої грані функціонала (8). У цьому випадку задача мінімізації функціонала (8) еквівалентна задачі відшукування керування $t(y)$, яке забезпечуватиме рівність

$$S(x_1, y, t) = j^*(y), \quad y \in [0, \infty). \quad (9)$$

Припустимо також, що розв'язки задач термопружності (1)–(6) і теплопровідності (5)–(7) знайдено аналітично і подано у вигляді

$$s_{ij}(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty G_{ij}(x, y, x, h) T(x, h) dx dh + C_{ij} T(x, y), \quad (10)$$

$$s_{xy}(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty G_{xy}(x, y, x, h) T(x, h) dx dh,$$

$$T(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty G(x, y, x, s) t(x) dx ds +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty G^*(x, y, h, x, s) Q(h, x) dh dx ds, \quad (11)$$

де $G_{ij}(x, y, x, h)$, $G_{xy}(x, y, x, h)$, $G(x, y, x, s)$, $G^*(x, y, h, x, s)$ – відомі функції, $C_{ij} = \text{const}$, $i = x, y$.

Якщо підставити температурне поле (11) у вираз для напружень $S(x_1, y; t)$, виконати відповідні перетворення і скористатись умовою (9), то в результаті отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^{\infty} \mathbf{K}(y, x) t(x) dx = f(y) \quad (12)$$

на функцію $t(y)$, де $\mathbf{K}(y, x)$, $f(y)$ – відомі ядро та права його частина.

Отже, за зроблених припущень вихідну задачу керування (8) можна звести до оберненої задачі термопружності [4, 22], яку описує інтегральне рівняння (10) і в якій за заданим у площині $x = x_1$ розподілом температурних напружень потрібно визначити функцію зміни температури довкілля.

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що температурне поле $T(x, y)$ є парною функцією координати y . Щоб отримати інтегральне рівняння (12), скористаємося наведеними раніше [8, 16] розв'язками задач термопружності (1)–(6) і теплопровідності (5)–(7) у вигляді (10), (11), знайденими за допомогою функції напружень Ері [10, 14] та інтегрального косинус-перетворення Фур'є [13]:

$$G_{xx}(x, y; x, h) = \frac{a_T E}{(1-n)\rho} \int_0^{\infty} s \left((1+2sx) \exp(-s(x+h)) - \exp(-s|x-h|) \right) \cos(sx) \cos(sy) ds, \quad C_{xx} = 0,$$

$$G_{yy}(x, y; x, h) = \frac{a_T E}{(1-n)\rho} \int_0^{\infty} s \left((3-2sx) \exp(-s(x+h)) + \exp(-s|x-h|) \right) \cos(sx) \cos(sy) ds, \quad C_{yy} = -\frac{a_T E}{1-n}, \quad (13)$$

$$G_{zz}(x, y; x, h) = \frac{4na_T E}{(1-n)\rho} \int_0^{\infty} s \exp(-s(x+h)) \cos(sx) \cos(sy) ds,$$

$$C_{zz} = -\frac{a_T E}{1-n}, \quad (14)$$

$$G_{xy}(x, y; x, h) = -\frac{a_T E}{(1-n)\rho} \int_0^{\infty} s \left((1-2sx) \exp(-s(x+h)) + \exp(-s|x-h|) \operatorname{sign}(x-h) \right) \cos(sx) \sin(sy) ds,$$

$$G(x, y, x, s) = \frac{2a}{\rho} \frac{\exp(-sx)}{s+a} \cos(sx) \cos(sy),$$

$$G_*(x, y, h, x, s) = \frac{1}{\rho} \frac{\cos(sx) \cos(sy)}{s(s+a)} \left((s-a) \exp(-s(x+h)) + (s+a) \exp(-s|x-h|) \right). \quad (15)$$

Зазначимо, що на основі співвідношень (10), (13)–(15) можна записати:

$$s_{zz} = \frac{2a_T E}{(1-n)\rho} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} 2n \int_0^{\infty} s \exp(-s(x+h)) \cos(sx) \cos(sy) ds \int_0^{\infty} T(x, h) dx dh - \frac{a_T E T}{1-n}, \quad (16)$$

$$\frac{s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}}{2} = \frac{2a_T E}{(1-n)\rho} (1+n) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-s(x+h)) \cdot \cos(sx) \cos(sy) ds \int_0^{\infty} T(x,h) dx dh - \frac{a_T E T}{1-n}. \quad (17)$$

Вводячи коефіцієнт k , об'єднаємо отримані вирази:

$$S = \frac{2a_T E}{(1-n)\rho} k \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-s(x+h)) \cdot \cos(sx) \cos(sy) ds \int_0^{\infty} T(x,h) dx dh - \frac{a_T E T}{1-n}. \quad (18)$$

Таким чином, дві сформульовані вище задачі керування температурними напруженнями можна звести до однієї. При цьому, якщо $k = 2n$, то отримуємо задачу керування нормальними напруженнями $s_{zz}(x_1, y)$, а якщо $k = 1+n$, то з точністю до сталої – задачу керування першим інваріантом тензора напружень $(s_{xx}(x_1, y) + s_{yy}(x_1, y) + s_{zz}(x_1, y)) / 2$ у перерізі $x = x_1$. Аналогічний результат одержимо, якщо у виразі (8) для першого інваріанта тензора напружень сумарні напруження $s_{xx} + s_{yy}$ замінимо на нормальні s_{zz} , скориставшись першим співвідношенням у формулах (4).

Маючи розв'язки задач термопружності і теплопровідності для півпростору у вигляді (10), (11), (13)–(17), знаходимо ядро

$$K(y, x) = \frac{(k-2)a}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-sx_1)}{s+a} \cos(sy) \cos(sx) ds$$

та праву частину

$$f(y) = j(y) - \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Q(h, x) \frac{A(h, s)}{s(s+a)} \cos(sy) \cos(sx) ds dh dx$$

інтегрального рівняння (12). Тут

$$A(h, s) = \frac{k}{2} - 1 + \frac{k}{2} (s+a)(1+2sh) \exp(-s(x_1+h)) - (s+a) \exp(-s|x_1-h|),$$

а $j(y) = (1-n)j^*(y) / (a_T E)$, якщо $k = 2n$, і $j(y) = (1-n)j^*(y) / (2a_T E)$, якщо $k = 1+n$.

Застосувавши до рівняння (12) інтегральне косинус-перетворення Фур'є [13], можна знайти його аналітичний розв'язок:

$$t(y) = \frac{4}{\rho(k-2)a} \int_0^{\infty} (x)(s+a) \exp(sx_1) \cos(sy) \cos(sx) ds dx - \frac{2}{\rho(k-2)a} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Q(h, x) \frac{A(h, s)}{s} \exp(sx_1) \cdot \cos(sy) \cos(sx) ds dh dx. \quad (19)$$

3. Числові результати та їх аналіз. Дослідимо за допомогою формули (18) оптимальний розподіл температури довкілля $t(y)$, який забезпечує нульові нормальні напруження $s_{zz}(0, y; t) = j(y) = 0$ на межовій поверхні

півпростору, коли переріз області тепловиділення площиною Oxy має прямокутну форму $D = \{(x, y) \in [h_1, h_2] \times [0, a]\}$ та інтенсивність теплових джерел є стала, тобто $Q(x, y) = Q_0(H(h_2 - x) - H(h_1 - x))H(a - y)$, де $Q_0, a, h_i = \text{const}, i = 1, 2, H(y)$ – функція Гевісайда.

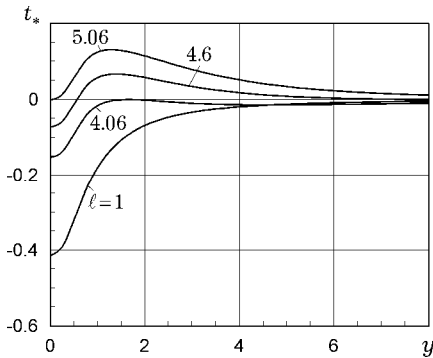


Рис. 1

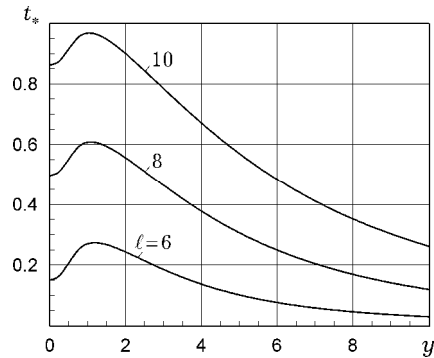


Рис. 2

На рис. 1 і 2 зображено безрозмірну функцію керування $t_* = \rho t / (2Q_0)$, розраховану за формулою (18) при $a = 1, a = 0.5$, коли відстань від межі півпростору до області тепловиділення є сталою – $h_1 = 0.1$, а змінною – товщина області $l = h_2 - h_1$. Виявили, що за фіксованої довжини a області D існують такі два характерні значення l_1 і $l_2, l_1 < l_2$ її товщини l , що $t_*(y) < 0, y \in [0, \infty)$, коли $0 < l < l_1$, і $t_*(y) > 0, y \in [0, \infty)$, коли $l > l_2$. Це означає, що забезпечити рівність $s_{zz}(0, y) \approx 0, y \in [0, \infty)$, тут можна, лише охолоджуючи чи нагріваючи межу поверхню півпростору. Якщо $l_1 < l < l_2$, то функція керування $t_*(y), y \in [0, \infty)$, буде знакозмінною, і для забезпечення вказаної рівності одну частину межевої поверхні півпростору потрібно охолоджувати, а іншу – нагрівати. Для розглянутого випадку $l_1 \approx 4.06, l_2 \approx 5.06$. Збільшуючи значення коефіцієнта теплообміну a через межу поверхню півпростору, забезпечити рівність $s_{zz}(0, y) \approx 0$ можна меншою за модулем функцією керування за решти незмінних параметрів.

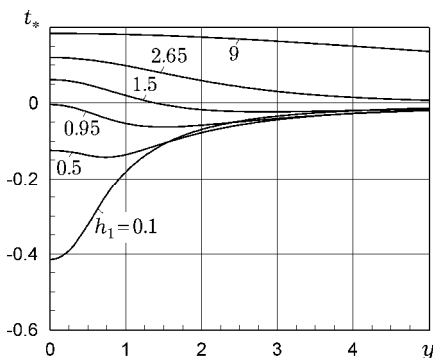


Рис. 3

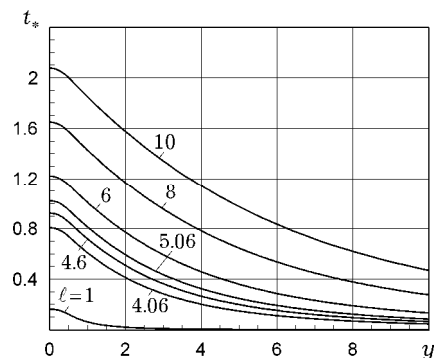


Рис. 4

Аналогічну поведінку функції керування t_* спостерігаємо і тоді, коли прямокутна область тепловиділення D сталих розмірів віддаляється від межевої поверхні півпростору. За фіксованої довжини a області D існують такі значення $h_1^{(1)}$ і $h_1^{(2)}, h_1^{(1)} < h_1^{(2)}$ відстані h_1 , що $t_*(y) < 0, y \in [0, \infty)$, коли $0 < h_1 < h_1^{(1)}$, і $t_*(y) > 0, y \in [0, \infty)$, коли $h_1 > h_1^{(2)}$. Якщо $h_1^{(1)} < h_1 < h_1^{(2)}$, то

функція керування $t^*(y)$, $y \in [0, \infty)$, є знакозмінною. Криві на рис. 3 відповідають значенням $a = 1$, $a = 0.5$ і $l = 1$. У розглянутому випадку $h_1^{(1)} \gg 0.95$ і $h_1^{(2)} \gg 2.65$.

За знайденим оптимальним керуванням розраховано температуру і температурні напруження у півпросторі. Результати обчислення безрозмірної температури $T^* = \rho T(0, y) / (2 Q_0)$ межової поверхні $x_1 = 0$ півпростору, зумовленої оптимальними розподілами температури довкілля (рис. 1 і 2), наведені на рис. 4, а розрахунку температури T^* , що відповідають зображеним на рис. 3 розподілам, – на рис. 5. Як бачимо, в обох випадках температура межової поверхні півпростору додатна. Зі збільшенням товщини l області D вона зростає, а з віддаленням області тепловиділення сталих розмірів від межі півпростору досягає деякого максимального значення за сталих решти параметрів задачі.

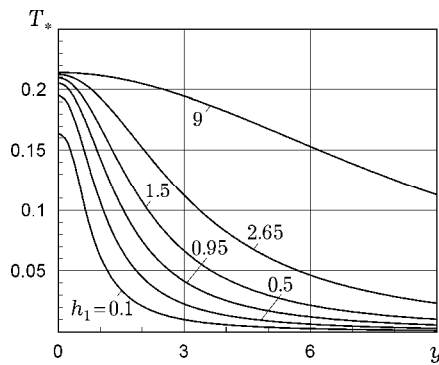


Рис. 5

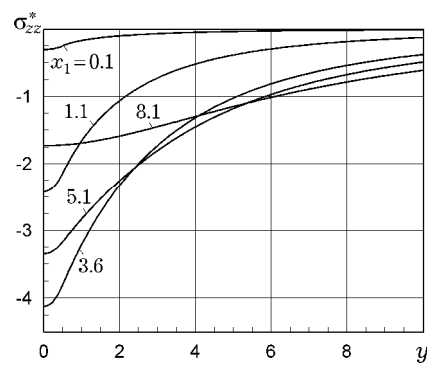


Рис. 6

Рис. 6 ілюструє поведінку у перерізі $x = x_1$ безрозмірних нормальних температурних напружень $s_{zz}^* = \rho(1 - \nu)s_{zz}(x_1, y) / (a_T E Q_0)$, спричинених знайденим оптимальним керуванням (18), коли $a = 1$, $a = 0.5$, $h_1 = 0.1$, $l = 5$. Вони набувають максимального за модулем значення $|s_{zz}^*(x_1, y)|$ в межах області тепловиділення D . Для розглянутого випадку – при $x_1 \gg 3.6$. З подальшим збільшенням величини x_1 максимальне значення $|s_{zz}^*(x_1, y)|$ зменшується і прямує до нуля.

Із формули (18) випливає, що існування функції керування $t(y)$, яка забезпечує точну нижню грань функціонала (8), безпосередньо пов'язане з існуванням невластних інтегралів, що стоять у правій частині цієї формули. Коли функції $Q(x, y)$, $j(y)$ або інші параметри задачі є такі, що наведені вище інтеграли розбігаються, то припущення про існування функції керування $t(y)$, яка забезпечує точну нижню грань функціонала (8), порушується. Тоді, як і у працях [8, 16], на основі виразу (18) у просторі неперервних функцій можна побудувати наближення функції керування у вигляді послідовності, яка мінімізуватиме критерій оптимальності (8).

Висновки. Для плоскодеформованого півпростору, який нагрівається внутрішніми джерелами тепла, сформульовано двовимірну стаціонарну задачу керування розподілом окремих компонент тензора напружень у заданому перерізі, паралельному до межової поверхні. За критерій оптимальності вибрано мінімальне рівномірне відхилення керованого розподілу напружень від заданого, а за функцію керування – температуру довкілля, з яким відбувається конвективний теплообмін. На основі припущення про існування керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію опти-

мальності, сформульовану задачу оптимізації зведено до оберненої задачі термопружності, яку описує інтегральне рівняння першого роду типу згортки. За допомогою інтегрального перетворення Фур'є побудовано її аналітичний розв'язок.

Для конкретного випадку теплового навантаження півпростору проаналізовано поведінку знайденого керування. Якщо припущення про існування керування, яке забезпечує точну нижню грань критерію оптимальності, порушується, запропоновано методику побудови у просторі неперервних функцій послідовності, яка мінімізує цей критерій оптимальності.

Роботу виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка розвитку пріоритетних напрямків наукових досліджень» КПКВК 6541230.

1. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
2. Дейнека В. С., Аралова А. А. Оптимальное управление термонапряженным состоянием полого длинного цилиндра // Доп. НАН України. – 2012. – № 5. – С. 38–42.
3. Калиняк Б. М. Визначення температурного поля та термомеханічних характеристик матеріалу, які забезпечують нульові радіальні напруження у неоднорідному вздовж радіуса довгому порожнистому циліндрі // Доп. НАН України. – 2015. – № 6. – С. 46–55.
4. Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В. Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: в. 5-ти т. – Т. 5.
5. Попович В. С., Ракоча І. І. Напружено-деформований стан кусково-однорідного термочутливого циліндра за тепловиділення кипінням рідини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 2. – С. 89–97.
Te same: Popovych V. S., Rakocha I. I. Stress-strain state of a piecewise homogeneous thermally sensitive cylinder in the presence of heat removal by liquid boiling // J. Math. Sci. – 2017. – 223, No. 2. – P. 103–116.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3341-4>
6. Федасюк Д. В. Методи та засоби теплового проектування мікроелектронних пристроїв. – Львів: Вид-во держ. ун-ту «Львівська політехніка», 1999. – 228 с.
7. Чекурін В. Ф., Постолакі Л. І. Застосування варіаційного методу однорідних розв'язків для оптимального керування осесиметричним напруженим станом циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – 60, № 2. – С. 105–116.
8. Ясінський А. В., Токова Л. П. Оптимізація статичних температурних переміщень плоскодеформованого півпростору за допомогою зовнішнього теплового навантаження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 3. – С. 54–62.
9. Ashida F., Morimoto T., Yamada T. Adaptive control of maximum thermal stress in a smart piezocomposite disk // J. Therm. Stresses. – 2016. – 39, No. 3. – P. 314–325.
– <https://doi.org/10.1080/01495739.2015.1125199>
10. Boley B. A., Weiner J. H. Theory of Thermal Stresses. – New York: Wiley, 1960. – 586 p.
11. Deka A., Datta D. B-spline curve based optimum profile on annular fins using multi-objective genetic algorithm // J. Therm. Stresses. – 2017. – 40, No. 6. – P. 733–746.
– <https://doi.org/10.1080/01495739.2016.1276419>
12. Ding S., Wu T.-P. Optimization of material composition to minimize the thermal stresses induced in FGM plates with temperature-dependent material properties // Int. J. Mech. Mater. Des. – 2018. – 14, No. 4. – P. 527–549.
– <https://doi.org/10.1007/s10999-017-9388-z>
13. Farlow S. J. Partial differential equations for scientists and engineers. – New York: Dover Publ., 1993. – 414 p.
14. Hetnarski R. B., Eslami M. R. Thermal stresses-advanced theory and applications. – Dordrecht: Springer, 2009. – 560 p.
15. Kushnir R. M., Yasinsky A. V. Optimal heating control of thermosensitive bodies under plastic deformation of material // J. Eng. Math. – 2013. – 78, No. 1. – P. 83–98.
– <https://doi.org/10.1007/s10665-011-9467-3>
16. Kushnir R., Yasinsky A. Control of steady-state thermal displacements and stresses in a plane-strained half-space // J. Therm. Stresses. – 2018. – 41, No. 10–12. – P. 1468–1486. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1520619>

17. *Nemat-Alla M.* Reduction of thermal stresses by composition optimization of two-dimensional functionally graded materials // *Acta Mech.* – 2009. – 208. – P. 147–161. – <https://doi.org/10.1007/s00707-008-0136-1>
18. *Nyashin Y. I., Iliyalov O. R.* Optimization problem for obtaining a prescribed residual stress distribution: formulation and solution // *Int. J. Mech. Sci.* – 1995. – 37, No. 5. – P. 485–493. – [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(94\)00080-4](https://doi.org/10.1016/0020-7403(94)00080-4)
19. *Ootao Y., Kawamura R., Tanigawa Y., Imamura R.* Optimization of material composition of nonhomogeneous hollow circular cylinder for thermal stresses relaxation making use of neural network // *J. Therm. Stresses.* – 1999. – 22, No. 1. – P. 1–22. – <https://doi.org/10.1080/014957399281020>
20. *Taler J., Dzierwa P., Jaremkiwicz M., Taler D., Kaczmarski K., Trojan M.* Thermal stress monitoring in thick-walled pressure components based on the solutions of the inverse heat conduction problems // *J. Therm. Stresses.* – 2018. – 41, No. 10-12. – P. 1501–1524. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1520621>
21. *Yang Q., Gao B., Xu Z., Xie W., Meng S.* Topology optimisations for integrated thermal protection systems considering thermo-mechanical constraints // *J. Appl. Therm. Eng.* – 2019. – 150, No. 5. – P. 995–1001. – <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.01.067>
22. *Yasinskyy A.* Determination and optimization of stress state of bodies on the basis of inverse thermoelasticity problems // *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 916–924. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_607
23. *Yasinskyy A., Tokovy Yu., Ierokhova O.* Optimization of two-dimensional nonstationary thermal stresses and displacements in a half-space through the use of internal heat sources // *J. Therm. Stresses.* – 2016. – 39, No. 9. – P. 1084–1097. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2016.1192854>

УПРАВЛЕНИЕ ДВУМЕРНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ ТЕМПЕРАТУРНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНЕГО ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Решена двумерная стационарная задача оптимального управления температурными напряжениями плоскодеформированного полупространства, нагреваемого внутренними источниками тепла. В качестве функции управления выбрана температура внешней среды, с которой осуществляется конвективный теплообмен через граничную поверхность полупространства. Проанализированы особенности поведения найденного решения.

Ключевые слова: задача управления, обратная задача термоупругости, температурные напряжения, двумерная задача термоупругости.

CONTROL OF TWO-DIMENSIONAL STEADY-STATE THERMAL STRESSES IN A HALF-SPACE BY MEANS OF THE OUTER THERMAL IMPACT

A two-dimensional steady-state problem on the optimal control of thermal stresses in a plane-deformed half-space is solved when the half-space is heated by inner heat sources. The control function is represented by the temperature of the surrounding which convectively exchange the heat with the half-space through its limiting surface. The features of the obtained solution are analyzed.

Key words: control problem, inverse thermoelasticity problem, thermal stresses, two-dimensional thermoelasticity problem.